



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ecuacións lineais en diferenzas e as súas aplicacións ao estudo teórico de métodos lineais multipaso para EDOs

Nerea López Álvarez

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ecuacións lineais en diferenzas e as
súas aplicacións ao estudo teórico de
métodos lineais multipaso para
EDOs

Nerea López Álvarez

Setembro, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Ecuacións lineais en diferenzas e as súas aplicacións ao estudo teórico de métodos lineais multipaso para EDOs
Breve descrición do contido
<p>O programa da materia "Métodos Numéricos en Optimización e Ecuacións Diferenciais" contén unha breve introdución aos métodos lineais multipaso. O estudo de algúns aspectos teóricos de estes métodos require o uso de resultados sobre ecuacións lineais en diferenzas. O obxectivo do traballo é elaborar un documento que inclúa:</p> <ul style="list-style-type: none">(i) Conceptos e resultados fundamentais relativos á estrutura das solucións das ecuacións lineais en diferenzas de orde k.(ii) Un breve repaso de algúns conceptos centrais no estudo dos métodos numéricos para EDOs: converxencia, consistencia e estabilidade.(iii) A aplicación dos resultados do item (i) ao estudo teórico dos métodos lineais multipaso.
Recomendacións
Coñecer os contidos sobre métodos numéricos de resolución de EDOs abordados na materia "Métodos Numéricos en Optimización e Ecuacións Diferenciais".
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Ecuacións lineais en diferenzas de orde k.	1
1.1. Xeneralidades.	1
1.2. Estrutura do conxunto de solucións das ecuacións lineais.	4
1.3. Ecuacións lineais en diferenzas con coeficientes constantes.	8
1.3.1. Solución xeral da ecuación lineal homoxénea con coeficientes constantes de orde k	10
1.3.2. Ecuacións lineais en diferenzas non homoxéneas con coeficientes constantes.	14
2. Métodos numéricos para EDO.	19
2.1. Algúns métodos básicos coñecidos.	19
2.2. Forma xeral dun método lineal multipaso.	21
2.3. Algúns métodos lineais multipaso coñecidos.	21
2.4. O erro local de truncamento: definición e algúns exemplos.	23
2.5. Consistencia, estabilidade e converxencia dos métodos lineais multipaso.	24
3. Aplicación das ecuacións en diferenzas ao estudo dos MLM.	29
3.1. Converxencia e estabilidade dos MLM e a condición da raíz.	29
Bibliografía	39

Resumo

Este traballo ten tres capítulos. O primeiro deles trata conceptos e resultados fundamentais relativos á estrutura das solucións das ecuacións lineais en diferenzas. O segundo comeza recordando algúns métodos numéricos básicos para ecuacións diferenciais ordinarias (EDO), e continúa cun breve repaso de algúns conceptos centrais no estudo xeral dos métodos numéricos para EDO que son a converxencia, a consistencia e a estabilidade. Por último, no terceiro capítulo aplícanse os resultados do primeiro capítulo ao estudo teórico dos métodos lineais multipaso. En varias partes do traballo faise uso de algúns exemplos prácticos que melloran a comprensión do estudo teórico.

Abstract

This work consists of three chapters. The first one deals with fundamental concepts and results related to the structure of solutions to linear difference equations. The second begins remembering some numeric basic methods to ordinary differential equations (ODE), and continues with a brief review of some central concepts in the general study of numerical methods for ODE which are convergence, consistency and stability. Finally, in the third chapter, the results of the first chapter are applied to the theoretical study of multistep linear methods. In various parts of the work, some practical examples are used that improve the understanding of the theoretical study.

Introdución

Esta memoria sobre ecuacións lineais en diferenzas e as súas aplicacións ao estudo teórico de métodos lineais multipaso para EDOs consta de tres capítulos ben diferenciados. As principais asignaturas do grado relacionadas con este traballo son Métodos Numéricos en Optimización e Ecuacións Diferenciais e Ecuacións Diferenciais Ordinarias.

No primeiro capítulo estudaremos as ecuacións lineais en diferenzas de orde k e a estrutura do conxunto de solucións das mesmas apoyándonos nalgún exemplo práctico para facilitar a comprensión.

No segundo capítulo repasaremos algúns métodos básicos coñecidos, definiremos a forma xeral dun método lineal multipaso (MLM) e estudaremos a consistencia, a estabilidade e a converxencia deste.

Por último, no último capítulo estudaremos os métodos lineais multipaso aplicando os resultados tratados no primeiro capítulo, relativo ás ecuacións lineais en diferenzas. Tamén veremos a aplicación destes resultados a algúns métodos clásicos definidos previamente no capítulo dous.

Capítulo 1

Ecuacións lineais en diferenzas de orde k .

Neste primeiro capítulo estudaremos as ecuacións lineais en diferenzas de orde k e a estrutura do conxunto de solucións das mesmas, centrándonos na meirande parte do capítulo nas ecuacións lineais en diferenzas con coeficientes constantes.

As referencias fundamentais usadas neste capítulo son [2] e [3].

1.1. Xeneralidades.

Definición 1.1. Sexan k un enteiro positivo e I un conxunto de enteiros consecutivos. Chamaremos *ecuación en diferenzas de orde k* a unha ecuación da forma

$$F_n(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0, \quad (1.1)$$

estando as funcións $F_n(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$ definidas para $n \in I$ e para todos os valores reais das $k + 1$ variables $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k$.

Esta ecuación simboliza o problema de atopar unha sucesión de números $\{y_n\}$, chamada a *solución* da ecuación en diferenzas, de maneira que (1.1) se satisface para todo $n \in I$. Veremos algúns exemplos a continuación:

Exemplo 1.2. A coñecida *sucesión de números de Fibonacci* é a solución da ecuación en diferenzas $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$, para cada $n \geq 2$, coas condicións iniciais $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$. Esta sucesión aparece en múltiples configuracións biolóxicas como na distribución das ramas das árbores, na distribución das follas nun tallo ou na árbore xenealóxica das abellas melíferas.

Unha ilustración moi coñecida deste exemplo é o caso dos "coellos de Fibonacci". Consiste en resolver a pregunta de cantos coellos haberá nunha granxa pasados n meses partindo dunha parella de coellos de sexos opostos sen capacidade reprodutiva e das seguintes premissas:

- 1) Os coellos alcanzan a capacidade reprodutiva ao cumprir un mes de idade.
- 2) En canto poden reproducirse, aparéanse.
- 3) O período de xestación dos coellos é de un mes.
- 4) A femia sempre ten unha parella de coellos de sexos opostos.

Dado que se parte dunha parella de coellos, o primeiro elemento da sucesión (correspondente a $n = 0$ meses), será $y_0 = 1$. Ao cabo de $n = 1$ mes, esa parella reproducirase, polo tanto, $y_1 = 1$. Ao cabo de $n = 2$ meses, nacerá unha nova parella de coellos ($y_2 = 2$) e a primeira parella reproducirase de novo. Ao cabo de $n = 3$ meses, nacerá unha nova parella de coellos ($y_3 = 2 + 1 = 3$) e produciranse dous novos apareamentos. Polo tanto, $y_4 = y_3 + y_2$.

En xeral, para $n \geq 2$, o número de parellas pasados n meses, y_n , é igual ao número de parellas pasados $n - 1$ meses máis o número de novos apareamentos ao cabo de $n - 1$ meses. Este último número é igual ao número de parellas pasados $n - 2$ meses. Por conseguinte, $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Como se pode observar, o número de parellas de coellos por mes está determinado pola sucesión de Fibonacci: $\{y_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$, $n \geq 0$.

Exemplo 1.3. A ecuación en diferenzas $y_n = 2y_{n-1} + 1$, con $n \geq 2$ e a condición inicial $y_1 = 1$, resolve o problema das Torres de Hanói, que é un xogo matemático formado por tres montóns de discos de diferentes tamaños que consiste en trasladar un montón de discos a outro dos dous montóns restantes. O estado inicial deses discos obrigatoriamente terá que cumprir que ningún disco máis grande pode estar enriba doutro máis pequeno. As tres regras fundamentais deste xogo son que non se pode colocar un disco máis grande enriba dun máis pequeno, que só se pode mover un disco de cada vez e que só se pode desprazar o disco que se encontre enriba de todo en cada montón. O número de movementos correspondente a n discos é y_n . O número de movementos para resolver o problema crece exponencialmente conforme aumenta o número de discos. Veremos máis adiante que o número mínimo de movementos necesarios para resolver un xogo das Torres de Hanói é $2^n - 1$, onde n é a cantidade de discos.



Figura 1.1: Torres de Hanói

Esta figura foi extraída de: <https://platzi.com/tutoriales/1050-programacion-basica/1498-tutorial-avanzado-recursividad-y-torres-de-hanoi/>

Definición 1.4. Unha ecuación en diferenzas dise *lineal* se para cada $n \in I$, a función F_n é *afín* nas variables $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k$. Escribiremos unha ecuación lineal en diferenzas como

$$\alpha_{k,n}y_{n+k} + \alpha_{k-1,n}y_{n+k-1} + \dots + \alpha_{0,n}y_n = \gamma_{n+k}, \quad (1.2)$$

onde os coeficientes $\alpha_{k,n}, \dots, \alpha_{0,n}$ e o segundo membro γ_{n+k} son funcións dadas de n definidas para todo $n \in I$.

No caso de ecuacións en diferenzas lineais consideraremos o caso máis xeral de coeficientes e segundo membro complexos.

Definición 1.5. Unha ecuación lineal en diferenzas dise *homoxénea* se é da forma (1.2) con $\gamma_{n+k} = 0$, é dicir,

$$\alpha_{k,n}y_{n+k} + \alpha_{k-1,n}y_{n+k-1} + \dots + \alpha_{0,n}y_n = 0. \quad (1.3)$$

Supoñamos $I = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$.

Teorema 1.6. *Supoñamos que $\alpha_{k,n} \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Entón, calquera que sexa a elección dos valores iniciais $y_{n_0}, y_{n_0+1}, \dots, y_{n_0+k-1}$, existe unha única solución da ecuación (1.2) con estes valores iniciais.*

Demostración. A existencia da solución séguese trivialmente, xa que $\alpha_{k,n} \neq 0$ implica a partir de (1.2) que

$$y_{n+k} = -\frac{1}{\alpha_{k,n}} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{s,n} y_{n+s} + \frac{\gamma_{n+k}}{\alpha_{k,n}}, \quad n \geq n_0. \quad (1.4)$$

Para probar a unicidade, consideremos dúas solucións $\{y'_n\}$ e $\{y''_n\}$. Entón a súa diferenza $\{y_n\} \equiv \{y'_n - y''_n\}$ ten valores iniciais $y_{n_0} = y_{n_0+1} = \dots = y_{n_0+k-1} = 0$ e satisface (1.4) con $\gamma_{n+k} \equiv 0$.

Desta maneira atopamos que $\{y_n\} \equiv 0$ e concluímos a demostración. \square

1.2. Estrutura do conxunto de solucións das ecuacións lineais.

Nesta sección, para alixear a notación, e sen perda de xeneralidade, supoñeremos que o primeiro elemento do conxunto I é 0, e supoñeremos tamén que $\alpha_{k,n} \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Comezaremos estudando a estrutura do conxunto de solucións da ecuación lineal en diferenzas homoxénea (1.3).

O conxunto de solucións dunha ecuación lineal en diferenzas homoxénea dada ten estrutura de espazo vectorial, o cal veremos máis adiante.

Como xa vimos no teorema anterior, unha solución de (1.3) pode atoparse sexa cal for a elección dos valores iniciais y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , sendo esta solución única. En particular, para os valores iniciais $y_0 = y_1 = \dots = y_{k-1} = 0$, temos a *solución trivial* $y_n \equiv 0$.

Se as sucesións y_n e z_n son solucións de (1.3), entón evidentemente a sucesión formada cos elementos $Ay_n + Bz_n$, onde A e B son constantes arbitrarias, é unha solución de (1.3).

Definición 1.7. Dise que dúas solucións y_n e z_n son *linealmente independentes en* $n = n_0$, $n_0 \geq 0$, se non existen dúas constantes A e B , $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, tales que:

$$Ay_n + Bz_n = 0, \quad n - n_0 = 0, 1, \dots, k - 1.$$

A definición anterior xeneralízase ao caso de m solucións como segue:

Definición 1.8. Dise que m solucións $\{y_n^{(\mu)}\}$, $\mu = 1, 2, \dots, m$, de (1.3) son *linealmente independentes en* $n = n_0$ se non se poden atopar m constantes A_μ , $\mu = 1, 2, \dots, m$, non todas nulas, tales que:

$$A_1 y_n^{(1)} + A_2 y_n^{(2)} + \dots + A_m y_n^{(m)} = 0, \quad n - n_0 = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (1.5)$$

Mediante álgebra matricial elemental, esta condición é equivalente á condición de que a matriz

$$M_{n_0} = \begin{pmatrix} y_{n_0}^{(1)} & y_{n_0+1}^{(1)} & \cdots & y_{n_0+k-1}^{(1)} \\ y_{n_0}^{(2)} & y_{n_0+1}^{(2)} & \cdots & y_{n_0+k-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n_0}^{(m)} & y_{n_0+1}^{(m)} & \cdots & y_{n_0+k-1}^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times k}$$

teña rango m .

Vexamos como se obtén a equivalencia entre ambas condicións. En primeiro lugar:

$$(1.5) \Leftrightarrow M_{n_0}^T \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ademáis, $\dim \ker(M_{n_0}^T) = m - \text{rango}(M_{n_0}^T) = m - \text{rango}(M_{n_0})$.

Polo tanto, $\ker(M_{n_0}^T) = 0 \Leftrightarrow \text{rango}(M_{n_0}) = m$.

Séguese entón que o número máximo de solucións linealmente independentes en calquera punto é k .

Definición 1.9. Un sistema de k solucións de (1.3) linealmente independentes en $n = n_0$ chámase *sistema fundamental* de (1.3) en $n = n_0$.

Observación 1.10. Para construír un sistema fundamental chega con determinar as k solucións $\{y_n^{(\mu)}\}$, $\mu = 1, \dots, k$, para as cales M_{n_0} se reduce a I_k , sendo esta a matriz identidade de orde k .

Proposición 1.11. *Se*

$$\alpha_{0,n} \neq 0, n \geq n_0, \tag{1.6}$$

entón un sistema que é fundamental en $n = n_0$ é fundamental en calquera $n \geq n_0$.

Demostración. Sexa a matriz

$$M_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} & y_{n+1}^{(1)} & \cdots & y_{n+k-1}^{(1)} \\ y_n^{(2)} & y_{n+1}^{(2)} & \cdots & y_{n+k-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(k)} & y_{n+1}^{(k)} & \cdots & y_{n+k-1}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{C}). \tag{1.7}$$

Recordemos que, para un enteiro $n_1 \in I$, o sistema $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=0}^k$ é fundamental en $n = n_1$ se e só se $\text{rango}(M_{n_1}) = k$, o que á súa vez equivale a que $\det(M_{n_1}) \neq 0$.

Procedemos por indución en n .

Para $n = n_0$, $\det(M_{n_0}) \neq 0$, xa que, por hipótese, o sistema é fundamental en $n = n_0$.

Supoñamos certo o resultado para $n = n_1$ e probémolo para $n = n_1 + 1$.

Temos que probar que $\det(M_{n_1+1}) \neq 0$.

Consideremos, pois, a matriz

$$M_{n_1+1} = \begin{pmatrix} y_{n_1+1}^{(1)} & \cdots & y_{n_1+k-1}^{(1)} & y_{n_1+k}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n_1+1}^{(k)} & \cdots & y_{n_1+k-1}^{(k)} & y_{n_1+k}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{C}).$$

Introducindo os vectores columna $\vec{y}_n = \begin{bmatrix} y_n^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^k$, podemos escribir M_{n_1+1} por co-

lumnas como segue $M_{n_1+1} = [\vec{y}_{n_1+1} \mid \cdots \mid \vec{y}_{n_1+k-1} \mid \vec{y}_{n_1+k}]$.

Por outra parte, da ecuación (1.3) resulta que

$$y_{n+k}^{(\mu)} = -\frac{1}{\alpha_{k,n}} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{s,n} y_{n+s}^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \dots, k \quad \forall n \geq n_0,$$

o que equivale a

$$\vec{y}_{n+k} = -\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\alpha_{s,n}}{\alpha_{k,n}} \vec{y}_{n+s} \quad \forall n \geq n_0.$$

Polo tanto,

$$M_{n_1+1} = \begin{bmatrix} \vec{y}_{n_1+1} & \cdots & \vec{y}_{n_1+k-1} & -\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\alpha_{s,n}}{\alpha_{k,n}} \vec{y}_{n_1+s} \end{bmatrix}.$$

Usando agora a linealidade do determinante respecto da última columna e observando que as contribucións ao determinante correspondentes aos índices $s = 1, \dots, k-1$, son nulas, obtemos que

$$\begin{aligned} \det(M_{n_1+1}) &= -\frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{k,n}} \det \begin{bmatrix} \vec{y}_{n_1+1} & \cdots & \vec{y}_{n_1+k-1} & \vec{y}_{n_1} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{k,n}} (-1)^{k-1} \det \begin{bmatrix} \vec{y}_{n_1} & \cdots & \vec{y}_{n_1+k-2} & \vec{y}_{n_1+k-1} \end{bmatrix} = (-1)^k \frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{k,n}} \det(M_{n_1}) \neq 0, \end{aligned}$$

xa que $\det(M_{n_1}) \neq 0$ pola hipótese de indución e $\alpha_{0,n} \neq 0$.

□

Se non se cumpre a condición (1.6), é dicir, $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, tal que $\alpha_{0,n} = 0$, entón un sistema que é fundamental en $n = n_0$ pode non ser fundamental para algún $n > n_0$.

Vexámolo cun contraexemplo:

Consideramos a ecuación en diferenzas

$$y_{n+2} - (n-1)y_{n+1} + (n-2)y_n = 0, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Sexa $\{y_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$ a solución que satisface as condicións iniciais $y_0^{(0)} = 1, y_1^{(0)} = 0$.

Por recurrencia, $y_2^{(0)} = 2, y_3^{(0)} = 0$ e $y_4^{(0)} = 0$ e isto implica claramente que $y_n^{(0)} = 0 \quad \forall n \geq 5$ (de feito, $y_n^{(0)} = 0 \quad \forall n \geq 3$).

Sexa $\{y_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ a solución que satisface as condicións iniciais $y_0^{(1)} = 0, y_1^{(1)} = 1$.

Análogamente, $y_2^{(1)} = -1, y_3^{(1)} = 1, y_4^{(1)} = 1$ e é doado probar por indución que $y_n^{(1)} = 1 \quad \forall n \geq 5$ (de feito, $y_n^{(1)} = 1 \quad \forall n \geq 3$).

Vexámolo:

Tomando $n = 3$ en (1.8), resulta $y_5^{(1)} = 2y_4^{(1)} - y_3^{(1)}$, e como $y_3^{(1)} = 1, y_4^{(1)} = 1$, entón $y_5^{(1)} = 1$.

1.2. ESTRUTURA DO CONXUNTO DE SOLUCIÓNS DAS ECUACIÓNS LINEAIS. 7

Supoñamos como hipótese de indución que $y_{n-2}^{(1)} = y_{n-1}^{(1)} = 1$.

Sabemos que $y_n^{(1)} = (n-3)y_{n-1}^{(1)} - (n-4)y_{n-2}^{(1)}$, así que, tendo en conta a hipótese de indución, $y_n^{(1)} = n-3 - n+4 = 1$.

O conxunto $\{\{y_n^{(0)}\}_{n=0}^\infty, \{y_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty\}$ é un sistema fundamental en $n = 0$, pero non o é en $n = n_1$ para $n_1 \geq 3$.

Porén, o seguinte teorema cúmprese incluso sen a condición (1.6):

Teorema 1.12. *Unha sucesión $\{y_n\}$ que é unha solución de (1.3) para $n \geq n_0$, pode expresarse para $n \geq n_0$ como unha combinación lineal das solucións de un sistema fundamental en $n = n_0$.*

Demostración. Sexa $\{y_n^\mu\}, \mu = 1, \dots, k$, o sistema fundamental dado. Determinaremos as constantes A_1, \dots, A_k mediante as condicións

$$\sum_{\mu=1}^k A_\mu y_n^\mu = y_n, \quad n = n_0, \dots, n_0 + k - 1. \quad (1.9)$$

O determinante deste sistema de k ecuacións lineais con k incógnitas (as A_μ), é distinto de 0, xa que as k solucións $\{y_n^\mu\}$ son linealmente independentes en $n = n_0$. Polo tanto, o sistema ten unha única solución A_1, \dots, A_k .

Se agora definimos

$$z_n = y_n - \sum_{\mu=1}^k A_\mu y_n^\mu, \quad n = n_0, \dots, n_0 + k - 1,$$

entón a sucesión $\{z_n\}$, que é unha combinación lineal de solucións da ecuación en diferenzas (1.3), é unha solución de (1.3). Xa que $z_{n_0} = z_{n_0+1} = \dots = z_{n_0+k-1} = 0$, temos que $z_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Séguese entón que (1.9) se cumpre para todo $n \geq n_0$. \square

Estudaremos agora a estrutura do conxunto de solucións da ecuación lineal en diferenzas completa ou non homoxénea.

Recordemos que a forma xeral da *ecuación lineal en diferenzas non homoxénea* é

$$\alpha_{k,n} y_{n+k} + \alpha_{k-1,n} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_{0,n} y_n = \gamma_{n+k}. \quad (1.10)$$

A ecuación homoxénea asociada a unha ecuación completa é a ecuación análoga a (1.10) con $\gamma_{n+k} = 0$, é dicir, a ecuación (1.3).

É sinxelo ver que a solución xeral da ecuación (1.10) é da forma $\{y_n + z_n\}$, onde $\{y_n\}$ denota a solución xeral da ecuación homoxénea asociada e $\{z_n\}$ unha solución particular da ecuación completa.

Podemos atopar unha solución particular da ecuación non homoxénea resolvendo (1.10) cos valores iniciais $y_0 = y_1 = \dots = y_{k-1} = 0$.

1.3. Ecuaciones lineais en diferencias con coeficientes constantes.

Nesta sección consideraremos de novo $I = \{n_0, n_0+1, \dots\}$, é dicir, n_0 non necesariamente é 0.

Definición 1.13. Unha *ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes* é unha ecuación da forma

$$L(y_n) \equiv \alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = \gamma_{n+k}, \quad n \geq n_0 \quad (1.11)$$

onde $\alpha_s \in \mathbb{C}$, $s = 0, \dots, k$, son os coeficientes e os números complexos γ_{n+k} son os termos non homoxéneos.

Definición 1.14. A ecuación lineal en diferencias (1.11) dise de *orde k* se $\alpha_k \neq 0$ e $\alpha_0 \neq 0$.

O seguinte resultado é consecuencia inmediata do teorema 1.6.

Corolario 1.15. *Se a ecuación en diferencias (1.11) é de orde k , entón para todo $v_0, v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{C}$, existe unha única solución $\{y_n\}$ satisfacendo as condicións iniciais*

$$y_{n_0} = v_0, \quad y_{n_0+1} = v_1, \quad \dots, \quad y_{n_0+k-1} = v_{k-1}. \quad (1.12)$$

Ocuparémonos agora da ecuación homoxénea con coeficientes constantes, é dicir, $L(y_n) = 0$, da forma:

$$L(y_n) = \alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = 0, \quad n \geq n_0. \quad (1.13)$$

Na referencia [2] introdúcese a seguinte definición.

Definición 1.16. Supoñamos que a ecuación (1.13) é de orde k . Un *conxunto fundamental de solucións* de (1.13) é un conxunto de k solucións de (1.13) linealmente independentes.

Resulta natural pensar que relación existe entre este concepto e o de sistema fundamental.

Proposición 1.17. *Supoñamos que a ecuación (1.13) é de orde k . Entón, $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un sistema fundamental en $n = n_0$ se e só se é un conxunto fundamental de solucións.*

Demostración. Supoñamos que $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un sistema fundamental en $n = n_0$. Entón, cada sucesión $\{y_n^{(\mu)}\}_{n \geq n_0}$ é solución de (1.13). A independencia lineal é inmediata, pois se

$$\sum_{\mu=1}^k C_\mu y_n^{(\mu)} = 0 \quad \forall n \geq n_0,$$

1.3. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENZAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.9

tense esta igualdade en particular para $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k - 1$, o que implica que $C_\mu = 0$, $\mu = 1, \dots, k$, xa que $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un sistema fundamental en $n = n_0$.

Recíprocamente, supoñamos que $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un conxunto fundamental de solucións de (1.13) e vexamos que é un sistema fundamental en $n = n_0$.

Procedemos por redución ao absurdo.

Supoñamos o contrario. Entón, existen $A_\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = 1, \dots, k$, non todos nulos, tales que

$$\sum_{\mu=1}^k A_\mu y_n^{(\mu)} = 0, \quad n = n_0, \dots, n_0 + k - 1.$$

Sexa $l \in \{1, \dots, k\}$ tal que $A_l \neq 0$. Podemos expresar

$$y_n^{(l)} = -\frac{1}{A_l} \sum_{\mu=1, \mu \neq l}^k A_\mu y_n^{(\mu)}, \quad n = n_0, \dots, n_0 + k - 1.$$

Sexa $\{z_n\}_{n \geq n_0}$ a sucesión dada por

$$z_n = -\frac{1}{A_l} \sum_{\mu=1, \mu \neq l}^k A_\mu y_n^{(\mu)}, \quad n \geq n_0. \quad (1.14)$$

$\{z_n\}_{n \geq n_0}$ é solución de (1.13) (por ser combinación lineal de solucións), $\{y_n^{(l)}\}_{n \geq n_0}$ é tamén solución de (1.13) e ademáis $y_n^{(l)} = z_n$ para $n = n_0, \dots, n_0 + k - 1$.

En virtude do corolario 1.15 temos que

$$y_n^{(l)} = z_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

o que xunto con (1.14) implica que

$$\sum_{\mu=1}^k A_\mu y_n^{(\mu)} = 0 \quad \forall n \geq n_0,$$

en contradición coa independencia lineal das solucións $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$.

Por conseguinte, $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un sistema fundamental en $n = n_0$. □

Observación 1.18. Desta proposición e do teorema 1.12, deducimos que un conxunto fundamental de solucións de (1.13) é un sistema de xeradores do espazo vectorial das solucións. Como un conxunto fundamental, é por definición, linealmente independente, concluimos que $\{y_n^{(\mu)}\}_{\mu=1}^k$ é un conxunto fundamental de solucións de (1.13) se e só se é unha base do espazo vectorial das solucións.

Tendo en conta ademáis a observación 1.10 deducimos que a dimensión deste espazo vectorial é k , a orde da ecuación.

1.3.1. Solución xeral da ecuación lineal homoxénea con coeficientes constantes de orde k .

Imos atopar un conxunto fundamental de solucións de $L(y_n) \equiv 0$, $n \geq n_0$.
Supoñeremos ao longo desta subsección que a orde desta ecuación é k .

Sexa

$$p_k(x) \equiv \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_0. \quad (1.15)$$

O polinomio de grado k , $p_k(x)$, chámase *polinomio característico* da ecuación en diferenzas $L(y_n) = 0$, $n \geq n_0$.

Buscamos unha solución da forma $y_n = ax^n$, $n \geq n_0$, onde $a, x \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$.
A sucesión y_n é solución de $L(y_n) = 0$ se e só se $\alpha_k x^k + \dots + \alpha_0 = 0$, é dicir, $p_k(x) = 0$.

Teorema 1.19. *Se as raíces x_1, \dots, x_k de $p_k(x)$ son todas distintas, entón $\{x_1^n\}_{n \geq n_0}, \dots, \{x_k^n\}_{n \geq n_0}$ son solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea (1.3).*

Demostración. En virtude de (1.7), temos que

$$M_{n_0} = \begin{bmatrix} x_1^{n_0} & x_1^{n_0+1} & \dots & x_1^{n_0+k-1} \\ x_2^{n_0} & x_2^{n_0+1} & \dots & x_2^{n_0+k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_k^{n_0} & x_k^{n_0+1} & \dots & x_k^{n_0+k-1} \end{bmatrix},$$

polo tanto,

$$M_{n_0}^\top = V(x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} x_1^{n_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{n_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x_k^{n_0} \end{bmatrix},$$

sendo

$$V(x_1, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{bmatrix},$$

que é unha matriz de Vandermonde.

O seu determinante vén dado por $\det V(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$, que é distinto de 0 se $x_i \neq x_j$, para todo i, j , $i \neq j$. Por outro lado, dado que a ecuación (1.13) é de orde k , o coeficiente $\alpha_0 \neq 0$, e polo tanto, $x_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Polo tanto, $\det(M_{n_0}) \neq 0$, o que é equivalente a que $\{\{x_\nu^n\}_{n \geq n_0}; \nu = 1, \dots, k\}$ é un sistema fundamental en $n = n_0$. \square

1.3. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENZAS CON COEFICIENTES CONSTANTES. 11

Así pois, se as raíces x_1, \dots, x_k de $p_k(x)$ son todas distintas, o conxunto $\{\{x_\nu^n\}_{n \geq n_0}; \nu = 1, \dots, k\}$ é un conxunto fundamental de solucións. Se as raíces x_i non son distintas, aínda podemos definir un conxunto fundamental de solucións. Sexa x_1 unha raíz de multiplicidade $m_1 > 1$ de $p_k(x) = 0$. Entón podemos xerar unha solución e derivar sucesivamente con respecto a x_1 ata a orde $m_1 - 1$ para xerar $m_1 - 1$ solucións adicionais. Sexa $y_n^{(1)} = x_1^n$. Agora:

$$\{y_n^{(2)}\} = \frac{d}{dx_1}\{y_n^{(1)}\}, \dots, \{y_n^{(m_1)}\} = \frac{d}{dx_1}\{y_n^{(m_1-1)}\}. \quad (1.16)$$

Estas sucesións son solucións de (1.13), pois:

Se x_1 é unha raíz de multiplicidade m_1 de $p_k(x)$, entón x_1 é unha raíz de multiplicidade m_1 da función $f(z) = z^n p_k(z)$, onde n é un número enteiro arbitrario (dado que $x_1 \neq 0$, podemos considerar $n < 0$). Logo, escribindo as relacións $f(x_1) = 0$ e $\frac{d^l f}{dz^l}(x_1) = 0$, $l = 1, \dots, m_1 - 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_k x_1^{n+k} + \dots + \alpha_0 x_1^n &= 0, \\ \alpha_k(n+k)x_1^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 n x_1^{n-1} &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_k(n+k) \dots (n+k-m_1+2)x_1^{n+k-m_1+1} + \dots + \alpha_0 n \dots (n-m_1+2)x_1^{n-m_1+1} &= 0. \end{aligned}$$

Estas relacións son equivalentes a afirmar que a sucesión $\{x_1^n\}$ e as $m_1 - 1$ sucesións (1.16) son solucións da ecuación en diferenzas (1.13).

Dado que calquera solución pode multiplicarse por unha constante distinta de cero, multiplicamos $\{y_n^{(\nu)}\}$ por $x_1^{\nu-1}$ para manter as potencias orixinais de x_1 nos termos correspondentes, é dicir, introducimos

$$\{v_n^{(\nu)}\} = x_1^{\nu-1} \{y_n^{(\nu)}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, m_1.$$

Os elementos destas sucesións son:

$$\begin{aligned} v_n^{(1)} &= x_1^n, \\ v_n^{(2)} &= n x_1^n, \\ v_n^{(3)} &= n(n-1)x_1^n, \\ &\vdots \\ v_n^{(m_1)} &= n(n-1) \dots (n-m_1+2)x_1^n, \quad \text{para } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Formando combinacións lineais das solucións $\{v_n^{(\nu)}\}$ correspondentes a unha raíz, x_1 , de multiplicidade m_1 , atopamos as sucesións máis simples $\{w_n^{(\nu)}\}$:

$$w_n^{(1)} = x_1^n,$$

$$\begin{aligned}
w_n^{(2)} &= nx_1^n, \\
w_n^{(3)} &= n^2 x_1^n, \\
&\vdots \\
w_n^{(m_1)} &= n^{m_1-1} x_1^n, \quad n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Estas sucesións son, evidentemente, linealmente independentes e son solucións porque poden obterse como combinacións lineais das solucións $\{v_n^{(\nu)}\}$. Recíprocamente, as solucións $\{v_n^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, \dots, m_1$, son combinacións lineais das $w_n^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m_1$.

Acabamos de ver que a raíz x_1 induce un conxunto de m_1 solucións linealmente independentes onde m_1 é a multiplicidade de x_1 . Formando a unión dos conxuntos análogos inducidos por todas as raíces distintas de $p_k(x)$, obtemos un conxunto de solucións.

O seguinte resultado garantiza que tal conxunto é un conxunto fundamental de solucións.

Teorema 1.20. *Sexan x_1, \dots, x_l as diferentes raíces do polinomio característico $p_k(x)$, $l \leq k$, e sexa m_i a multiplicidade da raíz x_i . Entón as $k = \sum_{i=1}^l m_i$ sucesións cos elementos:*

$$y_n = x_i^n, y_n = nx_i^n, \dots, y_n = n(n-1) \cdots (n-m_i+2)x_i^n, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1.17)$$

forman un sistema fundamental de solucións da ecuación lineal en diferenzas (1.13) en $n = 0$.

Demostración. O conxunto de sucesións $x_i^n, nx_i^n, n(n-1)x_i^n \dots, n(n-1) \cdots (n-m_i+2)x_i^n$, $i = 1, \dots, l$, será un sistema fundamental en $n = 0$ se e só se o é o conxunto de sucesións

$$x_i^n, nx_i^{n-1}, n(n-1)x_i^{n-2} \dots, n(n-1) \cdots (n-m_i+2)x_i^{n-m_i+1}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (1.18)$$

Para este conxunto,

$$M_0 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_l \end{bmatrix},$$

con $A_j \in \mathcal{M}_{m_j \times k}(\mathbb{C})$, $j = 1, \dots, l$, onde A_j é o seguinte bloque:

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & \cdots & x_j^{m_j-1} & \cdots & x_j^{k-2} & x_j^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x_j & \cdots & (m_j-1)x_j^{m_j-2} & \cdots & (k-2)x_j^{k-3} & (k-1)x_j^{k-2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (m_j-1)(m_j-2)x_j^{m_j-3} & \cdots & (k-2)(k-3)x_j^{k-4} & (k-1)(k-2)x_j^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & (m_j-1)! & \cdots & \cdots & (k-1) \cdots (k-m_j+1)x_j^{k-m_j} \end{bmatrix}.$$

$M_0 \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{C})$.

Consideremos a interpolación de Hermite xeneralizada con puntos x_1, \dots, x_l e enteiros naturais (ordes de derivación) respectivos $m_1 - 1, \dots, m_l - 1$ (ver [1], capítulo 1, teorema 1.2).

Sexa $k = \sum_{i=1}^l m_i$. Denotamos con \mathcal{P}_{k-1} o espacio dos polinomios (con coeficientes complexos) de grado menor ou igual que $k-1$. Dada unha función f definida nun intervalo $[a, b]$ tal que $x_i \in [a, b]$ para todo $i = 1, \dots, l$, e que admite derivadas de orde $m_i - 1$ no punto x_i para cada $i = 1, \dots, l$, existe un único $p_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}$ tal que para todo (i, l) que cumpra $1 \leq i \leq l$, $0 \leq t \leq m_i - 1$ se teña

$$p_{k-1}^{(t)}(x_i) = f^{(t)}(x_i).$$

Se se busca $p_{k-1}(x)$ na forma canónica

$$p_{k-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1},$$

a matriz do sistema lineal que verifican os coeficientes a_j , $j = 0, \dots, k-1$, é precisamente M_0 . Dado que o polinomio de interpolación de Hermite existe e é único, a matriz M_0 é non singular.

Polo tanto, o conxunto de solucións (1.18) é un sistema fundamental en $n = 0$.

□

Exemplo 1.21. Como exemplo, imos determinar en forma pechada a sucesión de números de Fibonacci.

Recordemos que dita sucesión é a solución da ecuación en diferenzas

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (1.19)$$

coas condicións iniciais

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1. \quad (1.20)$$

O polinomio característico da ecuación en diferenzas é $p(x) = x^2 - x - 1$. As raíces deste polinomio son $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Polo tanto, $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ e $\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ son dúas solucións linealmente independentes da ecuación en diferenzas (1.19).

Temos entón que a solución xeral de (1.19) é

$$y_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0, \quad (1.21)$$

onde C_1 e C_2 son constantes complexas arbitrarias.

Aplicando agora as condicións iniciais obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = 1 \end{cases},$$

cuxa solución é $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Polo tanto, a solución á recurrencia (1.19) coas condicións iniciais (1.20) é a sucesión con termo xeral $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $n \geq 0$.

1.3.2. Ecuacións lineais en diferenzas non homoxéneas con coeficientes constantes.

Podemos escribir a solución xeral de (1.11) como $\{u_n + v_n\}$, sendo $\{u_n\}$ a solución xeral da ecuación homoxénea asociada (correspondente a $\gamma_{n+k} = 0$) e $\{v_n\}$ unha solución particular da ecuación non homoxénea.

Resolución de algúns exemplos de ecuacións non homoxéneas.

Exemplo 1.22. Volvendo ao exemplo do problema das *Torres de Hanói* ilustraremos como se resolve unha ecuación lineal non homoxénea.

Recordemos que a ecuación que resolve este problema é

$$y_n = 2y_{n-1} + 1, \quad n \geq 2$$

coa condición inicial

$$y_1 = 1.$$

Como sabemos, temos que atopar a solución xeral da ecuación homoxénea asociada e unha solución particular da ecuación completa.

Comezaremos buscando a solución xeral da ecuación homoxénea:

$$y_n - 2y_{n-1} = 0.$$

A súa ecuación característica é

$$x - 2 = 0,$$

cuxa solución é

$$x = 2.$$

Obtuvemos unha única solución, así que a solución xeral da homoxénea será:

$$y_n^{(h)} = \alpha_1 2^n,$$

sendo α_1 unha constante arbitraria.

Agora calcularemos unha solución particular da ecuación completa.

Temos $y_n - 2y_{n-1} = 1$. Xa que o segundo membro é un polinomio de grado 0, ensaiamos unha solución particular da forma $y_n^{(p)} = c$, onde c é unha constante a determinar. Resulta así $c - 2c = 1$, o cal implica que $c = -1$.

Como a solución xeral da completa é a suma da solución xeral da homoxénea e dunha particular da non homoxénea, temos que

$$y_n = \alpha_1 2^n - 1.$$

Se agora utilizamos a nosa condición inicial $y_1 = 1$, temos que $1 = 2\alpha_1 - 1$, e así, $\alpha_1 = 1$. Polo tanto:

$$y_n = 2^n - 1,$$

sendo esta a solución do problema.

Exemplo 1.23. Veremos agora a resolución da ecuación lineal non homoxénea

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + 1, \quad n \geq 2, \tag{1.22}$$

coas condicións iniciais

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1,$$

que, pola súa forma, nos recorda á recurrencia que satisface a sucesión de números de Fibonacci.

Como ben sabemos, a solución xeral da ecuación en diferenzas é a suma da solución xeral da ecuación homoxénea asociada e dunha solución particular da ecuación non homoxénea.

A ecuación homoxénea asociada á ecuación (1.22) é a ecuación (1.19), cuxa solución xeral está dada por (1.21), como vimos no exemplo 1.21.

Agora calcularemos unha solución particular da ecuación completa.

Temos $y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 1$. Xa que o segundo membro é un polinomio de grado 0, ensaiamos unha solución particular da forma $y_n^{(p)} = c$, onde c é unha constante a determinar. Resulta así $-c = 1$, é dicir, $c = -1$.

Como a solución xeral da completa é a suma da solución xeral da homoxénea e dunha particular da non homoxénea, temos que

$$y_n^{(x)} = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1, \quad n \geq 0,$$

onde C_1 e C_2 son constantes arbitrarias.

Aplicando agora as condicións iniciais obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 - 1 = 1 \end{cases},$$

cuxa solución é $C_1 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$, $C_2 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$.

Polo tanto:

$$y_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1, \quad n \geq 0,$$

sendo esta a solución do problema.

Unha representación dunha solución particular da ecuación non homoxénea.

Podemos atopar unha solución particular da ecuación non homoxénea resolvendo (1.11) cos valores iniciais $v_0 = v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$. Esta solución pódese representar en termos de certas solucións da ecuación homoxénea asociada mediante o chamado *principio de Duhamel discreto*.

Teorema 1.24. *Seja $\{u_n^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, \dots, k$, o conxunto fundamental de solucións da ecuación en diferenzas homoxénea de orde k , (1.13) que satisface as condicións iniciais*

$$u_i^{(\nu)} = \delta_{i\nu}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1.$$

Entón a solución de (1.11) suxeita ás condicións iniciais (1.12) con $n_0 \equiv 0$, vén dada por

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{k-1} v_\nu u_n^{(\nu)} + \frac{1}{\alpha_k} \sum_{l=0}^{n-k} \gamma_{l+k} u_{n-l-1}^{(k-1)}, \quad n \geq 0. \quad (1.23)$$

(Aquí definimos $u_i^{(k-1)} \equiv 0$ para todo $i < 0$ e $\gamma_n \equiv 0$ para todo $n < k$.)

Demostración. A primeira suma en (1.23) satisface as condicións iniciais (1.12) e a ecuación en diferenzas homoxénea (1.13). Polo tanto, só necesitamos mostrar que a segunda suma en

1.3. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENZAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.17

(1.23) satisfice as condicións iniciais homoxéneas e a ecuación en diferenzas non homoxénea (1.11), con $n_0 = 0$. Definamos

$$w_n \equiv \frac{1}{\alpha_k} \sum_{l=0}^{n-k} \gamma_{l+k} u_{n-l-1}^{(k-1)}; \quad n \geq 0. \quad (1.24)$$

Entón temos $w_n = 0$ para $n = 0, 1, \dots, k-1$, recordando que $u_i^{(k-1)} = 0$ para $i \leq k-2$ e $\gamma_n = 0$ para $n < k$. De feito, pola mesma razón, podemos escribir

$$w_n = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_{l+k} u_{n-l-1}^{(k-1)},$$

xa que os termos adicionais son nulos. Entón:

$$L(w_n) = \sum_{s=0}^k \alpha_s w_{n+s} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{s=0}^k \alpha_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_{l+k} u_{n+s-l-1}^{(k-1)} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{s=0}^k \alpha_s \sum_{l=0}^n \gamma_{l+k} u_{n+s-l-1}^{(k-1)},$$

xa que os termos correspondentes a outros valores de l son nulos. Polo tanto,

$$L(w_n) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{l=0}^n \gamma_{l+k} L(u_{n-l-1}^{(k-1)}).$$

Verifícase facilmente que

$$L(u_{n-l-1}^{(k-1)}) = \alpha_k \delta_{nl},$$

e entón finalmente,

$$L(w_n) = \gamma_{n+k}.$$

□

Capítulo 2

Métodos numéricos para EDO: converxencia, consistencia e estabilidade.

Neste segundo capítulo repasaremos algúns métodos básicos coñecidos, definiremos a forma xeral dun método lineal multipaso (MLM) e estudaremos a consistencia, a estabilidade e a converxencia deste.

As referencias usadas neste capítulo son [2], [3] e [4].

2.1. Algúns métodos básicos coñecidos.

Estudaremos a aplicación de métodos lineais multipaso para aproximar a solución, $y(x)$, do problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) &= \eta \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

onde $f(x, y)$ satisface as condicións:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(x, y) \text{ toma valores reais, esta definida e e continua na banda} \\ a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ son finitos.} \end{array} \right. \quad (2.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{b) Existe unha constante } L, \text{ tal que} \\ |f(x, y) - f(x, \hat{y})| \leq L|y - \hat{y}|, \forall y, \hat{y} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a, b]. \end{array} \right. \quad (2.2b)$$

Comezaremos introducindo algúns métodos sinxelos.

Sexan N un enteiro, $N \geq 2$, e $h = \frac{b-a}{N}$. Introducimos os puntos $x = a + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, polo tanto, $x_0 = a$ e $x_N = b$. O número $h > 0$ chámase *lonxitude de paso* ou, simplemente, *paso*, e N é o *número de pasos*.

Intentaremos xerar unha solución numérica y_n , $n = 0, \dots, N$, de forma que se $h > 0$ é suficientemente pequeno, $y_n \simeq y(x_n)$.

En canto a métodos de un paso destacaremos:

▪ **Euler Explícito:**

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \eta + \bar{\eta} \end{aligned} \right\}.$$

▪ **Euler Implícito:**

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \eta + \bar{\eta} \end{aligned} \right\}.$$

▪ **θ -método:**

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\{\theta f(x_n, y_n) + (1 - \theta)f(x_{n+1}, y_{n+1})\}, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \eta + \bar{\eta} \end{aligned} \right\},$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ é un parámetro fixo.

Esta familia inclúe como casos particulares o método de Euler implícito ($\theta = 0$) e o método de Euler explícito ($\theta = 1$).

$\bar{\eta} = \bar{\eta}(h)$ é unha perturbación da condición inicial e usualmente $\bar{\eta}$ valerá 0.

En canto a métodos de dous pasos sinalaremos:

▪ **Regra do punto medio:**

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0, y_1 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\},$$

con y_0, y_1 dados.

2.2. Forma xeral dun método lineal multipaso.

Definición 2.1. A forma xeral dun *método lineal de k pasos* é

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, & n = 0, \dots, N - k, \\ y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.3a) \\ (2.3b) \end{array}$$

onde $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$, k é un número enteiro fixado previamente e α_j e β_j son constantes reais que non dependen de n .

Supoñeremos que $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Debido a esta condición, ao calcular y_{n+k} mediante a ecuación (2.3a), utilízase y_n . Por este motivo, o método é de k pasos.

Dise que o método é lineal porque os valores f_{n+j} , $j = 0, \dots, k$, entran de forma lineal na ecuación (2.3a).

Supoñeremos, sen perda de xeneralidade, que $\alpha_k = 1$, xa que como $\alpha_k \neq 0$, podemos dividir a ecuación (2.3a) entre α_k , obtendo unha ecuación equivalente na que o coeficiente de y_{n+k} é a unidade.

Definición 2.2. Dise que un *método lineal multipaso* é explícito se $\beta_k = 0$ e implícito se $\beta_k \neq 0$.

Nun método lineal multipaso explícito pódese despexar y_{n+k} .

Proposición 2.3. Se $\beta_k \neq 0$, é dicir, o método lineal multipaso é implícito, e $h < \frac{1}{|\beta_k|L}$, onde L é a constante de Lipschitz que aparece en (2.2), entón, dados y_n, \dots, y_{n+k-1} , existe unha única solución $y_{n+k} \in \mathbb{R}$ de (2.3a).

A demostración pode verse en [4], páxina 46.

Notemos que para poñer en marcha un método multipaso con $k > 1$ necesariamente temos que ter k valores de arranque, y_0, \dots, y_{k-1} , que deberán ser calculados a partir de y_0 con un método de un só paso.

2.3. Algúns métodos lineais multipaso coñecidos.

Existen catro familias clásicas de métodos lineais multipaso, que están basadas nun proceso de integración numérica, que son: Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Nyström e Milne-Simpson.

Dado que non figura no obxetivos do TFG, non incluiremos a obtención dos métodos de ditas familias, senón que nos limitaremos a poñer unha pequena lista dos primeiros métodos de cada familia. A obtención dos métodos pode verse en [2].

■ **Métodos de Adams-Bashforth:**

$$k = 1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Por conseguinte, o método de Adams-Bashforth de un paso é o método de Euler explícito.

$$k = 2: \quad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}\{3f_{n+1} - f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 2.$$

$$k = 3: \quad y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}\{23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 3.$$

■ **Métodos de Adams-Moulton:**

$$k = 1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$$k = 1: \quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\{f_{n+1} + f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Nótese que existen dous métodos Adams-Moulton de un paso, o primeiro é o método de Euler Implícito e o segundo a regra do trapecio (o θ -método para $\theta = \frac{1}{2}$).

$$k = 2: \quad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\{5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 2.$$

$$k = 3: \quad y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{24}\{9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 3.$$

■ **Métodos de Nyström:**

$$k = 2: \quad y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 2.$$

Por conseguinte, o método de Nyström de dous pasos é a regra do punto medio.

■ **Métodos de Milne-Simpson:**

$$k = 2: \quad y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}\{f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 2.$$

O método de Milne-Simpson de dous pasos recibe o nome de método de Simpson.

Existe outra familia importante de MLM, os métodos de diferenciación retrógrada.

A súa construción baséase nun proceso de derivación numérica. Véxase [2] ou [4].

De novo, neste caso tamén nos limitaremos a poñer un listado dos primeiros métodos:

$$k = 1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \text{ (Euler Implícito).}$$

$$k = 2: \quad y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 2.$$

$$k = 3: \quad y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 3.$$

2.4. O erro local de truncamento: definición e algúns exemplos.

Antes de dar a definición de erro local de truncamento para un MLM xeral, introduciremos este concepto nalgúns exemplos concretos.

- **Euler Explícito:** Para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, sexa

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_n, y(x_n)),$$

sendo $y = y(x)$ unha solución exacta da EDO $y' = f(x, y)$.

Desta fórmula podemos entender que $\tau_{n+1}(h)$ mide ata que punto a solución exacta verifica o esquema.

Para este método, o erro local de truncamento no punto x_{n+1} , concepto que definiremos a continuación, é $T_{n+1} = h\tau_{n+1}$.

- **Regra do punto medio:** Para $n = 0, 1, \dots, N - 2$, sexa

$$\tau_{n+2}(h) = \frac{y(x_{n+2}) - y(x_n)}{h} - 2f(x_{n+1}, y(x_{n+1})),$$

sendo $y = y(x)$ unha solución exacta da EDO $y' = f(x, y)$.

Para este método, o erro local de truncamento no punto x_{n+2} é $T_{n+2} = h\tau_{n+2}$.

Definición 2.4. O *erro local de truncamento* no punto x_{n+k} para o MLM de k pasos (2.3a) é:

$$T_{n+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})),$$

sendo $y = y(x)$ unha solución exacta da ecuación diferencial (2.1).

Observación 2.5. T_{n+k} depende de n, h e da solución concreta $y = y(x)$, é dicir, $T_{n+k} = T_{n+k}(h; y)$.

Introducimos a notación

$$\tau_{n+k} = \frac{1}{h} T_{n+k}.$$

É evidente que

$$\tau_{n+k} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) - \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})). \quad (2.4)$$

Requeriremos que

$$|\tau_{n+k}(h)| \leq |\tau(h)| \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (2.5)$$

e que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = 0. \quad (2.6)$$

Nótese que as ecuacións (2.5) e (2.6) implican que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau_{n+k}(h) = 0,$$

para todo $n = 0, \dots, N - k$.

As condicións (2.5) e (2.6) implican que a ecuación en diferenzas (2.3a) é unha aproximación da ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

2.5. Consistencia, estabilidade e converxencia dos métodos lineais multipaso.

No estudo das propiedades dos MLM serán de gran utilidade os polinomios

$$\rho(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j,$$

que é o primeiro polinomio característico, e

$$\sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j,$$

que é o segundo polinomio característico.

Definición 2.6. Un MLM da forma (2.3a) é *consistente* se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{k \leq n \leq N} |\tau_n(h)| = 0$$

para toda solución exacta $y = y(x)$ da EDO $y' = f(x, y)$, e para toda $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nas hipóteses (2.2).

Definición 2.7. O MLM é *consistente de orde p* , se p é o maior enteiro ≥ 1 para o cal existe $h_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $0 < h \leq h_0$,

$$\tau(h) \leq Mh^p,$$

onde M só depende das cotas de f e das dun número finito das súas derivadas na banda $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$, a, b finitos.

Proposición 2.8. *Un MLM é consistente, se e só se, se verifican as dúas condicións seguintes:*

$$\begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) - \sigma(1) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Demostración. Se $y \in \mathcal{C}^1([a, b])$, podemos escribir o seguinte:

$$y(x_n + jh) = y(x_n) + jhy'(x_n) + \xi_{n,j}(h), \quad j = 0, \dots, k,$$

$$y'(x_n + jh) = y'(x_n) + \xi_{n,j}^*(h),$$

onde $\max_{0 \leq n \leq N-k} \max_{0 \leq j \leq k} |\xi_{n,j}(h)| = o(h)$ e $\max_{0 \leq n \leq N-k} \max_{0 \leq j \leq k} |\xi_{n,j}^*| = o(1)$.

Tense entón que

$$T_{n+k} = h\tau_{n+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_n + jh) - h \sum_{j=0}^k \beta_j y'(x_n + jh) = C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + o(h),$$

sendo $C_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j$ e $C_1 = \sum_{j=0}^k j\alpha_j - \sum_{j=0}^k \beta_j$, onde o termo $o(h)$ é uniforme en n .

Polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N-k} |\tau_{n+k}| = 0 \Leftrightarrow C_0 = 0 \quad e \quad C_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$$

□

Definición 2.9. O erro puntual en x_n é

$$e_n(h) = y_n(h) - y(x_n).$$

Observación 2.10. Sexan $y_j(h) = \eta_j(h)$, $j = 0, \dots, k-1$, os valores de arranque do MLM. Para $j = 0, \dots, k-1$, tense que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |y_j(h) - y(x_j)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \eta_j(h) = \eta (= y(a)).$$

Xustificamos isto a continuación, comezando pola implicación cara a esquerda:

Dado que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta_j(h) = \eta$, temos que $y_j(h) - \eta$ converxe a 0 cando $h \rightarrow 0^+$ e, ademáis, sabemos que $y_j(h) - \eta = y_j(h) - y(a)$. Como $a + jh = x_j$, podemos escribir o seguinte:

$$y_j(h) - y(a) = y_j(h) - y(x_j) + y(a + jh) - y(a),$$

o cal converxe a 0; como ademáis $\lim_{h \rightarrow 0^+} y(a + jh) - y(a) = 0$, obtemos que

$\lim_{h \rightarrow 0^+} |y_j(h) - y(x_j)| = 0$, quedando esta implicación demostrada. Recíprocamente, partindo de que $\lim_{h \rightarrow 0^+} |y_j(h) - y(x_j)| = 0$, cúmprese que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \eta_j(h) = \eta$.

Definición 2.11. O MLM (2.3) é *converxente*, se para calquera función $f(x, y)$ nas hipóteses (2.2), baixo a hipótese de que $\lim_{h \rightarrow 0^+} (y_j(h) - y(x_j)) = 0$, $j = 0, \dots, k-1$, se ten que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |e_n(h)| = 0$.

Se o MLM (2.3) é converxente, debe suceder que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n(h)| = 0. \quad (2.8)$$

En certo sentido, é unha converxencia 'uniforme', xa que o máximo do valor absoluto dos erros puntuais tende a 0.

Observación 2.12. A converxencia implica que para todo $x \in [a, b]$,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ nh = x - a}} y_n(h) = y(x). \quad (2.9)$$

Xustificaremos isto a continuación.

Como o método é converxente,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| = 0.$$

Sexa $x \in [a, b]$, vexamos que se verifica (2.9).

Se $h > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ tal que $nh = x - a$, temos que

$$0 \leq |y_n(h) - y(x)| = |y_n(h) - y(x_n)| \leq \max_{0 \leq l \leq N} |y_l - y(x_l)|.$$

Sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq l \leq N} |y_l(h) - y(x_l)| = 0$, así que, pola coñecida propiedade do sándwich, concluímos que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ nh = x - a}} y_n(h) = y(x).$$

(2.9) é un converxencia de tipo puntual, así pois, a converxencia uniforme (2.8) implica a converxencia puntual (2.9).

No seguinte capítulo, faremos uso da seguinte proposición.

Proposición 2.13. *Supóñase $a = 0$. Se o método MLM é converxente, entón para todo $c \in (0, b]$ tense que*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} y_{[\frac{c}{h}]}(h) = y(c). \quad (2.10)$$

Demostración. Nótese que, a diferenza da observación 2.12., $[\frac{c}{h}]h$ non necesariamente é igual a c . Agora ben, podemos efectuar a descomposición

$$y(c) - y_{[\frac{c}{h}]}(h) = [y(c) - y([\frac{c}{h}]h)] + [y([\frac{c}{h}]h) - y_{[\frac{c}{h}]}(h)]. \quad (2.11)$$

2.5. CONSISTENCIA, ESTABILIDADE E CONVERXENCIA DOS MÉTODOS LINEAIS MULTIPASO.27

Tense que $\frac{c}{h} - 1 \leq [\frac{c}{h}] \leq \frac{c}{h}$, polo tanto, $c - h \leq [\frac{c}{h}]h \leq c$, e como a función y é continua en c ,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [y(c) - y([\frac{c}{h}]h)] = 0. \quad (2.12)$$

Por outra parte, $0 \leq |y([\frac{c}{h}]h) - y_{[\frac{c}{h}]}(h)| \leq \max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n(h)|$, e en virtude de (2.8),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [y([\frac{c}{h}]h) - y_{[\frac{c}{h}]}(h)] = 0,$$

o que, xunto con (2.11) e (2.12), implica (2.10). \square

Definición 2.14. O MLM (2.3a) ten orde de converxencia p , $p \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$, se

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| \leq M_p h^p,$$

onde $M_p > 0$ é unha constante.

Como paso previo á introdución do concepto de estabilidade, introducimos o esquema perturbado do MLM (2.3) como sigue: dada unha perturbación $(\delta_0, \dots, \delta_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, atopar $(z_0, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tal que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, z_{n+j}) + h \delta_{n+k}, & n = 0, \dots, N - k \\ z_j = y_j + \delta_j, & j = 0, \dots, k - 1. \end{cases} \quad (2.13a)$$

$$(2.13b)$$

Observación 2.15. Os δ_l , $l = 0, \dots, k - 1$, perturban os valores de arranque, mentras que os δ_l , $l = k, \dots, N$, perturban o esquema MLM propiamente dito.

Proposición 2.16. *Sexa $\alpha_k = 1$ e $h > 0$ tal que $h|\beta_k|L < 1$, onde L é unha constante de Lipschitz de f respecto de y , entón existe unha única solución z_{n+k} do esquema perturbado (2.13).*

A demostración é análoga á da Proposición 2.3.

Dada outra perturbación $(\delta_0^*, \dots, \delta_N^*) \in \mathbb{R}^{N+1}$, denotamos con (z_0^*, \dots, z_N^*) a solución do esquema perturbado correspondente.

Definición 2.17. O MLM (2.3) é estable se para toda f nas hipóteses (2.2), existen $h_0 > 0$ e $K > 0$ constantes independentes de h , tales que para todo $h \in (0, h_0]$ e $N = N(h) = [\frac{b-a}{h}]$, se cumpre a estimación

$$\max_{0 \leq n \leq N} |z_n - z_n^*| \leq K \max_{0 \leq n \leq N} |\delta_n - \delta_n^*|$$

para todo $(\delta_0, \dots, \delta_N), (\delta_0^*, \dots, \delta_N^*) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Teorema 2.18. *Se o MLM é estable e consistente, entón é converxente.*

Demostración. Supoñamos que os valores de arranque satisfacen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |y(x_j) - y_j(h)| = 0, \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (2.14)$$

A solución numérica é a solución de (2.3), que pode verse coma un esquema perturbado con perturbacións nulas, é dicir, $\delta_n = 0$, $n = 0, \dots, N$.

Introducimos $\tau_j = y(x_j) - y_j$, $j = 0, \dots, k-1$.

Tendo en conta (2.4), resulta que a solución exacta $y = y(x)$ é a solución dun esquema perturbado con perturbacións τ_n :

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) = \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) + \tau_{n+k}, & n = 0, \dots, N-k, \\ y(x_j) = y_j + \tau_j, & \tau = 0, \dots, k-1. \end{cases}$$

En virtude da estabilidade, existen $h_0 > 0$ e $K > 0$ constantes tales que para todo $h \in (0, h_0]$ e $N = N(h) = \lceil \frac{b-a}{h} \rceil$,

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| \leq K \max_{0 \leq n \leq N} |\tau_n| = \max(\max_{0 \leq j \leq k-1} |\tau_j|, \max_{k \leq n \leq N} |\tau_n|). \quad (2.15)$$

Ademáis, $\lim_{h \rightarrow 0^+} (\max_{0 \leq j \leq k-1} |\tau_j|) = 0$ por (2.14), e pola consistencia, $\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{k \leq n \leq N} |\tau_n|) = 0$. Por conseguinte, tense que $\lim_{h \rightarrow 0^+} (\max_{0 \leq l \leq N} |y(x_n) - y_n|) = 0$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.19. *Se un MLM é estable, ten orde p de consistencia e se verifica que $|y(x_j) - y_j(h)| = O(h^p)$, $j = 0, \dots, k-1$, entón o MLM ten orde p de converxencia.*

Este resultado é consecuencia directa das desigualdades (2.15) e (2.5) e das definicións 2.7 e 2.14.

Capítulo 3

Aplicación das ecuacións en diferenzas ao estudo dos métodos lineais multipaso.

Neste último capítulo estudaremos os métodos lineais multipaso aplicando os resultados tratados no primeiro capítulo, relativo ás ecuacións lineais en diferenzas. Utilizaremos constantemente *a condición da raíz*, que agora definiremos. Tamén veremos a aplicación destes resultados a algúns métodos clásicos.

As referencias usadas neste capítulo son [2], [3] e [4].

3.1. Converxencia e estabilidade dos MLM e a condición da raíz.

Definición 3.1. Diremos que o MLM (2.3) satisface *a condición da raíz* se todas as raíces do primeiro polinomio característico $\rho(r)$ teñen módulo menor ou igual que 1 e aquelas de módulo 1 son simples.

O seguinte resultado é o Teorema 1 da sección 5 do capítulo 8 de [3].

Teorema 3.2. *Se o MLM (2.3) é converxente, entón satisface a condición da raíz.*

Demostración. Veremos por contradición que a condición da raíz é necesaria.

Supoñamos en primeiro lugar que $\rho(r)$ ten unha raíz real ξ_l tal que $|\xi_l| > 1$. Consideramos

$$y_n = y_n(h) = h\xi_l^n, \quad n \geq 0. \quad (3.1)$$

A sucesión y_n satisface a ecuación en diferenzas

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0, \quad n = 0, \dots, N - k, \quad (3.2)$$

con valores de arranque

$$y_j(h) = h \xi_l^j, \quad j = 0, \dots, k - 1,$$

polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_j(h) = 0, \quad j = 0, \dots, k - 1. \quad (3.3)$$

Interpretamos (3.2) e (3.3) como un esquema MLM para o PVI

$$\begin{cases} y' = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$(3.4b)$$

cuxa solución trivial é $y \equiv 0$.

Como o método é converxente, debe suceder (2.8), o que implica (2.10), é dicir, que para todo $c \in (0, b]$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |y_{[\frac{c}{h}]}(h)| = 0. \quad (3.5)$$

Por outra parte, (3.1) implica que

$$|y_{[\frac{c}{h}]}(h)| = h |\xi_l|^{[\frac{c}{h}]} \geq h |\xi_l|^{\frac{c}{h} - 1} \rightarrow_{h \rightarrow 0} \infty, \quad (3.6)$$

pois $|\xi_l| > 1$ e $[\frac{c}{h}] \geq \frac{c}{h} - 1$, pero (3.6) contradice (3.5), logo o polinomio ρ non pode ter unha raíz real ξ_l tal que $|\xi_l| > 1$.

Supoñamos agora que $\rho(r)$ ten unha raíz $\xi_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tal que $|\xi_l| > 1$; como os coeficientes de $\rho(r)$ son reais, $\bar{\xi}_l$ tamén é raíz de $\rho(r)$.

Tomemos a sucesión $y_n = y_n(h)$ dada por (3.1). Como $\xi_l \notin \mathbb{R}$, en xeral temos que $y_n(h) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En particular, os valores de arranque

$$y_j(h), \quad j = 0, \dots, k - 1,$$

poden non ser reais.

Dado que ao definir os MLM e o concepto de converxencia nos restrinximos ao caso real, traballaremos con $Re(y_n)$ e $Im(y_n)$.

y_n satisface (3.2), logo $Re(y_n)$ satisface (3.2) con valores de arranque

$$Re(y_j(h)) = h Re(\xi_l^j) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0, \quad j = 0, \dots, k - 1.$$

3.1. CONVERXENCIA E ESTABILIDADE DOS MLM E A CONDICIÓN DA RAÍZ.31

Podemos ver $Re(y_n)$ como a solución dun esquema para o PVI (3.4) (concretamente, o que resulta ao aplicar o MLM (2.3) con valores de arranque $Re(y_j)$, $j = 0, \dots, k-1$).

Como o método é converxente, ocorre que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |Re(y_n(h)) - 0| = 0.$$

Aplicamos agora o mesmo argumento para a parte imaxinaria $Im(y_n)$, polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |Im(y_n(h))| = 0.$$

De todo esto, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n(h)| = 0$$

e entón

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ n = \lfloor \frac{c}{h} \rfloor}} y_n(h) = 0.$$

Por outra parte, $|y_{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor}(h)| = h|\xi_l|^{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor}$. Por un razonamento análogo ao do caso anterior,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h|\xi_l|^{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor} = \infty,$$

logo o polinomio $\rho(r)$ non pode ter raíces complexas ξ_l tales que $|\xi_l| > 1$.

Como terceiro caso, supoñamos que $\rho(r)$ ten unha raíz $\xi_l \in \mathbb{R}$ tal que $|\xi_l| = 1$ de multiplicidade maior que 1.

Consideramos

$$y_n = hn\xi_l^n, \quad n = 0, \dots, N. \quad (3.7)$$

Como ξ_l é unha raíz con multiplicidade maior ou igual que dous de $\rho(r)$, entón y_n é solución da ecuación en diferenzas (3.2), con valores de arranque

$$y_j = hj\xi_l^j, \quad j = 0, \dots, k-1,$$

e, polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_j(h) = 0, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Interpretamos y_n como a solución dun esquema para o PVI (3.4).

Como o método é converxente,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n = \lfloor \frac{c}{h} \rfloor}} y_n(h) = 0.$$

Por outra parte, $y_n(h) = nh\xi_l^n$ e dado que $|\xi_l| = 1$, $|y_{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor}(h)| = h\lfloor \frac{c}{h} \rfloor \rightarrow_{h \rightarrow 0^+} c \neq 0$.

Estes dous resultados forman unha contradición, polo que $\rho(r)$ non pode ter unha raíz real múltiple de módulo 1.

Como cuarto e último caso, supoñamos que $\rho(r)$ ten unha raíz $\xi_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tal que $|\xi_l| = 1$ de multiplicidade maior que 1.

Tomemos $y_n = y_n(h)$ dada por (3.7). Ao igual que no segundo caso, os elementos $y_n(h)$ e, en particular, os valores de arranque, poden non ser reais.

Como ξ_l é unha raíz de multiplicidade maior ou igual que dous de $\rho(r)$, entón y_n é solución da ecuación en diferenzas (3.2), con valores de arranque

$$y_j = h^j \xi_l^j, \quad j = 0, \dots, k-1$$

e, polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_j(h) = 0, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Como no segundo caso, traballaremos con $Re(y_n)$ e $Im(y_n)$.

y_n satisface (3.2), logo $Re(y_n)$ satisface (3.2) con valores de arranque

$$Re(y_j(h)) = h^j Re(\xi_l^j) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Podemos ver $Re(y_n)$ como a solución dun esquema para o PVI (3.4).

Como o método é converxente, ocorre que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |Re(y_n(h)) - 0| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} hn |Re(\xi_l^n)| = 0.$$

Aplicamos agora o mesmo argumento para a parte imaxinaria $Im(y_n)$, polo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |Im(y_n(h))| = 0.$$

De todo isto, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N} |y_n(h)| = 0$$

e entón

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ n = \lfloor \frac{c}{h} \rfloor}} y_n(h) = 0.$$

Por outra parte, $|y_{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor}(h)| = h^{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor} |\xi_l|^{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor} = h^{\lfloor \frac{c}{h} \rfloor} \rightarrow_{h \rightarrow 0^+} c \neq 0$, logo ρ non pode ter raíces complexas múltiples de módulo 1. Como non pode darse ningún dos catro casos anteriores, a condición da raíz é unha condición necesaria para a converxencia. \square

O seguinte resultado é o teorema 2 da sección 5 do capítulo 8 de [3].

3.1. CONVERXENCIA E ESTABILIDADE DOS MLM E A CONDICIÓN DA RAÍZ.33

Teorema 3.3. *Se o MLM (2.3) é estable, entón satisface a condición da raíz.*

Demostración. Introducimos os esquemas

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0, & n = 0, \dots, N - k \\ y_j = \delta_j, & j = 0, \dots, N - k \end{cases} \quad (3.8a)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j}^* = 0, & n = 0, \dots, N - k \\ y_j^* = 0, & j = 0, \dots, N - k \end{cases} \quad (3.8b)$$

que son esquemas perturbados do MLM (2.3) aplicado ao PVI (3.4).

No segundo esquema, as perturbacións son todas nulas, é dicir, $\delta_n^* = 0$ para todo $n = 0, \dots, N$. A solución correspondente é $y_n^* = 0$.

No primeiro esquema, as perturbacións $\delta_n = 0$ para $n = k, k + 1, \dots, N$.

Por ser o esquema estable por hipótese, existen $h_0 > 0$ suficientemente pequeno e $K > 0$ constantes tales que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y_n^*| \leq K \max_{0 \leq n \leq N} |\delta_n - \delta_n^*| = K \max\left(\max_{0 \leq j \leq k-1} |\delta_j - \delta_j^*|, \max_{k \leq n \leq N} |\delta_n - \delta_n^*|\right).$$

Entón,

$$\max_{\substack{0 \leq n \leq N(h) \\ N(h) = \lceil \frac{b-a}{h} \rceil}} |y_n| \leq K \max_{0 \leq j \leq k-1} |y_j|. \quad (3.10)$$

Supoñamos que ξ_l é unha raíz real de $\rho(r)$ tal que o seu módulo é maior que un.

Tomamos

$$y_n = \delta \xi_l^n, \quad n = 0, \dots, N,$$

onde $\delta > 0$. Por tanto, os valores de arranque son

$$y_j = \delta \xi_l^j, \quad j = 0, \dots, k - 1.$$

(3.10) implica que

$$\max_{0 \leq n \leq N(h)} |y_n| \leq K \delta |\xi_l^{k-1}| = C \delta \quad \forall h \in (0, h_0), \quad (3.11)$$

con C unha constante.

Ademáis

$$N(h) = \left\lceil \frac{b-a}{h} \right\rceil \rightarrow_{h \rightarrow 0^+} \infty. \quad (3.12)$$

De (3.11) e (3.12) e dado que y_n é independente de h , deducimos que

$$\max_{n \geq 0} |y_n| \leq C\delta,$$

é dicir, que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ é unha sucesión acotada.

Por outra parte, como $|\xi_l| > 1$ e $\delta > 0$, a sucesión $y_n = \delta \xi_l^n$, $n = 0, \dots, N$, non está acotada e acabamos de chegar a unha contradición.

De esto concluimos que non podemos ter estabilidade se o primeiro polinomio característico ten unha raíz real con módulo maior que 1.

Supoñamos que ξ_l é unha raíz complexa de $\rho(r)$ tal que o seu módulo é maior que un.

Tomamos

$$y_n = \delta \xi_l^n, \quad n = 0, \dots, N,$$

onde $\delta > 0$. Consideramos

$$y_{n,1} = \operatorname{Re}(\delta \xi_l^n).$$

Por tanto, os valores de arranque son

$$y_{j,1} = \operatorname{Re}(\delta \xi_l^j), \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Seguindo un proceso similar ao do caso anterior, chegamos a que a sucesión $\{y_{n,1}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Análogamente, a sucesión

$$y_{n,2} = \operatorname{Im}(\delta \xi_l^n)$$

ten valores de arranque

$$y_{j,2} = \operatorname{Im}(\delta \xi_l^j), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

e temos que $\{y_{n,2}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

De todo isto, concluimos que $y_n = \delta \xi_l^n$ está acotada, pero como $|\xi_l| > 1$ e $\delta > 0$, y_n non está acotada, polo que é unha contradición.

De isto concluimos que non podemos ter estabilidade se o primeiro polinomio característico ten unha raíz complexa con módulo maior que 1.

Supoñamos que ξ_l é unha raíz real múltiple de $\rho(r)$ tal que o seu módulo é un.

Tomamos

$$y_n = \delta n \xi_l^n, \quad n = 0, \dots, N,$$

onde $\delta > 0$. Polo tanto, os valores de arranque son

$$y_j = \delta j \xi_l^j, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

3.1. CONVERXENCIA E ESTABILIDADE DOS MLM E A CONDICIÓN DA RAÍZ.35

Entón temos (3.10) e por un proceso análogo ao do primeiro caso, chegamos a que a sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Agora ben, $|y_n| = \delta n |\xi_l|^n = \delta n$, pois o módulo da raíz é 1 por hipótese, e isto tende a ∞ cando n tende a ∞ , co cal chegamos de novo a unha contradición por supoñer que podemos ter estabilidade se o primeiro polinomio característico ten unha raíz real múltiple con módulo un.

Como último caso, supoñamos que ξ_l é unha raíz complexa múltiple de $\rho(r)$ tal que o seu módulo é un.

Tomamos

$$y_n = \delta n \xi_l^n, \quad n = 0, \dots, N,$$

onde $\delta > 0$.

Consideramos

$$y_{n,1} = \operatorname{Re}(\delta n \xi_l^n).$$

Polo tanto, os valores de arranque son

$$y_{j,1} = \operatorname{Re}(\delta j \xi_l^j), \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Seguindo un proceso similar ao dos casos anteriores, chegamos a que a sucesión $\{y_{n,1}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Análogamente, a sucesión

$$y_{n,2} = \operatorname{Im}(\delta n \xi_l^n)$$

ten valores de arranque

$$y_{j,2} = \operatorname{Im}(\delta j \xi_l^j), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

e temos que $\{y_{n,2}\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Concluimos así, que a sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Agora ben, $y_n = n \delta \xi_l^n$, así que $|y_n| = n \delta$, xa que o módulo da raíz é 1 por hipótese, pero $|y_n| = n \delta$ tende a ∞ cando n tende a ∞ , co cal chegamos de novo a unha contradición por supoñer que podemos ter estabilidade se o primeiro polinomio característico ten unha raíz complexa múltiple con módulo un.

Concluimos que a condición da raíz é unha condición necesaria para a estabilidade.

□

O seguinte resultado é o teorema 4 da sección 5 do capítulo 8 de [3], o cal non demostraremos.

Teorema 3.4. *Se o MLM (2.13) satisfice a condición da raíz, entón é estable.*

Observación 3.5. Como consecuencia dos teoremas 3.3. e 3.4., o MLM (2.13) é estable se e só se satisfice a condición da raíz.

Como introduce ([2]) na páxina 221 do capítulo 5, dado un Método Lineal Multipaso da forma (2.3) pódese definir o *operador en diferenzas asociado* como

$$L[y(x); h] = \alpha_k y(x + kh) + \dots + \alpha_0 y(x) - h[\beta_k y'(x + kh) + \dots + \beta_0 y'(x)], \quad (3.13)$$

que pode ser considerado como un operador lineal que actúa sobre calquera función diferenciable $y(x)$.

Este operador pode expresarse da forma

$$L[y(x); h] = C_0 y(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots, \quad (3.14)$$

onde os coeficientes C_q , $q = 0, 1, \dots$, son constantes que non dependen da elección da función $y(x)$:

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k & (3.15a) \\ C_1 = \alpha_1 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k) & (3.15b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + \dots + k^q \alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + \dots + k^{q-1} \beta_k), \quad q = 2, 3, \dots & (3.15c) \end{cases}$$

Un operador diferencial da forma (3.13) dise de orde p se $C_0 = \dots = C_p = 0$, pero $C_{p+1} \neq 0$.

Proposición 3.6. *A converxencia do MLM implica que se cumpra a condición de consistencia (2.7) do mesmo.*

Demostración. Imos demostrar que unha condición necesaria para a converxencia é que a orde do operador diferencial asociado sexa polo menos 1, que é a condición de consistencia. En termos das constantes C_i definidas en (3.15), a condición é equivalente a que $C_0 = 0, C_1 = 0$, ou o que é o mesmo, que se cumpran as condicións de que $\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1)$. Comezaremos mostrando que $C_0 = 0$. Se o método é converxente, é converxente para o PVI $y' = 0, y(0) = 1$, coa solución exacta $y(x) = 1$. A ecuación en diferenzas (2.3) agora é da forma

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0. \quad (3.16)$$

Supoñendo que o método é converxente e que os valores iniciais $y_\mu = 1$ ($\mu = 0, 1, \dots, k-1$), a solución y_n de (3.16) debe satisfacer que $y_n \rightarrow_{h \rightarrow 0} 1$, $nh = x$. Xa que neste caso y_n non depende de h , isto é o mesmo que dicir que $y_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$. Tomando $n, n \rightarrow \infty$ en (3.16),

3.1. CONVERXENCIA E ESTABILIDADE DOS MLM E A CONDICIÓN DA RAÍZ.37

obtemos $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, e isto é equivalente a que $C_0 = 0$. De isto, séguese que se cumpre que a orde do operador diferencial asociado é maior ou igual que 0.

Para demostrar que $C_1 = 0$, consideraremos o PVI $y' = 1$, $y(0) = 0$, con solución exacta $y(x) = x$. Agora a ecuación (2.3) redúcese a

$$\alpha_k y_{n+k} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k + \dots + \beta_0). \quad (3.17)$$

Para un método converxente, toda solución de (3.17) que satisface que $\lim_{h \rightarrow 0} y_\mu(h) = 0$, $\mu = 0, \dots, k-1$, debe satisfacer tamén que

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = x \quad (x_n = x). \quad (3.18)$$

Ademáis, para un método converxente, podemos supoñer que $k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + \alpha_1 = \rho'(1) \neq 0$, polo Teorema 3.2. Sexa y_n a sucesión definida mediante $y_n = nhK$, onde

$$K = \frac{\beta_k + \beta_{k-1} + \dots + \beta_0}{k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + \alpha_1}.$$

Esta sucesión cumpre que $\lim_{h \rightarrow 0} y_\mu(h) = 0$, $\mu = 0, \dots, k-1$, e é unha solución de (3.17). Xa que $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=x}} nhK = xK$, podemos concluir que $K = 1$ e isto é equivalente a que $C_1 = 0$, quedando así este teorema demostrado. \square

Observación 3.7. Dos Teoremas 2.18., 3.2., 3.3., 3.4. e da Proposición 3.6., podemos concluir entón que para un MLM, a estabilidade e a consistencia equivalen á converxencia do mesmo.

Para pechar este capítulo e concluir a memoria, mostraremos algúns exemplos sinxelos aos que aplica esta teoría.

Facendo referencia aos métodos de Adams-Bashforth vistos no capítulo 2, veremos que o método de Euler Explícito é un método estable e consistente, e por conseguinte, converxente.

Recordemos a súa forma, que é

$$y_{n+1} - y_n = hf_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

O seu primeiro polinomio característico é $\rho(r) = r - 1$ e a única raíz do polinomio é $r = 1$, que é unha raíz de módulo 1 simple, así que se cumpre a condición da raíz. Polo tanto, polo Teorema 3.4., o método é estable. Ademáis, o segundo polinomio característico é $\sigma(r) = 1$ e cúmprese que $\rho'(1) = \sigma(1)$, $\rho(1) = 0$, logo pola proposición 2.8., o método é consistente. Pola observación 3.7. podemos dicir que o método é converxente.

Seguindo cos métodos de Adams-Bashforth, veremos que o método de $k = 2$ pasos é un método estable e consistente, e por conseguinte, converxente. Recordemos a súa forma, que é

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

O seu primeiro polinomio característico é $\rho(r) = r^2 - r$ cuxas raíces son $r = 1$ e $r = 0$, que son raíces simples de módulo menor ou igual que 1, así que se cumpre a condición da raíz. Por conseguinte, en virtude do Teorema 3.4., este método é estable. Ademais, o segundo polinomio característico é $\sigma(r) = \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}$ e cúmprese que $\rho'(1) = \sigma(1)$, $\rho(1) = 0$, logo pola proposición 2.8., o método é consistente. Pola observación 3.7. podemos dicir que o método é converxente.

O método de Adams-Bashforth de k pasos ten como primeiro polinomio característico $\rho(r) = r^k - r^{k-1}$, cuxas raíces son $r = 1$ e $r = 0$ con multiplicidade $k - 1$, logo de novo, cúmprese a condición da raíz. Aplicando o Teorema 3.4., deducimos que o método é estable.

Para rematar o capítulo e conseguintemente a memoria, faremos referencia ao método de Nystrom visto no capítulo 2 para $k = 2$ e veremos que o método é un método estable, xa que se cumpre a condición da raíz.

Recordemos a súa forma, que é

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

O seu primeiro polinomio característico é $\rho(r) = r^2 - 1$; as súas raíces son $r = 1, r = -1$, que son raíces de módulo 1 simples, así que se cumpre a condición da raíz. Polo tanto, en virtude do Teorema 3.4., o método é estable.

Bibliografía

- [1] Crouzeix, M. - Mignot, A.L. (1992). Analyse numérique des équations différentielles.
- [2] Henrici, P. (1962). Discrete variable methods in ordinary differential equations. John Wiley and Sons.
- [3] Isaacson, E. - Keller, H.B. (1994). Analysis of Numerical Methods. Dover.
- [4] Lambert, J.D. (1991). Numerical methods for ordinary differential systems. John Wiley and Sons.