



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ecuacións das augas pouco profundas: solucións analíticas e numéricas

Martín García Cebeiro

2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ecuacións das augas pouco profundas: solucións analíticas e numéricas

Martín García Cebeiro

Xullo, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Ecuacións das augas pouco profundas: solucións analíticas e numéricas
Breve descripción do contido
O obxectivo do TFG é por unha parte que o estudante analice algunhas das solucións analíticas coñecidas das ecuacións das augas pouco profundas tanto estacionarias como evolutivas e que, coa metodoloxía do método de volumes finitos aplicada a estas ecuacións, en códigos realizados polo alumno, implemente as condicións iniciais e de contorno que requiren as solucións estudadas e valide os resultados numéricos obtidos con ditas solucións.
Recomendacións
Outras observacións


Índice

Resumo	IX
Introdución	XI
1. As ecuacións das augas pouco profundas	1
1.1. Principios de conservación	1
1.1.1. Principio de conservación da masa	2
1.1.2. Principio de conservación do momento	3
1.1.3. Ecuacións de Navier-Stokes	5
1.2. Ecuacións das augas pouco profundas	6
1.2.1. Simplificacións adicionais	12
1.2.1.1. Ecuacións separadas	12
1.2.1.2. Caso unidimensional	12
1.2.1.3. Ecuacións linearizadas	16
1.3. Sistemas hiperbólicos de leis de conservación	17
1.3.1. Carácter hiperbólico das ecuacións das augas pouco profundas	19
2. Algunhas solucións analíticas	25
2.1. Método das características	25
2.2. Resolución de sistemas hiperbólicos lineares 1D	28
2.2.1. Ecuación do transporte escalar	28


2.2.2.	Sistemas lineares	30
2.2.3.	Sistemas lineares con termos fonte	31
2.2.4.	Aplicación ás ecuacións das augas pouco profundas linearizadas	33
2.3.	O problema de Riemann	34
2.3.1.	Solucións débiles de sistemas hiperbólicos	35
2.3.2.	Propagación de ondas	36
2.3.2.1.	Ondas de rarefacción	38
2.3.2.2.	Ondas de choque	40
2.3.2.3.	Ondas de corte	41
2.3.3.	Solución na rexión estrela	42
2.3.4.	O problema da rotura de presa	44
3.	Métodos numéricos para a resolución de sistemas hiperbólicos	45
3.1.	Método de volumes finitos	45
3.1.1.	Método de Godunov	48
3.1.2.	Esquema de Roe	49
3.1.3.	Esquemas de tipo Rusanov	50
4.	Resultados numéricos e conclusións	53
4.1.	Aproximación do problema de Riemann	53
4.2.	Conclusións finais	58
A.	Mecánica dos medios continuos	61
A.1.	Definicións e notacións	61
A.1.1.	Movemento dun corpo	61
A.1.2.	Magnitudes e fluxos	65
B.	Códigos Matlab	69

B.1. Solución exacta do problema de Riemann	69
B.2. Volumes finitos	73
B.3. Análise de converxencia	84
Bibliografía	87

Resumo

As ecuacións das augas pouco profundas teñen unha importante presenza en hidráulica e nas ciencias medioambientais. Ter un modelo matemático sinxelo que describa a realidade con precisión trae consigo grandes beneficios. Seguindo esta motivación, este traballo está dedicado a introducir as ecuacións das augas pouco profundas e á súa resolución, abordada tanto dende o punto de vista analítico coma numérico. Comézase estudando as propiedades matemáticas do correspondente sistema de leis de conservación hiperbólicas para despois obter algunhas solucións particulares e finalmente abordar o deseño e validación de métodos numéricos para a súa resolución. O código Matlab  desenvolto está baseado en esquemas de volumes finitos de primeira orde e permite resolver de modo aproximado o problema de Riemann clásico.

Abstract

Shallow water equations are of notable relevance in hydraulics and environmental sciences. Having access to a simple mathematical model capable of describing reality with precision comes with substantial benefits. Following this motivation, this work is targeted at introducing the shallow water equations and together with their analytical and numeric solutions. We begin studying the mathematical properties of the corresponding system of hyperbolic conservation laws, so that we can next obtain some particular solutions and finally approach the design and validation of numerical methods for solving the equations. The Matlab  code developed is based in finite volume schemes of first order and allows the approximate solution of the classic Riemann problem.

Introdución

As *ecuacións das augas pouco profundas*, *shallow water equations* (SWE) en inglés, ou *ecuacións de Saint-Venant* son un conxunto de ecuacións en derivadas parciais (EDP) que describen o movemento da auga baixo a interacción da gravidade dunha superficie libre líquida sobre un fondo sólido variable no espazo.

Para estudar o mundo que nos rodea, empregamos modelos matemáticos que sexan capaces de describir a realidade, mais a cantidade de fenómenos que acontecen a cada momento fan que sexa imposible describirla con completa exactitude. Por sorte, moitos destes fenómenos só teñen un efecto minúsculo no cotián, o cal permite a creación de modelos que non sexan inabarcables e permanezan altamente precisos.

Unha das áreas máis salientables da matemática aplicada e da física é a mecánica de fluídos, algo que non debería sorprendernos, debido á súa presenza na natureza e o alcance tecnolóxico que trae consigo o seu coñecemento e manipulación. As ecuacións das augas pouco profundas caen dentro desta área, como modelo de gran relevancia no estudo oceanográfico e no estudo de canles, presas e ríos.

Ao comezo deste traballo, introducíranse os principios físicos de conservación usados para obter a ecuación do movemento dun corpo, e deducíranse as famosas ecuacións de Navier-Stokes para fluídos Newtonianos incompresibles, a partir das cales se derivarán as ecuacións das augas pouco profundas. Estas obtéranse integrando na dirección vertical, baixo o suposto de que o dominio espacial horizontal é moito maior á altura do fluído e considerando a hipótese de presión hidrostática, polo que a aceleración vertical poderá desprezarse e resultará na redución dimensional do problema. Rematarase o primeiro capítulo incluíndo outros modelos simplificados e expoñendo o carácter hiperbólico destas ecuacións.

No segundo capítulo afondarase máis na teoría matemática en relación aos sistemas hiperbólicos, o cal permitirá a construción de solucións analíticas para certos problemas de valor inicial. Presentarase o método das características e ilustrarase a súa relevancia resolvendo sistemas hiperbólicos lineares, para despois chegar á solución do problema de Riemann clásico para as SWE con fondo húmido. Para isto último fará falta formalizar o concepto de solución débil e discutir

brevemente a formación e propagación de ondas e a relevancia física das solucións.

En xeral, resolver un sistema de ecuacións en derivadas parciais de forma exacta resulta unha ardua tarefa, ou mesmo imposible, e as ecuacións das augas pouco profundas non son unha excepción. É por iso que no capítulo 3 introducíranse os métodos de volumes finitos, amplamente empregados na resolución de sistemas hiperbólicos de leis de conservación. Estes métodos xurdirán da forma integral das leis de conservación, discretizándose o espazo en celas, nas que se fará a evolución temporal do valor medio da solución a través do fluxo numérico que se produce a través das fronteiras. Este fluxo xorde de modo natural na presenza de problemas de Riemann locais, para os cales a solución exacta ou aproximada, de forma axeitada, darán lugar a diferentes esquemas numéricos conservativos.

O último capítulo está dedicado á validación dos métodos numéricos presentados no capítulo 3 a través de solucións particulares obtidas no capítulo 2. Se ben só se inclúen métodos de orde un nunha dimensión espacial, supón unha cimentación sobre a que traballar de cara a implementación de métodos de maior orde e máis completos.

Capítulo 1

As ecuacións das augas pouco profundas

Este capítulo estará dedicado á dedución das ecuacións das augas pouco profundas (SWE), para o cal será necesario expoñer as principais leis de conservación físicas que describen o movemento dun corpo, baseadas na mecánica dos medios continuos, resumida no anexo A. Seguiranse os contidos e notacións do libro de Bermúdez [1].

Unha vez sentada esta base, obteranse as ecuacións de Navier-Stokes, que describen o movemento dun fluído viscoso newtoniano incompresible.

Finalmente, teremos todas as ferramentas para a construción das ecuacións das augas pouco profundas, incluíndo casos simplificados cos que traballaremos no seguinte capítulo, apoiándonos de [2].

1.1. Principios de conservación

Ao longo deste capítulo suponse que o lector está familiarizado cos conceptos e notacións introducidos no anexo A en relación á mecánica dos medios continuos, en particular aqueles ligados ao movemento dun corpo e ao fluxo de magnitudes, como por exemplo a derivada material.

1.1.1. Principio de conservación da masa

Se $\rho(x, t)$ representa o campo escalar espacial correspondente á densidade de masa, en base a (A.22), a masa total contida na parte \mathcal{P} dun corpo \mathcal{B} , no tempo t , represéntase por

$$m(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t) dV_x. \quad (1.1)$$

O *principio de conservación da masa* afirma que a masa nin se crea nin se destrúe, polo que a masa total contida en calquera parte do corpo \mathcal{P} permanece constante ao longo do tempo; isto é,

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{P}, t) = 0, \quad (1.2)$$

co cal usando o Teorema de Reynolds (A.17),

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{P}, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) dV_x. \quad (1.3)$$

Como a parte \mathcal{P} é arbitraria, concluímos que

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ en } \mathcal{T}, \quad (1.4)$$

que é a forma *non conservativa* do principio de conservación da masa. Reagrupando os termos chégase a forma *conservativa* do mesmo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ en } \mathcal{T}. \quad (1.5)$$

Estas expresións diferenciais do principio de conservación da masa son válidas supoñendo a regularidade dos campos involucrados e referímonos a elas como *formulación forte* deste principio. A *formulación débil*, que admite discontinuidades e non diferenciabilidade, dáse en forma integral.

Sexa un volume de control $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_t$ para o intre t . Integrando (1.5) en \mathcal{R} , temos

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV_x = 0. \quad (1.6)$$

Facendo de novo uso do Teorema de Gauss,

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_x + \int_{\partial \mathcal{R}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0, \quad (1.7)$$

e como \mathcal{R} non depende de t , temos finalmente a *formulación débil* do principio de conservación de masa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \rho dV_x = - \int_{\partial \mathcal{R}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.8)$$

Interprétase como que a taxa de variación de masa no interior do volume de control \mathcal{R} é igual ao fluxo máxico que entra a través da superficie fronteira $\partial \mathcal{R}$.

1.1.2. Principio de conservación do momento

Para formular o *principio de conservación do momento* primeiro temos que falar do *sistema de forzas* que actúan sobre o medio continuo. Por unha parte teremos *forzas volumétricas*, que actúan sobre o interior do corpo, e por outra parte *forzas superficiais* ou *de contacto*, que actúan sobre a fronteira de partes do corpo.

Definición 1.1 (Sistema de forzas). Un *sistema de forzas* para un corpo \mathcal{B} suxeito a un movemento é un par de campos vectoriais, chamados *densidade superficial de forza* e *densidade volumétrica de forza*,

$$\mathbf{s} : \mathcal{T} \times \mathcal{N} \longrightarrow V, \quad \mathbf{b} : \mathcal{T} \longrightarrow V, \quad (1.9)$$

onde $\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \in V / \|\mathbf{n}\| = 1\}$, tales que

1. o campo vectorial $x \in \mathcal{B}_t \mapsto \mathbf{s}(x, t; \mathbf{n}) \in V$ é regular, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}$,
2. o campo vectorial $x \in \mathcal{B}_t \mapsto \mathbf{b}(x, t) \in V$ é continuo, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sexa $(x, t) \in \mathcal{T}$ e sexa \mathcal{S} unha superficie contida en \mathcal{B}_t que pasa por x con vector normal unitario \mathbf{n} . \mathcal{S} divide a rexión en dúas partes, unha positiva, cara a cal apunta \mathbf{n} , e outra negativa. A *Hipótese de Cauchy* establece que a *densidade superficial de forza* exercida pola parte positiva sobre a negativa en x , no tempo t , só depende de \mathbf{n} , e non da superficie \mathcal{S} .

Para calcular a forza de contacto en t entre dúas partes \mathcal{P} e \mathcal{D} , intégrase \mathbf{s} sobre a superficie de contacto $\mathcal{S}_t = \mathcal{P}_t \cap \mathcal{D}_t$:

$$\int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{s}(x, t; \mathbf{n}) dA \quad (1.10)$$

é a *forza de contacto* que exerce \mathcal{D} sobre \mathcal{P} no intre t se \mathbf{n} apunta cara o exterior de \mathcal{P}_t . No caso de que $x \in \partial\mathcal{B}_t$ e \mathbf{n} apunte cara o exterior de \mathcal{B}_t , $\mathbf{s}(x, t; \mathbf{n})$ é a densidade superficial de forza que exerce a contorna sobre o corpo.

No caso das forzas volumétricas, dada unha parte $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$, a forza total exercida sobre \mathcal{P} polo medio a tempo t é

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(x, t) dV_x. \quad (1.11)$$

Así, a forza total que se exerce sobre unha parte \mathcal{P} de \mathcal{B} no tempo t vén dada por

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(x, t) dV_x + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(x, t; \mathbf{n}) dA. \quad (1.12)$$

A partir desta configuración, enunciámos un resultado fundamental no estudo da interacción entre as forzas e o movemento.

Teorema 1.2 (Teorema de Cauchy). *Existe un campo tensorial simétrico, $\mathbf{T} : \mathcal{T} \rightarrow \text{Lin}$, chamado tensor de tensións de Cauchy, que cumpre as seguintes relacións:*

$$\mathbf{s}(x, t; \mathbf{n}) = \mathbf{T}(x, t)\mathbf{n}, \quad (1.13)$$

$$\rho(x, t)\dot{\mathbf{v}}(x, t) = \text{div}\mathbf{T}(x, t) + \mathbf{b}(x, t). \quad (1.14)$$

Demostración. Probaremos a segunda igualdade supoñendo certo (1.13). Sexa \mathcal{P} unha parte de \mathcal{B} . A Segunda Lei de Newton afirma que a forza total que se exerce sobre \mathcal{P} é igual á taxa de variación do momento lineal de \mathcal{P} , é dicir,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{f}(\mathcal{P}, t), \quad (1.15)$$

onde $\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)$ denota a *cantidade de movemento* ou *momento lineal*,

$$\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t)\mathbf{v}(x, t)dV_x. \quad (1.16)$$

Substituíndo (1.12) e (1.16), temos logo que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t)\mathbf{v}(x, t)dV_x \right) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(x, t)dV_x + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(x, t; \mathbf{n})dA, \quad (1.17)$$

e facendo uso de (1.13),

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t)\mathbf{v}(x, t)dV_x \right) = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(x, t)dV_x + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{T}(x, t)\mathbf{n}dA. \quad (1.18)$$

Agora, aplicando o Teorema de Gauss para converter a integral de área nunha de volume, e utilizando tamén o Teorema de Reynolds no lado esquerdo da igualdade,

$$\int_{\mathcal{P}_t} [(\rho\dot{\mathbf{v}}) + (\text{div}\mathbf{v})\rho\mathbf{v}]dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}dV_x + \int_{\mathcal{P}_t} \text{div}\mathbf{T}dV_x, \quad (1.19)$$

que se pode reescribir como

$$\int_{\mathcal{P}_t} [\dot{\rho}\mathbf{v} + \rho\dot{\mathbf{v}} + (\text{div}\mathbf{v})\rho\mathbf{v}]dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}dV_x + \int_{\mathcal{P}_t} \text{div}\mathbf{T}dV_x. \quad (1.20)$$

Finalmente, usando a ecuación non conservativa da conservación da masa (1.4) multiplicada por \mathbf{v} , tense

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho\dot{\mathbf{v}}dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}dV_x + \int_{\mathcal{P}_t} \text{div}\mathbf{T}dV_x. \quad (1.21)$$

e por seren \mathcal{P} arbitraria, deducimos que

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} \text{ en } \mathcal{T}. \quad (1.22)$$

□

A ecuación (1.14) denomínase *ecuación do movemento* e recolle as *leis de conservación do momento* en forma *non conservativa*. Se volvemos a sumar a ecuación (1.4) multiplicada por \mathbf{v} , chegamos a que

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} \text{ en } \mathcal{T}, \quad (1.23)$$

tendo en conta que

$$(\rho\mathbf{v})^\cdot = \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{grad}(\rho\mathbf{v})\mathbf{v}, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\rho\mathbf{v})\mathbf{v} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\rho\mathbf{v}. \quad (1.25)$$

Esta nova ecuación (1.23) recolle as *leis de conservación do momento* en forma *conservativa*. Coma no caso da conservación da masa, estas ecuacións téñense baixo suposicións de regularidade e constitúen a formulación forte do *principio de conservación do momento lineal*.

Integrando (1.23) nun volume de control \mathcal{R} , temos

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) dV_x = \int_{\mathcal{R}} (\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b}) dV_x. \quad (1.26)$$

Se volvemos a transformar as integrais de volume da diverxencia en integrais de área, agora

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV_x + \int_{\partial\mathcal{R}} (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV_x + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}\mathbf{n} dA, \quad (1.27)$$

e como \mathcal{R} non depende de t podemos intercambiar a orde da derivada e a integral no primeiro sumando, e xunto co feito de que

$$(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\mathbf{n} = \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \quad (1.28)$$

obtemos a *formulación débil* do principio de conservación do momento lineal, válida sen condicións de regularidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} (\rho\mathbf{v}) dV_x + \int_{\partial\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV_x + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}\mathbf{n} dA. \quad (1.29)$$

1.1.3. Ecuacións de Navier-Stokes

Supoñamos un fluído incompresible, é dicir, que o fluxo de volume en calquera recinto é nulo. Dado entón un volume de control \mathcal{R} ,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (1.30)$$

Utilizando o Teorema de Gauss,

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}\mathbf{v} dV_x = 0 \quad (1.31)$$

calquera que sexa o recinto \mathcal{R} , e pois

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad (1.32)$$

A maiores, supoñamos que a viscosidade do fluído é Newtoniana. Baixo ambas condicións, o tensor de tensións de Cauchy escríbese como

$$\mathbf{T}(x, t) = -p(x, t)\mathbf{I} + 2\nu\mathbf{\Pi}(x, t), \quad (1.33)$$

onde $p(x, t)$ é o campo escalar correspondente á *presión* e

$$\mathbf{\Pi}(x, t) = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v}(x, t) + \text{grad } \mathbf{v}^T(x, t)). \quad (1.34)$$

Calculamos agora a diverxencia de \mathbf{T} . Cun simple cálculo,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T} &= \text{div}(-p\mathbf{I} + 2\nu\mathbf{\Pi}) = -\text{grad } p + \nu(\text{div grad } \mathbf{v} + \text{div grad } \mathbf{v}^T) \\ &= -\text{grad } p + \nu(\Delta \mathbf{v} + \text{grad div } \mathbf{v}) \stackrel{(*)}{=} -\text{grad } p + \nu\Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde en (*) usamos que o fluído é incompresible (1.32). Así, substituíndo (1.35) na ecuación do movemento (1.14), chegamos a que as *ecuacións do momento de Navier-Stokes* se escriben como

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v} \mathbf{v} \right) - \nu\Delta \mathbf{v} + \text{grad } p = \mathbf{b}, \quad (1.36)$$

que xunto a ecuación de conservación da masa (1.5) conforman as *ecuacións de Navier-Stokes incompresibles*. Se a viscosidade do fluído é desprezable, $\nu = 0$, obtemos o que se coñecen como as *ecuacións de Euler incompresibles*:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v} \mathbf{v} \right) + \text{grad } p = \mathbf{b}. \quad (1.37)$$

1.2. Ecuacións das augas pouco profundas

Antes de deducir as ecuacións das augas pouco profundas, faremos unha serie de suposicións en relación ao marco físico no que traballaremos. Suporemos un fluxo de auga incompresible e de viscosidade desprezable, polo que o noso punto de partida son a ecuación de conservación da masa e as ecuacións de conservación do momento de Euler incompresibles:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.38)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v} \mathbf{v} \right) + \text{grad } p = \mathbf{b}. \quad (1.39)$$

En primeiro lugar, por tratarse dun fluído incompresible, $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Así, a ecuación (1.38) resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho = 0. \quad (1.40)$$

Se ademais asumimos que a densidade é homoxénea (non varía no espazo: $\text{grad } \rho = 0$), entón esta sería tamén constante no tempo. Non sempre se podería supoñer isto, por exemplo no estudo oceanográfico, mais non afondaremos neses casos.

O vector \mathbf{b} engloba as forzas volumétricas que interveñen no fluxo da auga, nas que se poden incluír os distintos tipos de rozamento, a forza da gravidade, ou o efecto Coriolis que produce a rotación da Terra, entre outras. A principal forza á que estará suxeita o líquido é a da gravidade, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, tomando a aceleración da gravidade, g , $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$.

O resto de forzas non serán necesarias para a derivación das ecuacións e poderán incluírse máis adiante de ser necesario.

Ata agora, as ecuacións (1.38) e (1.39) escríbense como

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0, & (1.41) \\ u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_x, & (1.42) \\ v_t + uv_x + vv_y + vw_z = -\frac{1}{\rho}p_y, & (1.43) \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_z - g. & (1.44) \end{cases}$$

O dominio espacial no que estarán definidas terá dúas fronteiras importantes. A primeira virá dada polo *fondo*, ou *leito*,

$$z = b(x, y), \quad (1.45)$$

sobre o cal se apoia o volume de auga, e que consideraremos inmóbil e independente do tempo. A segunda,

$$z = \eta(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t), \quad (1.46)$$

chamarase *superficie libre*, e correspóndese coa suma da elevación do fondo máis a altura da columna de auga, $h(x, y, t)$, que dependerá do intre t . Na figura 1.1 achégase un esquema do modelo 1D.

Para a correcta definición do problema débense definir as condicións de fronteira axeitadas nestas dúas superficies. Unha é a do fluxo coherente da auga, chamada *condición cinemática*: esta non pode atravesar ningunha das dúas fronteiras. A outra, a *condición dinámica*, indicará cal é a presión sobre a superficie libre.

No caso do fondo, para indicar que a auga nin entra nin sae a través desta superficie, basta que a velocidade nela sexa perpendicular á mesma en todo intre t . Dado que un vector normal ao fondo, apuntando cara o exterior, vén dado por $(-b_x, -b_y, 1)^T$, isto equivale a que

$$\mathbf{v} \cdot (-b_x, -b_y, 1)^T = -ub_x - vb_y + w = 0, \text{ en } z = b(x, y). \quad (1.47)$$

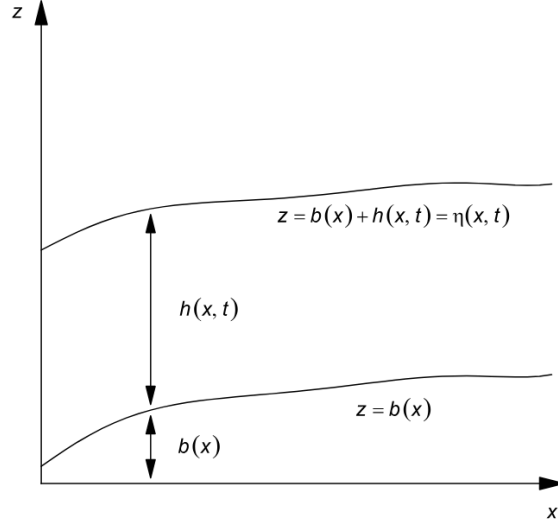


Figura 1.1: Sección rectangular das ecuacións das augas someiras 1D. Fondo $b(x)$ e superficie libre $\eta(x, t)$.

No caso da superficie libre, como se move co tempo, debemos facer uso da derivada material. A superficie vén dada como imaxe recíproca do valor regular 0 da función $s(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z$, e debe cumprirse que

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } s = 0, \text{ en } z = \eta(x, y, t). \quad (1.48)$$

A presión sobre a superficie libre será a presión atmosférica, que por sinxeleza tomaremos como nula,

$$p(x, y, \eta(x, y, t), t) = p_{atm} = 0. \quad (1.49)$$

As ecuacións das augas pouco profundas resultan de facer unha aproximación sobre o modelo que levamos formulado ata agora; esta é supoñer que a aceleración vertical, \dot{w} , é despreziable en todo punto, o cal resulta válido cando a altura da auga é pequena en comparación ao espazo horizontal que ocupa. Supoñendo entón que

$$\dot{w} = w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0, \quad (1.50)$$

a partir da ecuación (1.44) obtemos que

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_z - g. \quad (1.51)$$

Fixando as coordenadas x e y , e integrando entre z e η , temos que

$$-\rho g(\eta - z) = \int_z^\eta -\rho g d\xi = \int_z^\eta p_z(x, y, \xi, t) d\xi = p(x, y, \eta, t) - p(x, y, z, t), \quad (1.52)$$

e pola condición dinámica (1.49),

$$p = \rho g(\eta - z). \quad (1.53)$$

Como η non depende de z , deducimos que p_x e p_y non dependen de z , e, por conseguinte,

$$p_x = \rho g \eta_x, \quad p_y = \rho g \eta_y. \quad (1.54)$$

A partir das ecuacións (1.42) e (1.43), concluímos que as compoñentes horizontais da aceleración, \dot{u} e \dot{v} , son independentes da coordenada z . Isto quere dicir que $u_z = v_z = 0$, co cal (1.42) e (1.43) simplifícanse a

$$u_t + uu_x + vv_y = -g\eta_x \quad (1.55)$$

e

$$v_t + uv_x + vv_y = -g\eta_y. \quad (1.56)$$

O seguinte paso para chegar ás ecuacións é integrar a condición de incompresibilidade entre o fondo $z = b(x, y)$ e a superficie libre $z = \eta(x, y, t)$. Facéndoo,

$$\int_b^\eta \operatorname{div} \mathbf{v} dz = 0 \quad (1.57)$$

da lugar a

$$\int_b^\eta u_x dz + \int_b^\eta v_y dz + w|_{z=\eta} - w|_{z=b} = 0. \quad (1.58)$$

Para expresar a terceira compoñente da velocidade en función das outras dúas faremos uso das condicións cinemáticas impostas sobre as fronteiras. De (1.47) temos que

$$(-ub_x - vb_y + w)|_{z=b} = 0 \implies w|_{z=b} = (ub_x + vb_y)|_{z=b}, \quad (1.59)$$

e de (1.48) que

$$(\eta_t + u\eta_x + v\eta_y - w)|_{z=\eta} = 0 \implies w|_{z=\eta} = (\eta_t + u\eta_x + v\eta_y)|_{z=\eta}. \quad (1.60)$$

Volvendo a (1.58), expandimos a

$$\int_b^\eta u_x dz + \int_b^\eta v_y dz + (\eta_t + u\eta_x + v\eta_y)|_{z=\eta} - (ub_x + vb_y)|_{z=b} = 0. \quad (1.61)$$

A continuación faremos uso da fórmula integral de Leibniz, como caso particular do Teorema de Reynolds con dependencia nunha soa dimensión.

Corolario 1.3 (Fórmula integral de Leibniz). *Sexa $f : U \times V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con U e V abertos, tal que existan e sexan continuas as súas derivadas parciais. Sexan tamén $a, b \in \mathcal{C}^1(U)$ tales que $a(x) \leq t \leq b(x)$, $\forall t \in V$. Entón tense que*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(b(x), t) \frac{db}{dx}(x) - f(a(x), t) \frac{da}{dx}(x), \quad \forall x \in U. \quad (1.62)$$

Posto que $b(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t)$, aplicando esta fórmula ás integrais de (1.61),

$$\int_b^\eta u_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u dz + u|_{z=b} b_x - u|_{z=\eta} \eta_x \quad (1.63)$$

e

$$\int_b^\eta v_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v dz + v|_{z=b} b_y - v|_{z=\eta} \eta_y. \quad (1.64)$$

Sustituíndo en (1.61), chegamos a que

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v dz = 0, \quad (1.65)$$

e como u e v son independentes de z , entón

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} (u(\eta - b)) + \frac{\partial}{\partial y} (v(\eta - b)) = 0, \quad (1.66)$$

que tendo en conta que $\eta = b + h$ e $b_t = 0$, se reescribe como

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0. \quad (1.67)$$

Esta será a nova ecuación de conservación da masa.

A ecuación (1.67) está escrita en forma conservativa, ao considerar que as variables son h , hu e hv , en lugar das respectivas variables primitivas, h , u e v . A idea é expresar as ecuacións de conservación do momento, (1.55) e (1.56), tamén en forma conservativa. Para iso, sumamos a ecuación (1.67), multiplicada por u , ás ecuacións (1.55) e (1.56) multiplicadas por h . Temos que

$$(u_t + uu_x + vu_y)h + (h_t + (hu)_x + (hv)_y)u = (-g\eta_x)h, \quad (1.68)$$

$$(v_t + uv_x + vv_y)h + (h_t + (hu)_x + (hv)_y)u = (-g\eta_y)h. \quad (1.69)$$

Operando en (1.68),

$$\begin{aligned} (hu_t + h_t u) + (huu_x + (hu)_x u) + (hvu_y + (hv)_y u) &= (-g(b+h)_x)h \\ \iff (hu)_t + (hu^2)_x + gh h_x + (huv)_y &= -ghb_x, \end{aligned} \quad (1.70)$$

que se pode escribir como

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = -ghb_x. \quad (1.71)$$

De xeito similar, chégase a que

$$(hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = -ghb_y. \quad (1.72)$$

Por todo o obtido, as ecuacións da augas pouco profundas, en forma conservativa son

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0, & (1.73) \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = -ghb_x, & (1.74) \\ (hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = -ghb_y, & (1.75) \end{cases}$$

ou, en forma vectorial,

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x + \mathbf{G}(\mathbf{w})_y = \mathbf{S}(\mathbf{w}), \quad (1.76)$$

onde \mathbf{w} denota o vector de variables conservativas, $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ os vectores de fluxo e $\mathbf{S}(\mathbf{w})$ o vector de termos fonte, e veñen dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Hai que ter en conta que o vector de termos fonte ten esta forma para o caso particular no que só actúa a forza da gravidade, que supoñemos ao inicio. Este podería conter novos termos que inclúan os efectos das forzas que non se consideraron. Notar tamén que para este caso, se o fondo é constante os termos fonte desaparecen.

En (1.76), as SWE están escritas en forma diferencial, admitindo só solucións suficientemente regulares para poder falar de diferenciabilidade, que como xa comentamos anteriormente, denomínanse solucións fortes. Se reescribimos as ecuacións como

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0, \\ \mathbf{q}_t + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{q} + \frac{1}{2}gh^2\mathbf{I}) = -gh\nabla b, \end{array} \right. \quad (1.78)$$

sendo $\mathbf{q} = h\mathbf{v}$ a descarga de auga, entón temos, nun volume de control \mathcal{R} ,

$$\int_{\mathcal{R}} h_t dA + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\mathbf{q}) dA = 0, \quad (1.79)$$

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{q}_t dA + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{q} + \frac{1}{2}gh^2\mathbf{I}) dA = - \int_{\mathcal{R}} gh\nabla b dA. \quad (1.80)$$

Facendo uso do Teorema de Gauss, e de que o recinto \mathcal{R} é fixo, entón

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} h dA + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\xi = 0, \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{q} dA + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{q} + \frac{1}{2}gh^2\mathbf{I}) \mathbf{n} d\xi = - \int_{\mathcal{R}} gh\nabla b dA. \quad (1.82)$$

Abreviadamente, podemos escribir estas ecuacións en forma vectorial como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{w} dA + \int_{\partial\mathcal{R}} \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{w}) \right) \cdot \mathbf{n} d\xi = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{S}(\mathbf{w}) dA. \quad (1.83)$$

Esta é a formulación débil, ou forma integral, das ecuacións (1.76), que admite a maiores solucións descontinuas, e será a base para a construción de solucións numéricas coa metodoloxía de volumes finitos estudada no capítulo 3.

1.2.1. Simplificacións adicionais

As ecuacións das augas pouco profundas que vimos de deducir apóianse en certas aproximacións que resultan válidas baixo as hipóteses formuladas, mais podemos atoparnos con situacións incluso máis sinxelas nas que outros modelos derivados deste sexan suficientes. Veremos agora algunhas destas casuísticas.

1.2.1.1. Ecuacións separadas

Unha simplificación inmediata que podemos introducir é a de supoñer que as variacións na dirección da coordenada y (ou x) son pequenas e por tanto desprezables. Se ese é o caso, suprimiríamos o fluxo na dirección de y (ou x) nas ecuacións (1.76), deixando

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x = \mathbf{S}(\mathbf{w}), \quad (1.84)$$

con

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

1.2.1.2. Caso unidimensional

Pode haber casos no que o fluxo da auga sexa completamente ou case unidireccional, nos cales supoñeríamos que $v = 0$. Baixo esta condición as ecuacións redúcense a

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, & (1.86) \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghb_x, & (1.87) \\ h_y = -b_y. & (1.88) \end{cases}$$

Se queremos desfacernos da dependencia espacial na dirección de y , será necesario restrinxir as ecuacións a un determinado tipo de xeometría.

Consideremos que o fluxo de auga se produce sobre unha canle simétrica respecto do plano $y = 0$, con altura do fondo e anchura variables. Supoñamos que a función $B(z)$ proporciona a anchura da canle na altura z da sección plana $x = cte.$. Para que teña sentido, deberá estar definida para $z \geq 0$ e cumprir $B(0) = 0$ e $B(z) > 0$, $\forall z > 0$. A canle presenta, a maiores, un desvío de $\delta(x)$ respecto da altura inferior de referencia $z = 0$.

Da relación (1.88), temos que

$$h_y + b_y = 0, \quad (1.89)$$

logo a superficie libre $\eta = h + b$ debe ser constante en cada sección $x = cte.$, para calquera t . Definamos

$$h_0(x, t) := h(x, 0, t). \quad (1.90)$$

En base á xeometría que vimos de discutir, isto significa que $h(x, \cdot, t)$ presenta simetría par e alcanza o máximo en $y = 0$, e ademais nos extremos $|y| = \frac{1}{2}B(h(x, 0, t))$ tense que $h(x, y, t) = 0$. Na figura 1.2 expónse un exemplo simplificado en 3D da auga sobre a xeometría coa que estamos a traballar.

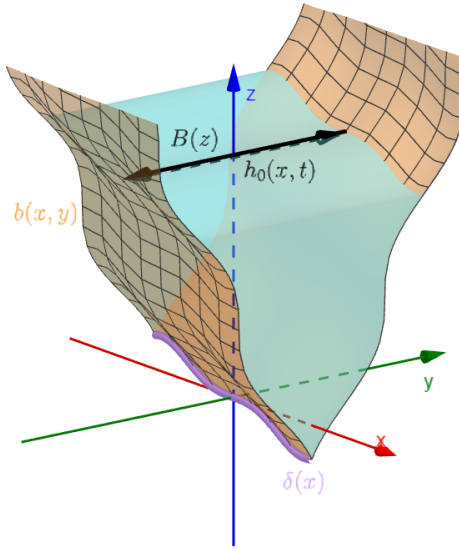


Figura 1.2: Esquema 3D da xeometría en canles simétricos.

A área que ocupa a auga para unha sección transversal da canle a tempo t , $A(x, t)$, pode obterse entón de dúas formas equivalentes:

$$A(x, t) = \int_0^{h_0(x, t)} B(z) dz \quad (1.91)$$

ou

$$A(x, t) = \int_{-\frac{1}{2}B(h_0(x, t))}^{\frac{1}{2}B(h_0(x, t))} h(x, y, t) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{2}B(h_0(x, t))} h(x, y, t) dy. \quad (1.92)$$

Como esta área non depende de y , a idea é integrar as ecuacións (1.86) e (1.87) na dirección de y para expresalas en termos de $A(x, t)$. Os límites de integración serán os límites nos que está definida $h(x, \cdot, t)$, que son $|y| = \frac{1}{2}B(h_0(x, t))$. Para abreviar definamos

$$y^\pm(x, t) := \pm \frac{1}{2}B(h_0(x, t)). \quad (1.93)$$

Lembremos ademais que

$$h(x, y^\pm(x, t), t) = 0. \quad (1.94)$$

Fixado x , usando a fórmula integral de Leibniz (1.62) e tendo en conta (1.94),

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} h_t(x, y, t) dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} h(x, y, t) dy = A_t(x, t). \quad (1.95)$$

Fixado agora t , analogamente

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} h_x(x, y, t) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} h(x, y, t) dy = A_x(x, t). \quad (1.96)$$

Xa que u non depende de y ,

$$\begin{aligned} \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (hu)_x(x, y, t) dy &= \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (h_x(x, y, t)u(x, t) + h(x, y, t)u_x(x, t)) dy \\ &= u(x, t)A_x(x, t) + u_x(x, t)A(x, t) = (Au)_x(x, t). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Logo a ecuación (1.86) reescíbese con independencia de y :

$$A_t + (Au)_x = 0. \quad (1.98)$$

Operando da mesma maneira temos tamén que

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (hu)_t(x, y, t) dy = (Au)_t(x, t) \quad (1.99)$$

e

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (hu^2)_x(x, y, t) dy = (Au^2)_x(x, t). \quad (1.100)$$

Tendo en conta que $h = \eta - b$, e que η é independente de y para calquera x fixo,

$$\begin{aligned} \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (h^2)_x dy &= \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} ((\eta - b)^2)_x dy = \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} 2(\eta - b)(\eta - b)_x dy \\ &= 2 \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} h(\eta_x - b_x) dy = 2 \left(A\eta_x - \int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} hb_x dy \right). \end{aligned} \quad (1.101)$$

As particularidades e simetrías da xeometría permiten concluír que

$$b_x(x, y) = \delta'(x), \quad (1.102)$$

polo que b_x non depende de y e (1.101) redúcese a

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} (h^2)_x dy = 2(A\eta_x - Ab_x) = 2A(\eta_x - b_x) = 2A(h_0)_x. \quad (1.103)$$

Ao integrar o termo fonte correspondente á ecuación do momento obtemos

$$\int_{y^-(x,t)}^{y^+(x,t)} -gh(x, y, t)b_x(x) dy = -gA(x, t)b_x(x). \quad (1.104)$$

En vista do anterior, reducir as ecuacións a unha dimensión espacial, en termos da área da sección transversal de auga, elimina a necesidade de coñecer a altura da auga e o fondo en calquera punto (x, y) ; chega con saber canto valen en $y = 0$. En base a isto, para reducir a notación entenderemos por fondo do canle á función $b \equiv \delta$ e por altura da auga a $h \equiv h_0$. Así, as ecuacións das augas pouco profundas para canles simétricas e anchura variable escríbense como

$$\begin{cases} A_t + (Au)_x = 0, & (1.105) \\ (Au)_t + (Au^2)_x + gAh_x = -gAb_x. & (1.106) \end{cases}$$

De especial interese son tamén os fluxos en canles de perfil rectangular con variación da anchura ao longo da dirección do fluxo. Se é así, B xa non depende de z , senón de x , e daquela a área da sección transversal húmida pode obterse directamente como

$$A(x, t) = B(x)h(x, t). \quad (1.107)$$

Con (1.107) podemos expresar as ecuacións (1.105) e (1.106) en termos de h e hu facendo unha serie de manipulacións alxébricas. Facendo a substitución na primeira ecuación, tendo en conta que $B_t = 0$,

$$(Bh)_t + (Bhu)_x = 0 \implies Bh_t + B_x(hu) + B(hu)_x = 0. \quad (1.108)$$

Procedendo coa segunda,

$$(Bhu)_t + (Bhu^2)_x + gBhh_x = -gBhb_x \implies B(hu)_t + B_xhu^2 + B(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -gBhb_x. \quad (1.109)$$

Reagrupando termos chegamos ás ecuacións

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = -hu\frac{B_x}{B}, & (1.110) \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -hu^2\frac{B_x}{B} - ghb_x, & (1.111) \end{cases}$$

que presentan novos termos fonte relacionados con esta xeometría. Se, en cambio, a canle non presenta variación ao ancho, estes desaparecerían, pois $B_x = 0$, e obteríamos as ecuacións en forma conservativa

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, & (1.112) \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghb_x, & (1.113) \end{cases}$$

equivalentes a reducir directamente a unha dimensión a partir das ecuacións 2D. Por suposto, nos modelos anteriores poderíanse considerar termos fonte adicionais, como por exemplo termos de fricción. En forma vectorial virían dadas por

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x = \mathbf{S}(\mathbf{w}), \quad (1.114)$$

onde a notación e as denominacións son análogas ao caso 2D (1.76) e

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

1.2.1.3. Ecuacións linearizadas

Linearizar as ecuacións (1.76) é a forma máis versátil de obter unha aproximación moi manexable do problema completo, e existen dúas maneiras de afrontalo.

A primeira delas pasa por considerar un fondo con variación pequena e unha solución inicial estática, é dicir, con $h = h_0$ cte. e $u = v = 0$, e expresar a solución como unha pequena perturbación desta. Isto é,

$$h(x, y, t) = h_0 + \hat{h}(x, y, t), \quad (1.116)$$

$$u(x, y, t) = \hat{u}(x, y, t), \quad v(x, y, t) = \hat{v}(x, y, t), \quad (1.117)$$

con \hat{h} , \hat{u} e \hat{v} pequenas perturbacións, de modo que os termos cadráticos (\hat{u}^2 , $\hat{h}\hat{u}$, $\hat{u}\hat{v}$, etc.) poden ser ignorados. Substituíndo as descomposicións anteriores nas ecuacións (1.73)-(1.75) e suprimindo os termos cadráticos, dan lugar a

$$\begin{cases} \hat{h}_t + h_0(\hat{u}_x + \hat{v}_y) = 0, \\ \hat{u}_t + g\hat{h}_x = -gb_x, \\ \hat{v}_t + g\hat{h}_y = -gb_y. \end{cases} \quad (1.118)$$

A segunda, máis xeralmente utilizada, consiste en escribir as ecuacións (1.73)-(1.75) en forma primitiva (non conservativa), expandindo as derivadas do fluxo:

$$\begin{cases} h_t + h_x u + h u_x + h_y v + h v_y = 0, \end{cases} \quad (1.119)$$

$$\begin{cases} h_t u + h u_t + h_x u^2 + 2h u u_x + g h h_x + h_y u v + h u_y v + h u v_y = -g h b_x, \end{cases} \quad (1.120)$$

$$\begin{cases} h_t v + h v_t + h_x u v + h u_x v + h u v_x + h_y v^2 + 2h v v_y + g h h_y = -g h b_y. \end{cases} \quad (1.121)$$

Reagrupando termos,

$$\begin{cases} h_t + h_x u + h u_x + h_y v + h v_y = 0, \end{cases} \quad (1.122)$$

$$\begin{cases} (h_t + h_x u + h u_x + h_y v + h v_y)u + h(u_t + u u_x + g h_x + u_y v) = -g h b_x, \end{cases} \quad (1.123)$$

$$\begin{cases} (h_t + h_x u + h u_x + h_y v + h v_y)v + h(v_t + u v_x + v v_y + g h_y) = -g h b_y, \end{cases} \quad (1.124)$$

o cal se simplifica a

$$\begin{cases} h_t + h_x u + h u_x + h_y v + h v_y = 0, \end{cases} \quad (1.125)$$

$$\begin{cases} u_t + u u_x + g h_x + u_y v = -g b_x, \end{cases} \quad (1.126)$$

$$\begin{cases} v_t + u v_x + v v_y + g h_y = -g b_y. \end{cases} \quad (1.127)$$

Estas ecuacións poden escribirse en forma vectorial, dando lugar a

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x + \mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{u}_y = \mathbf{S}, \quad (1.128)$$

onde \mathbf{u} é o novo vector de variables, agora primitivas, que vén dado, xunto ao vector de termos fonte \mathbf{S} e as matrices $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{u})$, por

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}, & \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gb_x \\ -gb_y \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, & \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.129)$$

Pois ben, a aproximación linear consiste en facer que as matrices $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ non dependan de \mathbf{u} , é dicir, que teñan coeficientes constantes. Así, colleríamos as aproximacións

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \approx \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{h} & 0 \\ g & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}) \approx \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{h} \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ g & 0 & \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (1.130)$$

A aproximación dependerá da elección dos coeficientes \bar{u}, \bar{v} e \bar{h} , que non terá por que ser o valor particular da solución nun punto.

1.3. Sistemas hiperbólicos de leis de conservación

Se queremos estudar as solucións analíticas e numéricas das SWE, primeiro debemos introducir a clase de ecuacións á que pertencen, para así poder apoiarnos na teoría matemática que a respalda.

Definición 1.4 (Sistema de leis de conservación). Sexa $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, e sexa

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \overset{p}{\dots} \times \mathbb{R}^m \quad (1.131)$$

unha función diferenciable. Un *sistema de m leis de conservación* é un sistema de ecuacións en derivadas parciais da forma

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{F}_i(\mathbf{q})) = \mathbf{0} \quad (1.132)$$

onde \mathbf{q} é un campo vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{q} : W \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Omega \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto (q_1(\mathbf{x}, t), \dots, q_m(\mathbf{x}, t)) \end{aligned}$$

que recibe o nome de *vector de variables conservativas*.

O conxunto Ω denomínase *conxunto de estados* e a función \mathbf{F} é o *fluxo físico*, cuxa compoñente i -ésima se corresponde co fluxo na dirección da coordenada x_i .

Un sistema deste tipo virá acompañado dunha condición inicial. Achar o campo vectorial \mathbf{q} que cumpra (1.132) e dita condición coñécese como *problema do valor inicial* ou *de Cauchy*, e escríbese como

$$\begin{cases} \mathbf{q}_t + \sum_{i=1}^p (\mathbf{F}_i(\mathbf{q}))_{x_i} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{q}^0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.133)$$

Un sistema de leis de conservación da forma (1.132) poderase escribir en forma *cuasilinear* considerando a matriz xacobiana de cada compoñente de \mathbf{F} , que denotaremos por $\nabla \mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{q}_t + \sum_{i=1}^p \nabla \mathbf{F}_i(\mathbf{q}) \mathbf{q}_{x_i} = \mathbf{0}. \quad (1.134)$$

Definición 1.5 (Sistema hiperbólico). Consideremos un sistema de leis de conservación escrito en forma cuasilinear e definamos a matriz

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) := \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla \mathbf{F}_i(\mathbf{q}), \quad (1.135)$$

dado $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$. Dirase que o sistema é *hiperbólico* se a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ ten todos os seus valores propios reais,

$$\lambda_1(\mathbf{q}) \leq \dots \leq \lambda_m(\mathbf{q}), \quad (1.136)$$

e se os vectores propios,

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{q}), \quad (1.137)$$

son linearmente independentes, para calquera $\mu \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{q} \in \Omega$. Se ademais os valores propios son todos distintos, o sistema dirase *estritamente hiperbólico*.

Os valores propios $\lambda_i(\mathbf{q})$ recibirán comunmente o nome de *velocidades características* ou *de onda*, por motivemos que veremos no seguinte capítulo. Referirémonos ademais ao par $(\lambda_k, \mathbf{r}_k)$ como *campo k -característico*, ou equivalentemente falaremos do *campo característico* $\lambda_k(\mathbf{q})$.

Definición 1.6. O campo k -característico dise que é *xenuinamente non linear* se cumpre

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{q}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \Omega, \quad (1.138)$$

e *linearmente dexenerado* cando

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{q}) = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \Omega. \quad (1.139)$$

No caso de que $\lambda_k(\mathbf{q})$ sexa constante, $\nabla \lambda_k(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{q} \in \Omega$ e automaticamente temos que o campo k -característico é linearmente dexenerado. Nun sistema linear todas as velocidades características son constantes.

1.3.1. Carácter hiperbólico das ecuacións das augas pouco profundas

Nesta sección expoñeremos o carácter hiperbólico das ecuacións das augas pouco profundas homoxéneas. Partiremos das ecuacións (1.76) con fondo plano, que conforman un sistema de leis de conservación (1.132). Ademais, de aquí en diante, supoñeremos que $h > 0$.

O primeiro paso consiste en expresar o fluxo de (1.76) en termos das variables conservativas $w_1 = h, w_2 = hu$ e $w_3 = hv$. Isto é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hu \\ \frac{(hu)^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{(hu)(hv)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + \frac{1}{2}gw_1^2 \\ \frac{w_2w_3}{w_1} \end{pmatrix}, \quad (1.140)$$

e

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hv \\ \frac{(hu)(hv)}{h} \\ \frac{(hv)^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 \\ \frac{w_2w_3}{w_1} \\ \frac{w_3^2}{w_1} + \frac{1}{2}gw_1^2 \end{pmatrix}. \quad (1.141)$$

Unha vez feito, necesitamos escribir as ecuación en forma cuasilinear,

$$\mathbf{w}_t + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{w})\mathbf{w}_x + \nabla \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{w}_y = \mathbf{S}(\mathbf{w}), \quad (1.142)$$

para o cal debemos calcular as matrices xacobianas de \mathbf{F} e \mathbf{G} , derivando respecto de \mathbf{w} . As matrices $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w})$ e $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{w})$ veñen dadas por

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{w_2^2}{w_1^2} + gw_1 & 2\frac{w_2}{w_1} & 0 \\ -\frac{w_2w_3}{w_1^2} & \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_2}{w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad (1.143)$$

e

$$\nabla \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{w_2w_3}{w_1^2} & \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_2}{w_1} \\ -\frac{w_3^2}{w_1^2} + gw_1 & 0 & 2\frac{w_3}{w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ a^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix}, \quad (1.144)$$

onde $a = \sqrt{gh}$, co que simplificaremos futuros cálculos.

Calculemos a continuación os valores propios da matriz

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \mu_1 \nabla \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \mu_2 \nabla \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ (a^2 - u^2)\mu_1 - uv\mu_2 & 2u\mu_1 + v\mu_2 & u\mu_2 \\ -uv\mu_1 + (a^2 - v^2)\mu_2 & v\mu_1 & u\mu_1 + 2v\mu_2 \end{pmatrix}. \quad (1.145)$$

O polinomio característico asociado a $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ é

$$\det(\mathbf{A}(\mathbf{w}) - \lambda(\mathbf{w})\mathbf{I}) = 0, \quad (1.146)$$

cuxas raíces serán os valores que pretendemos calcular. Escribiremos $\lambda(\mathbf{w}) \equiv \lambda$ para abreviar. Pois ben,

$$\begin{aligned}
0 = \det(\mathbf{A}(\mathbf{w}) - \lambda\mathbf{I}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & \mu_1 & \mu_2 \\ (a^2 - u^2)\mu_1 - uv\mu_2 & 2u\mu_1 + v\mu_2 - \lambda & u\mu_2 \\ -uv\mu_1 + (a^2 - v^2)\mu_2 & v\mu_1 & u\mu_1 + 2v\mu_2 - \lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda(u\mu_1 + v\mu_2) + 2(u\mu_1 + v\mu_2)^2) - \lambda((u^2 - a^2)\mu_1^2 + uv\mu_1\mu_2) \\
&\quad - (a^2 - u^2)(u\mu_1^3 + 2\mu_1^2v\mu_2) + 2u\mu_1(v\mu_2)^2 + (a^2 - v^2)u\mu_1\mu_2^2 - \lambda((v^2 - a^2)\mu_2^2 + uv\mu_1\mu_2) \\
&\quad + (a^2 - u^2)v\mu_1^2\mu_2 - (a^2 - v^2)(2u\mu_1\mu_2^2 + v\mu_2^3) + 2(u\mu_1)^2v\mu_2 \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda(u\mu_1 + v\mu_2) + 2(u\mu_1 + v\mu_2)^2) - \lambda((u\mu_1 + v\mu_2)^2 - a^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)) \\
&\quad + (u^2 - a^2)(u\mu_1^3 + \mu_1^2v\mu_2) + 2u\mu_1(v\mu_2)^2 + (v^2 - a^2)(u\mu_1\mu_2^2 + v\mu_2^3) + 2(u\mu_1)^2v\mu_2 \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda(u\mu_1 + v\mu_2) + 3(u\mu_1 + v\mu_2)^2) + \lambda a^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \\
&\quad + (u\mu_1)^3 + 3(u\mu_1)^2v\mu_2 + 3u\mu_1(v\mu_2)^2 + (v\mu_2)^3 - a^2(u\mu_1^3 + \mu_1^2v\mu_2 + u\mu_1\mu_2^2 + v\mu_2^3) \\
&= ((u\mu_1 + v\mu_2) - \lambda)((u\mu_1 + v\mu_2) - \lambda)^2 - a^2(\mu_1^2 + \mu_2^2). \tag{1.147}
\end{aligned}$$

Así factorizado, é inmediato que os valores propios de (1.145) son

$$\lambda_1 = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu} - a\|\boldsymbol{\mu}\|, \quad \lambda_2 = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad \lambda_3 = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu} + a\|\boldsymbol{\mu}\|, \tag{1.148}$$

onde \mathbf{v} é a velocidade e $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$. Claramente son os tres reais e ademais distintos, sempre que $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$.

Para rematar de ver que o sistema é hiperbólico, falta comprobar que os vectores propios son linearmente independentes. Porén, ao ser todos os valores propios distintos, forzosamente serán os vectores propios asociados, \mathbf{r}_i , linearmente independentes. Omitiremos o seu cómputo, pois non faremos uso deles. Se se queren consultar, véxase, por exemplo, [2].

Tamén é de interese comprobar o carácter hiperbólico dalgúns dos modelos simplificados previamente introducidos, para os que calcularemos tanto os valores propios como os vectores propios asociados.

Comecemos cas ecuacións separadas. Chegará facer o estudio da matriz $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{w})$. Tense

$$\begin{aligned}
\det(\nabla\mathbf{F}(\mathbf{w}) - \lambda\mathbf{I}) = 0 &\iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ a^2 - u^2 & 2u - \lambda & 0 \\ -uv & v & u - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (u - \lambda)(-\lambda(2u - \lambda) - (a^2 - u^2)) = 0 \\
&\iff \begin{cases} u - \lambda = 0 \iff \lambda = u, \\ \text{ou} \\ -\lambda(2u - \lambda) - (a^2 - u^2) = 0 \iff \lambda = u \pm a. \end{cases} \tag{1.149}
\end{aligned}$$

Os tres valores propios asociados a $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{w})$ son entón reais e distintos,

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a, \quad (1.150)$$

o cal garante que o sistema (1.84) é hiperbólico. Os vectores propios asociados a cada valor propio, \mathbf{r}_i , deben cumprir

$$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{w})\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i, \quad (1.151)$$

é dicir, cada un é solución do sistema compatible indeterminado

$$(\nabla\mathbf{F}(\mathbf{w}) - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (1.152)$$

Para λ_2 queda o sistema

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 0 \\ a^2 - u^2 & u & 0 \\ -uv & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.153)$$

que facendo transformacións elementais se reduce ao sistema

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 0 \\ a^2 - u^2 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.154)$$

co cal chega con resolver o subsistema 2×2 homoxéneo da esquina superior esquerda. Como ese bloque ten determinante $-a^2 \neq 0$, a solución do subsistema homoxéneo é a trivial, $r_{21} = 0 = r_{22}$, e a do sistema completo virá dada polo parámetro $r_{23} = \alpha_2$.

Podemos abreviar o cálculo de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_3 escribindo $\lambda^\pm = u \pm a$. O sistema a resolver é

$$\begin{pmatrix} -u \mp a & 1 & 0 \\ a^2 - u^2 & u \mp a & 0 \\ -uv & v & \mp a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{\pm}_1 \\ r^{\pm}_2 \\ r^{\pm}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.155)$$

que de novo se pode reducir mediante transformacións elementais, quedando

$$\begin{pmatrix} -u \mp a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm va & 0 & \mp a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{\pm}_1 \\ r^{\pm}_2 \\ r^{\pm}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.156)$$

a partir do cal nos quedan as relacións

$$\begin{cases} r^{\pm}_2 = (u \pm a)r^{\pm}_1, \\ r^{\pm}_3 = vr^{\pm}_1, \end{cases} \quad (1.157)$$

$$\begin{cases} r^{\pm}_2 = (u \pm a)r^{\pm}_1, \\ r^{\pm}_3 = vr^{\pm}_1, \end{cases} \quad (1.158)$$

que dependerán do valor que lle asignemos a r^{\pm}_1 . Xuntando todo, os tres vectores propios son

$$\mathbf{r}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.159)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. É de importancia remarcar que o campo característico $\lambda_2(\mathbf{w})$ é linearmente dexenerado, mentres que os campos 1- e 3-característicos son xenuinamente non lineares. Para velo debemos expresar as velocidades características en función das variables conservativas, w_1, w_2, w_3 , que queda

$$\lambda_1(\mathbf{w}) = \frac{w_2}{w_1} - \sqrt{gw_1}, \quad \lambda_2(\mathbf{w}) = \frac{w_2}{w_1}, \quad \lambda_3(\mathbf{w}) = \frac{w_2}{w_1} + \sqrt{gw_1}, \quad (1.160)$$

do cal

$$\nabla \lambda_2(\mathbf{w}) = \left(-\frac{w_2}{w_1^2} \quad \frac{1}{w_1} \quad 0 \right), \quad \nabla \lambda^\pm(\mathbf{w}) = \left(-\frac{w_2}{w_1^2} \pm \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{w_1}} \quad \frac{1}{w_1} \quad 0 \right) \quad (1.161)$$

É inmediato que $\nabla \lambda_2(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) = 0$ e para os outros

$$\nabla \lambda^\pm(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}^\pm(\mathbf{w}) = \left(-\frac{u}{h} \pm \frac{a}{2h}, \frac{1}{h}, 0 \right) \cdot (1, u \pm a, v) = \pm \frac{3a}{2h} \neq 0. \quad (1.162)$$

As ecuacións separadas con fluxo na dirección de y , en lugar de x , involucran a matriz $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{w})$, mais supoñer o fluxo nesa dirección é o mesmo que supoñelo na outra cambiando os papeis de x e y e de u e v . Isto aparece reflectido nas matrices $\nabla \mathbf{F}$ e $\nabla \mathbf{G}$, pois para pasar de unha a outra simplemente hai que intercambiar as filas e columnas 2 e 3 e u por v ou viceversa. Despois desta reflexión é inmediato que os valores propios de $\nabla \mathbf{G}$ son

$$\lambda_1 = v - a, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + a, \quad (1.163)$$

e os vectores propios asociados

$$\mathbf{r}_1 = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v - a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v + a \end{pmatrix}, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.164)$$

Adiantamos que as ecuacións unidimensionais e as linearizadas tamén conforman sistemas hiperbólicos de leis de conservación. Explicitaremos tamén para estes, no que resta de capítulo, os valores e vectores propios asociados.

Volvendo ás ecuacións unidimensionais (1.114), temos que

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + \frac{1}{2}gw_1^2 \end{pmatrix} \implies \nabla \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}. \quad (1.165)$$

A continuación resolvemos o polinomio característico,

$$\begin{aligned} \det(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w}) - \lambda \mathbf{I}) = 0 &\iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \\ &\iff -\lambda(2u - \lambda) + u^2 - a^2 = 0 \iff \\ &\iff (\lambda - u)^2 - a^2 = 0 \iff \lambda = u \pm a. \end{aligned} \quad (1.166)$$

Os valores propios para o sistema unidimensional son

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u + a. \quad (1.167)$$

Seguidamente, usamos a notación abreviada como en (1.155) e resolvemos os sistemas compatibles indeterminados

$$(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w}) - \lambda^\pm \mathbf{I}) \mathbf{r}^\pm = \mathbf{0}. \quad (1.168)$$

Os sistemas escríbense da forma

$$\begin{pmatrix} -(u \pm a) & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u - (u \pm a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^\pm_1 \\ r^\pm_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.169)$$

e redúcense ás relacións

$$r^\pm_2 = (u \pm a)r^\pm_1, \quad (1.170)$$

con r^\pm_1 como parámetro libre, polo que os vectores propios para este sistema son

$$\mathbf{r}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.171)$$

Finalmente, para as ecuacións linearizadas basta ver o mesmo para as ecuacións que acabamos de analizar, pero escritas en termos das variables primitivas. En dúas dimensións,

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (1.172)$$

e trivialmente temos que os valores propios son

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a. \quad (1.173)$$

O vector propio asociado a λ_2 é evidentemente

$$\mathbf{r}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.174)$$

con $\alpha_2 \neq 0$ como parámetro, e os asociados a λ_1 e λ_3 vese que terán terceira compoñente nula, polo que facilmente resulta en que son

$$\mathbf{r}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} h \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} h \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.175)$$

sendo $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ parámetros. Para o caso unidimensional simplemente suprimiríamos λ_2 e \mathbf{r}_2 e a terceira compoñente dos outros vectores propios.

Capítulo 2

Algunhas solucións analíticas

Obter solucións analíticas para as ecuacións das augas pouco profundas, ou máis amplamente para sistemas hiperbólicos de leis de conservación, no caso xeral, é unha tarefa de marcada dificultade ou mesmo imposible. Nestes casos, como é habitual, recórrese ao uso de métodos numéricos para obter solucións aproximadas para as ecuacións. É por isto que os casos particulares nos que nos fixaremos serán o caso linear e o problema de Riemann, que permitirán o deseño e validación de métodos numéricos da clase de volumes finitos, que presentaremos no seguinte capítulo.

Comezaremos introducindo o concepto de curvas características, que resultará de importancia ao longo do capítulo para obter solucións analíticas e seguir afondando na teoría dos sistemas hiperbólicos, a cal se discute en profundidade en [3], [4], [6], [7], [9].

Na sección 2.3, presentaremos o problema de Riemann, crucial para o desenvolvemento do método de volumes finitos, e obteremos a solución deste para as ecuacións das augas pouco profundas nunha dimensión espacial con fondo húmido ($h > 0$). Para estender ao caso de que h se anule (fondo seco), ver [2] ou [10].

2.1. Método das características

Mergullémonos momentaneamente no ámbito da xeometría diferencial. Expoñeremos algúns conceptos que usaremos para presentar o *método das características*. Para unha visión máis detallada consúltese [8].

Consideremos unha variedade diferenciable de dimensión m , M , con coordenadas locais

(x_1, \dots, x_m) , e sexa T_pM o espazo tanxente a M no punto $p \in M$. Chamamos *fibrado tanxente* a

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v_p) / p \in M, v_p \in T_pM\}, \quad (2.1)$$

que é unha variedade diferenciable de dimensión $2m$.

Definición 2.1 (Campo de vectores tanxentes). Un *campo de vectores tanxentes*, ou simplemente *campo de vectores*, en M é unha sección de TM , é dicir, unha aplicación continua entre variedades

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X(p) = X_p, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde X_p é un vector tanxente de T_pM . Denótase por $\mathfrak{X}(M)$ ao conxunto de todos os campos de vectores tanxentes en M .

Dadas unhas coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) en M , o espazo tanxente T_pM é un espazo vectorial con base

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_p \right\}, \quad (2.3)$$

cuxos elementos reciben o nome de *vectores coordenados*, caracterizados por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_j) = \delta_i^j, \quad (2.4)$$

onde δ_i^j é a delta de Kronecker. Así, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos expresalo en base ás coordenadas locais como

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.5)$$

sendo $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M)$ os campos de vectores que cumpren

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \quad (2.6)$$

e $X^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funcións continuas, de modo que

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p. \quad (2.7)$$

O campo de vectores X dirase a maiores diferenciable se é diferenciable como aplicación entre variedades, o cal equivalerá a que as funcións X^i sexan diferenciables.

Definición 2.2 (Curva integral). Sexa $X \in \mathfrak{X}(M)$. Unha *curva integral* de X é unha curva diferenciable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ que cumpre

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M. \quad (2.8)$$

Supoñamos agora que temos unha EDP (ecuación en derivadas parciais) cuasilinear

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, w) \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, w) = 0, \quad (2.9)$$

onde $a_i, b : U \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funcións continuamente diferenciables, con solución $w : U \rightarrow \Omega$.

Consideremos a variedade diferenciable $M = U \times \Omega$ con coordenadas locais (x_1, \dots, x_n, u) e sexa $X \in \mathfrak{X}(M)$ o campo de vectores dado por

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.10)$$

Atopar a solución w da EDP (2.9) equivale a atopar a hipersuperficie $S \subset M$ dada polo grafo da función w ,

$$S = \{(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) \in M / \mathbf{x} \in U\}. \quad (2.11)$$

Sexa $p = (\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) \in S$, $\mathbf{x} \in U$. Dado que $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, w(\mathbf{x}))$ parametriza a hipersuperficie S , o seu espazo tanxente $T_p S \subset T_p M$ ten base

$$B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p + \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \right\}. \quad (2.12)$$

Como X é tamén un campo de vectores tanxentes de $S \subset M$, $X(p)$ deberá ser un vector tanxente a S en $p = (\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) \in S$, e terá unhas coordenadas $\{X^i(p)\}$ na base B_p . Polo tanto,

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p + b(p) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p + \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \right), \quad (2.13)$$

e comparando os coeficientes chegamos á conclusión de que debe verificarse

$$\begin{cases} X^i(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) = a_i(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})), & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})). \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})) \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, w(\mathbf{x})). \quad (2.15)$$

Supoñamos que coñecemos a solución nalgún punto $\mathbf{x}^0 \in U$. Sexa $p^0 = (\mathbf{x}^0, w(\mathbf{x}^0)) \in S$. Se consideramos a curva integral $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \Gamma) : I \rightarrow S$ de X que pasa por p^0 a tempo $0 \in I$, entón por definición temos que se cumpre

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)). \quad (2.16)$$

Como $\gamma \subset S$, é necesario que $\Gamma(t) = w(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, do cal tense

$$\Gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \frac{\partial w}{\partial x_i}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad (2.17)$$

que sumado ás relacións que acabamos de obter quere dicir que

$$\begin{cases} \gamma'_i(t) = X^i(\gamma(t)) = a_i(\gamma(t)), & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \Gamma'(t) = b(\gamma(t)), \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \gamma(0) = (\mathbf{x}^0, w(\mathbf{x}^0)). \end{cases} \quad (2.20)$$

Con este sistema de ecuacións diferenciais ordinarias somos capaces de achar a solución ao longo da curva $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, a cal recibe o nome de *curva característica*, ou simplemente *característica*.

Repetindo este proceso para distintos puntos de S , proporcionados por condicións iniciais ou de contorno da EDP orixinal, logramos reconstruír a hipersuperficie da solución S , polo menos localmente, e isto proporciona a solución w ao longo das curvas características, dando lugar ao que se coñece como *método das características*.

Podemos destacar a maiores que unha ecuación escalar hiperbólica sempre se pode escribir en forma cuasilinear e as curvas características sempre serán da forma $(\mathbf{x}(t), t)$. Se ademais a ecuación é homoxénea, entón a solución w é constante ao longo das características, e dada unha condición inicial $w(\mathbf{x}, 0) = w^0(\mathbf{x})$,

$$w(\mathbf{x}(t), t) = w^0(\mathbf{x}(0)), \quad (2.21)$$

nun intervalo de definición axeitado.

2.2. Resolución de sistemas hiperbólicos lineares 1D

Os sistemas hiperbólicos máis sinxelos que podemos considerar son os lineares, que en forma xeral reciben o nome do *problema do transporte*. Esta sinxeleza permitíranos achar solucións analíticas explícitas, o cal é moi desexable para a construción e validación de métodos numéricos.

Ao longo desta sección mostraremos como achar a solución do problema de transporte, comezando co caso escalar, e seguindo co caso vectorial e a presenza de termos fonte, apoiándonos secuencialmente na solución do anterior. Finalizaremos aplicando estes resultados ao caso particular no que as ecuacións a tratar sexan as SWE linearizadas.

2.2.1. Ecuación do transporte escalar

Para resolver sistemas hiperbólicos lineares, primeiro temos que saber como resolver a ecuación do transporte escalar,

$$\begin{cases} q_t + \lambda q_x = 0, \\ q(x, 0) = q^0(x). \end{cases} \quad (2.22)$$

En base ao discutido na sección 2.1, dado $x \in \mathbb{R}$, ao longo das curvas características $(t(s), X(s))$ cúmprese que

$$\begin{cases} X'(s) = \lambda, & (2.23) \\ t'(s) = 1, & (2.24) \\ \frac{d}{ds}q(X(s), t(s)) = 0, & (2.25) \\ (X(0), t(0), q(X(0), t(0))) = (x, 0, q^0(x)). & (2.26) \end{cases}$$

Como xa destacamos con anterioridade, as curvas características serán da forma $(X(t), t)$, así que diremos que as características cumpren, en xeral,

$$\frac{dX}{dt}(t) = \lambda, \quad (2.27)$$

e ademais q será constante ao longo delas, como podemos comprobar tamén facendo uso directo da EDP (2.22):

$$\frac{d}{dt}q(X(t), t) = q_x(X(t), t)\frac{dX}{dt}(t) + q_t(X(t), t) = q_t(X(t), t) + q_x(X(t), t)\lambda = 0. \quad (2.28)$$

Para obter a solución global, consideramos un punto arbitrario (x, t^*) e a curva característica que pasa polo mesmo, $X(t)$, que cumpre

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = \lambda, \\ X(t^*) = x. \end{cases} \quad (2.29)$$

Se integramos entre 0 e t^* , temos que

$$X(t^*) - X(0) = \int_0^{t^*} \frac{dX}{dt}(t)dt = \int_0^{t^*} \lambda dt = \lambda t^*, \quad (2.30)$$

é dicir,

$$X(0) = x - \lambda t^*. \quad (2.31)$$

A solución en (x, t) será, entón, por ser constante ao longo da curva X ,

$$q(x, t) = q(X(t), t) = q(X(0), 0) = q(x - \lambda t, 0) = q^0(x - \lambda t). \quad (2.32)$$

A interpretación disto é que dada unha condición inicial $q^0(x)$, a solución de (2.22) será simplemente transportar dita condición na traxectoria das curvas características, que son rectas paralelas, a velocidade λ , que chamaremos *velocidade característica*. Nótese que os valores propios das SWE teñen todas unidades de velocidade (m/s), o cal mantén a coherencia física desta interpretación. Na figura 2.1 ilústrase no plano $x - t$ o que vimos de contar.

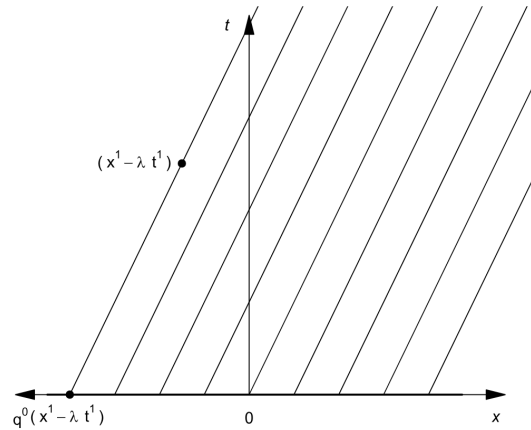


Figura 2.1: Obtención da solución do problema do transporte escalar por medio das rectas características.

2.2.2. Sistemas lineares

Como vimos na sección 1.3, os sistemas hiperbólicos de leis de conservación unidimensionais caracterízanse por que os valores propios da matriz xacobiana do fluxo sexan todos reais, e os correspondentes vectores propios sexan linealmente independentes. Nese caso, dita matriz é diagonalizable. Aplicando esta caracterización a un sistema linear, podemos, coa solución obtida para a ecuación do transporte escalar, conseguir unha para o caso vectorial.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}(x, 0) = \mathbf{q}^0(x), \end{cases} \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ten todos os valores propios reais e os vectores propios son linealmente independentes. Entón \mathbf{A} é diagonalizable, o cal implica que existe unha matriz invertible \mathbf{P} (cuxas columnas son os vectores propios de cada valor propio λ_i) que cumpre

$$\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}, \quad (2.34)$$

sendo $\mathbf{\Lambda}$ unha matriz diagonal cos valores propios na diagonal principal (na mesma orde que os correspondentes vectores propios nas columnas de \mathbf{P}).

Tomemos o cambio de variable

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{u} \quad (2.35)$$

e substituíámolo na ecuación (2.33):

$$(\mathbf{P}\mathbf{u})_t + \mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

polo que

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Multiplicando por \mathbf{P}^{-1} pola esquerda obtemos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{u}_t + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Chegado aquí, o sistema (2.38) é diagonal, así que as variables u_i non interaccionan unhas con outras e cada ecuación do sistema pode resolverse de maneira independente como a ecuación do transporte escalar

$$\begin{cases} (u_i)_t + \lambda_i(u_i)_x = 0, \\ u_i(x, 0) = u_i^0(x). \end{cases} \quad (2.39)$$

A condición inicial para a variable \mathbf{u} vén dada por

$$\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{q}^0(x), \quad (2.40)$$

polo que a partir da solución (2.32) que obtivemos para o problema do transporte escalar, a solución de (2.39) será

$$u_i(x, t) = u_i^0(x - \lambda_i t). \quad (2.41)$$

Unha vez resolto o sistema diagonal (2.38), a solución para o sistema orixinal (2.33) resulta de desfacer o cambio de variable

$$\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{P}\mathbf{u}(x, t) \quad (2.42)$$

2.2.3. Sistemas lineares con termos fonte

Engadamos agora a complexidade da presenza de termos fonte nun sistema hiperbólico linear, seguindo o traballo de [5]. Trataremos de resolver sistemas da forma

$$\mathbf{q}_t(x, t) + \mathbf{A}\mathbf{q}_x(x, t) = \mathbf{S}(x). \quad (2.43)$$

Sabemos que o sistema (2.43) pode diagonalizarse, dando lugar a unha colección de problemas escalares lineares que terán tamén termos fonte que dependen da variable espacial x . Debido a isto, bastará coñecer a solución das ecuacións escalares do tipo

$$q_t(x, t) + \lambda q_x(x, t) = s(x). \quad (2.44)$$

Xa determinamos que dada calquera condición inicial, $q(x, 0) = q^0(x)$, a función $q^0(x - \lambda t)$ é solución do correspondente problema homoxéneo asociado. O mellor escenario posible para a resolución de (2.44) é que q non dependa de t ; digamos,

$$q(x, t) = r(x). \quad (2.45)$$

Neste caso a condición inicial tería que vir dada por $r(x_0) = r_0$, e a EDP redúcese á EDO

$$\lambda r'(x) = s(x), \quad (2.46)$$

con solución

$$r(x) = r_0 + \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^x s(\xi) d\xi. \quad (2.47)$$

De sumar esta solución, $r(x)$ á solución do problema homoxéneo, $q^0(x - \lambda t)$, obteríamos unha función que cumpre (2.44), mais en $t = 0$ non se verificaría en xeral a condición inicial. A forma de solucionar isto é simplemente escoller condicións iniciais axeitadas para o problema homoxéneo e o reducido, de modo que se siga verificando a EDP pero tamén a condición inicial.

Escollamos $r_0 = 0$, de modo que

$$r(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^x s(\xi) d\xi, \quad (2.48)$$

e sexa $\hat{q}(x) = q^0(x) - r(x)$. Entón

$$q(x, t) = \hat{q}(x - \lambda t) + r(x) \quad (2.49)$$

é solución de (2.44) para a condición inicial

$$q(x, 0) = q^0(x) = \hat{q}(x) + r(x). \quad (2.50)$$

Volvendo ao sistema (2.43), repetindo os argumentos da sección 2.2.2 chegamos ao sistema equivalente

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}_x = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}(x). \quad (2.51)$$

Unha solución do sistema diagonalizado reducido é

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{\Lambda}^{-1} \int_{x_0}^x \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}(\xi) d\xi = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \int_{x_0}^x \mathbf{S}(\xi) d\xi, \quad (2.52)$$

polo que dada unha condición inicial $\mathbf{q}(x, 0) = \mathbf{q}^0(x)$ do sistema orixinal, definimos

$$\hat{\mathbf{u}}(x) := \mathbf{u}^0(x) - \mathbf{r}(x) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}^0(x) - \mathbf{r}(x), \quad (2.53)$$

que será solución do sistema diagonalizado homoxéneo, e entón a solución (por compoñentes) do sistema diagonalizado é

$$u_i(x, t) = \hat{u}_i(x - \lambda_i t) + r_i(x). \quad (2.54)$$

A solución do sistema orixinal pode recuperarse desfecendo o cambio de variable $\mathbf{q} = \mathbf{P} \mathbf{u}$.

2.2.4. Aplicación ás ecuacións das augas pouco profundas linearizadas

Para ilustrar o uso do que levamos feito ata agora en relación aos sistemas lineares hiperbólicos, acharemos a solución explícita das ecuacións das augas pouco profundas en canles de perfil rectangular con anchura e fondo, $B(x)$ e $b(x)$, variables, tras ser linearizadas.

Recuperando o sistema (1.110)-(1.111), despois de linearizalo seguindo o segundo procedemento discutido na sección 1.2.1.3, temos o sistema hiperbólico

$$\mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u}_x = \mathbf{S}(x), \quad (2.55)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{h} \\ g & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{h}\bar{u}\frac{B'(x)}{B(x)} \\ 2\bar{u}^2\frac{B'(x)}{B(x)} - gb'(x) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

e os coeficientes \bar{h} e \bar{u} son constantes e foron escollidos axeitadamente. Supoñamos ademais que coñecemos o valor de \mathbf{u} a tempo $t = 0$,

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) = \begin{pmatrix} h^0(x) \\ u^0(x) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Ao final da sección 1.3.1 indicamos que os valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$ son

$$\lambda_1 = \bar{u} - a, \quad \lambda_2 = \bar{u} + a, \quad (2.58)$$

sendo $a = \sqrt{g\bar{h}}$, e a matriz de cambio de base de vectores propios

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \bar{h} & \bar{h} \\ -a & a \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Un rápido cálculo resulta en

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{h}} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{\bar{h}} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Comezamos por obter a función $\mathbf{r} = (r_1 \ r_2)^T$ dada por (2.52),

$$\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \int_{x_0}^x \mathbf{S}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 \bar{h}} & -\frac{1}{\lambda_1 a} \\ \frac{1}{\lambda_2 \bar{h}} & \frac{1}{\lambda_2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{h}\bar{u} \log\left(\frac{B(x)}{B(x_0)}\right) \\ 2\bar{u}^2 \log\left(\frac{B(x)}{B(x_0)}\right) - g(b(x) - b(x_0)) \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

As funcións r_1 e r_2 son, logo,

$$r_1(x) = \frac{1}{2\lambda_1 a} \left(-\bar{u}(2\bar{u} + a) \log\left(\frac{B(x)}{B(x_0)}\right) + g(b(x) - b(x_0)) \right), \quad (2.62)$$

$$r_2(x) = \frac{1}{2\lambda_2 a} \left(\bar{u}(2\bar{u} - a) \log\left(\frac{B(x)}{B(x_0)}\right) + g(b(x) - b(x_0)) \right). \quad (2.63)$$

A solución do problema diagonalizado homoxéneo, $\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \end{pmatrix}^T$, dada por (2.53),

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^0(x)}{\bar{h}} - \frac{u^0(x)}{a} \right) - r_1(x), \quad (2.64)$$

$$\hat{u}_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^0(x)}{\bar{h}} + \frac{u^0(x)}{a} \right) - r_2(x). \quad (2.65)$$

As solucións para a altura e a velocidade media da columna de auga veñen entón dadas por

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \bar{h} (\hat{u}_1(x - \lambda_1 t) + \hat{u}_2(x - \lambda_2 t)) + \bar{h} (r_1(x) + r_2(x)) \\ &= \frac{1}{2} (h^0(x - \lambda_1 t) + h^0(x - \lambda_2 t)) + \frac{\bar{h}}{2a} (u^0(x - \lambda_1 t) - u^0(x - \lambda_2 t)) \\ &\quad + \bar{h} (r_1(x) - r_1(x - \lambda_1 t) + r_2(x) - r_2(x - \lambda_2 t)), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a (-\hat{u}_1(x - \lambda_1 t) + \hat{u}_2(x - \lambda_2 t)) + a (-r_1(x) + r_2(x)) \\ &= \frac{a}{2\bar{h}} (-h^0(x - \lambda_1 t) + h^0(x - \lambda_2 t)) + \frac{1}{2} (u^0(x - \lambda_1 t) + u^0(x - \lambda_2 t)) \\ &\quad + a (r_1(x - \lambda_1 t) - r_1(x) + r_2(x) - r_2(x - \lambda_2 t)). \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.3. O problema de Riemann

Cando falamos dun *problema de Riemann* referímonos a un problema de valor inicial no que os datos iniciais consisten de dous estados, separados por unha singularidade. Estes estados son comunmente constantes, mais o problema pode xeneralizarse para que non o sexan, dando lugar ao *problema de Riemann xeneralizado*, presentado en [10], que é de vital importancia para a obtención de métodos numéricos de volumes finitos de alta orde. Nesta sección poñeremos o foco de atención ao problema de Riemann clásico, con estados iniciais constantes, para as ecuacións das augas pouco profundas profundas 1D, (1.84), con fondo plano

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t + \mathbf{F}(\mathbf{w})_x = \mathbf{0} \\ \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{se } x < 0, \\ \mathbf{w}_R & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.68)$$

onde

$$\mathbf{w}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ h_L u_L \\ h_L v_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ h_R u_R \\ h_R v_R \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Baixo esta configuración, é de esperar que debamos ampliar o que entendemos por solución dun problema de valor inicial. É por iso que a continuación introduciremos o concepto de solución débil e explicaremos que as singularidades da solución deben ter un comportamento concreto.

2.3.1. Solucións débiles de sistemas hiperbólicos

No capítulo 1 sinalamos que as leis de conservación admiten unha forma diferencial, a formulación forte, e outra integral, a formulación débil. A primeira admite solucións fortes, ou clásicas, que teñen a condición de ser regulares, mentres que a segunda desfaieste destas condicións de regularidade, sendo válidas solucións non diferenciábeles globalmente ou que presentan descontinuidades: solucións débiles. O obxectivo é formalizar a idea de solución débil no marco xeral de sistemas hiperbólicos de leis de conservación e caracterizar estas solucións.

Definición 2.3 (Solución débil). Sexan $W \subset \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{w}^0 \in L_{loc}^\infty(W)^{m1}$. Unha función $\mathbf{w} \in L_{loc}^\infty(W \times [0, \infty))^m$ dise que é unha *solución débil* dun sistema hiperbólico de leis de conservación (1.132), con condición inicial \mathbf{w}^0 , se, para calquera función $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(W \times [0, \infty))^{m2}$,

$$\int_0^\infty \int_W \left(\mathbf{w} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx dt + \int_W \mathbf{w}^0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) dx = 0. \quad (2.70)$$

Se $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_0^1(W \times [0, \infty))^m$, entón usando a fórmula de Green chegamos a que (2.70) equivale a

$$\int_0^\infty \int_W \left(\mathbf{w}_t + \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i(\mathbf{w})_{x_i} \right) \cdot \varphi dx dt = 0, \quad (2.71)$$

co cal \mathbf{w} sería unha solución no sentido clásico (forte). As solucións fortes son tamén en particular solucións débiles.

Supoñamos agora que \mathbf{w} non é continuamente diferenciábeles, senón \mathcal{C}^1 a anacos.

Definición 2.4 (Función \mathcal{C}^1 a anacos). Unha función $\mathbf{w} \in L_{loc}^\infty(W \times [0, \infty))^m$ dise \mathcal{C}^1 a anacos se existen un número finito de superficies orientábeles diferenciábeles, $\mathcal{S} \subset W \times [0, \infty)$, tales que \mathbf{w} é \mathcal{C}^1 fóra destas superficies e presenta unha descontinuidade de salto nestas superficies.

A vantaxe de traballar con sistemas hiperbólicos de leis de conservación é que non todas as descontinuidades son válidas, como veremos a continuación. Sexa \mathbf{w} unha función \mathcal{C}^1 a anacos. Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que só presenta unha superficie de descontinuidades, \mathcal{S} , pois \mathbf{w} é \mathcal{C}^1 nos abertos que as separan. Sexa $\mathbf{n} = (n_{x_1}, \dots, n_{x_p}, n_t)$ o vector normal a \mathcal{S} . Denotemos por \mathbf{w}^+ e \mathbf{w}^- ás funcións

$$\mathbf{w}^\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \pm \varepsilon \mathbf{n}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}, \quad (2.72)$$

e definamos os saltos sobre \mathcal{S}

$$[\mathbf{w}] := \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-, \quad [\mathbf{F}_i(\mathbf{w})] := \mathbf{F}_i(\mathbf{w}^+) - \mathbf{F}_i(\mathbf{w}^-). \quad (2.73)$$

¹ $L_{loc}^\infty(V) = \{f \in L^\infty(V) / f \text{ localmente integrable}\}.$

² $\mathcal{C}_0^n(V) = \{f \in \mathcal{C}^n(V) \text{ con soporte compacto}\}.$

Teorema 2.5. *Unha función \mathbf{w} de \mathcal{C}^1 a anacos é solución débil de (1.133) se, e só se,*

1. \mathbf{w} é solución forte onde é \mathcal{C}^1 ,
2. \mathbf{w} verifica as condicións de salto

$$[\mathbf{w}]n_t + \sum_{i=1}^p [\mathbf{F}_i(\mathbf{w})]n_{x_i} = 0 \quad (2.74)$$

sobre as superficies de discontinuidades.

As condicións (2.74) teñen por nome *condicións de salto de Rankine-Hugoniot*, e establecen que os saltos que se producen a través das superficies de discontinuidades seguen unha relación entre os estados a ambos lados da discontinuidade. Podemos destacar ademais que estas condicións sempre se cumpren aló onde \mathbf{w} sexa continua. Se $p = 1$, \mathcal{S} é unha curva regular con parametrización $(t, X(t))$, co que teremos

$$[\mathbf{F}(\mathbf{q})] = s[\mathbf{q}], \quad s = \frac{dX}{dt}. \quad (2.75)$$

Traballar coa formulación débil permítenos establecer a búsqueda de solucións que non sexan regulares, o cal amplía o rango de problemas de valor inicial que podemos tratar. Porén, as solucións débiles teñen a particularidade de non ser, en xeral, únicas. Polo tanto, se deseñamos algún método de obtención de solucións débiles para algún problema en particular, aínda que matematicamente sexan correctas, poden carecer totalmente de sentido físico. Para limitar as nosas posibles solucións e aterrar naquela que teña sentido físico, existen unha serie de condicións, chamadas *condicións de entropía*, que permitirán xusto isto. Poden consultarse en [3], [4] ou [6], e, aínda que a súa análise queda fóra dos obxectivos deste traballo, debemos notar que son fundamentais á hora de obter solucións analíticas e no deseño de métodos numéricos.

2.3.2. Propagación de ondas

Regresemos ao problema de Riemann para un sistema hiperbólico. Fixémonos en que (2.68) é invariante mediante a transformación $(x, t) \mapsto (\alpha x, \alpha t)$ co factor de escala $\alpha > 0$. Isto quere dicir que a solución será autosimilar, é dicir, dependente do cociente $\xi = \frac{x}{t}$,

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{W}\left(\frac{x}{t}\right), \quad (2.76)$$

para algunha función $\mathbf{W} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ diferenciable. Substituíndo (2.76) na EDP cuasilinearizada do sistema hiperbólico, queda

$$-\frac{x}{t^2} \mathbf{W}'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} \nabla \mathbf{F}\left(\mathbf{W}\left(\frac{x}{t}\right)\right) \mathbf{W}'\left(\frac{x}{t}\right) = \mathbf{0}, \quad (2.77)$$

e tomando $\xi = \frac{x}{t}$ chegamos a

$$-\xi \mathbf{W}'(\xi) + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{W}(\xi)) \mathbf{W}'(\xi) = \mathbf{0}, \quad (2.78)$$

ou equivalentemente,

$$(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{W}(\xi)) - \xi \mathbf{I}) \mathbf{W}'(\xi) = \mathbf{0}. \quad (2.79)$$

Habería que resolver entón a EDO

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{F}(\mathbf{W}(\xi)) - \xi \mathbf{I}) \mathbf{W}'(\xi) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}(-\infty) = \mathbf{w}_L, \quad \mathbf{W}(+\infty) = \mathbf{w}_R. \end{cases} \quad (2.80)$$

A ecuación (2.79) implica que $\mathbf{W}'(\xi)$ é ou ben $\mathbf{0}$, ou ben un vector propio da matriz $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{W}(\xi))$ asociado ao valor propio ξ .

A solución de (2.68) terá logo unha forma moi concreta. No caso unidimensional, teremos tres estados constantes separados por *ondas* de dous tipos: *ondas de rarefacción* e *ondas de choque*. Estas ondas serán características pasando pola orixe, relacionadas cos k -campos característicos, e dividirán o plano $x - t$ en tres rexións nas que se atoparán os tres estados constantes. Nas rexións dos extremos atoparanse os estados iniciais, \mathbf{w}_L e \mathbf{w}_R , mentres que na rexión do medio, que chamaremos *rexión estrela*, estará o outro estado constante, \mathbf{w}_* , que teremos que calcular. Se engadimos a segunda dimensión, incluíndo a ecuación do momento en y , a estrutura da solución será idéntica, salvo na rexión estrela, a cal se dividirá en outras dúas rexións en presenza das *ondas de corte*, que estarán sempre relacionadas co 2-campo característico. Estas curvas características asociadas aos campos k -característicos dos que falamos son as curvas $(X(t), t)$ que cumpren

$$\frac{dX}{dt}(t) = \lambda_k(\mathbf{w}(X(t), t)). \quad (2.81)$$

Estudaremos cada onda por separado para despois combinar cada posibilidade e ensamblar a solución global. Faremos uso do seguinte concepto.

Definición 2.6 (Invariantes de Riemann). Unha función $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dirase que é un k -invariante de Riemann se verifica

$$\nabla w(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (2.82)$$

Un k -invariante de Riemann será constante ao longo dunha curva $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ se, e só se,

$$0 = \frac{d}{d\xi} w(\varphi(\xi)) = \nabla w(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi), \quad (2.83)$$

o cal se verifica cando a curva φ é unha curva integral de \mathbf{r}_k :

$$\varphi'(\xi) = \mathbf{r}_k(\varphi(\xi)). \quad (2.84)$$

Para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ existirán $m - 1$ k -invariantes de Riemann cuxos gradientes son linearmente independentes. Unha particularidade dos invariantes de Riemann é que a súa existencia é independente da elección de variables, polo que podemos traballar coa formulación conservativa e non conservativa segundo nos conveña.

2.3.2.1. Ondas de rarefacción

Volvendo á EDO (2.80), supoñamos que $\mathbf{W}'(\xi) \neq \mathbf{0}$. Entón existirá un índice k tal que

$$\mathbf{W}'(\xi) = \alpha(\xi)\mathbf{r}_k(\mathbf{W}(\xi)), \quad \xi = \lambda_k(\mathbf{W}(\xi)), \quad (2.85)$$

sendo λ_k e \mathbf{r}_k un valor propio da matriz $\nabla \mathbf{F}$ e o seu vector propio asociado, que supoñemos normalizado mediante $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k = 1$. Derivando respecto de ξ na segunda igualdade de (2.85) obtemos

$$1 = \nabla \lambda_k(\mathbf{W}(\xi)) \cdot \mathbf{W}'(\xi) = \alpha(\xi) \nabla \lambda_k(\mathbf{W}(\xi)) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}(\xi)), \quad (2.86)$$

que cando o campo k -característico é xenuinamente non linear ten solución e, pola normalización, $\alpha(\xi) = 1$, co cal \mathbf{W} é unha curva integral de \mathbf{r}_k . Supoñendo que \mathbf{w}_L e \mathbf{w}_R están na mesma curva integral de \mathbf{r}_k , $\lambda_k(\mathbf{w}_L) < \lambda_k(\mathbf{w}_R)$ e $\mathbf{W}(\lambda_k(\mathbf{w}_L)) = \mathbf{w}_L$ e $\mathbf{W}(\lambda_k(\mathbf{w}_R)) = \mathbf{w}_R$, podemos garantir que

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_L), \\ \mathbf{W}\left(\frac{x}{t}\right), & \lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R), \\ \mathbf{w}_R, & \frac{x}{t} \geq \lambda_k(\mathbf{w}_R), \end{cases} \quad (2.87)$$

é unha solución autosimilar débil e continua do sistema hiperbólico, que recibirá o nome de *k-onda de rarefacción*. A función $\mathbf{W}(\xi)$ conectará os estados \mathbf{w}_L e \mathbf{w}_R de maneira continua como se ensina na figura (2.2). Referirémonos ao anaco central como a zona de abano. Por construción das k -ondas de rarefacción, teremos que os k -invariantes de Riemann serán constantes sobre estas ondas. Supoñamos agora que a solución do problema (2.68) consiste nunha onda de rarefacción. Se a onda de rarefacción está asociada ao campo 1-característico diremos que a onda é pola esquerda, mentres que se está asociada a λ_3 , pola dereita. Trataremos de relacionar os estados constantes a ambos lados da onda usando os dous k -invariantes de Riemann a partir da forma non conservativa; estes estados serían

$$\mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ u_L \\ v_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ u_R \\ v_R \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Como a zona de abano é curva integral de \mathbf{r}_k , $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ cumprirá (2.84), que podemos resumir caulitativamente nas relacións

$$\frac{du_1}{r_{k1}} = \frac{du_2}{r_{k2}} = \frac{du_3}{r_{k3}}, \quad (2.89)$$

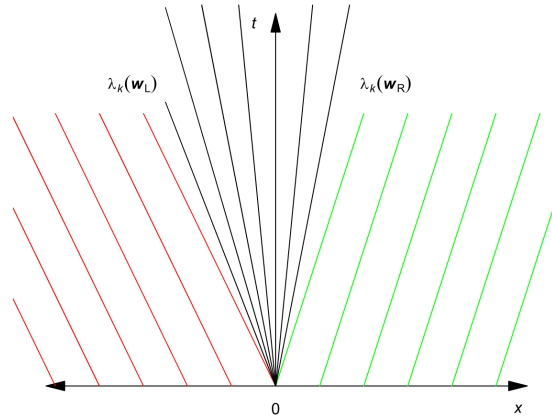


Figura 2.2: Estrutura das características para unha onda de rarefacción asociada ao campo característico λ_k .

que darán lugar aos invariantes de Riemann que buscamos.

Por simetría dos $\lambda_1(\mathbf{u})$ e $\lambda_3(\mathbf{u})$ campos característicos, resolveremos ambos casos á vez, poñendo $\lambda_1 = \lambda^-$, $\lambda_3 = \lambda^+$ e naturalmente, como calculamos na sección 1.2.1.3,

$$\mathbf{r}^\pm = (h, \pm a, 0)^T. \quad (2.90)$$

As relacións (2.89) convértense en

$$\frac{dh}{h} = \frac{du}{\pm a} = \frac{dv}{0}. \quad (2.91)$$

O último cociente implica que $v = cte$. (este sería o primeiro invariante de Riemann). Da primeira igualdade temos, dado que $a = \sqrt{gh}$,

$$0 = du - \frac{\pm a}{h} dh = du \mp \frac{g}{a} dh. \quad (2.92)$$

Como $h = \frac{a^2}{g}$, $dh = \frac{2a}{g} da$, e a igualdade anterior transfórmase na seguinte,

$$du \mp 2da = 0, \quad (2.93)$$

que se integramos dá lugar a que $u \mp 2a = cte$. (o segundo invariante de Riemann). As relacións que chegamos entre os estados constantes laterais son entón

$$u_L \mp 2a_L = u_R \mp 2a_R, \quad v_L = v_R, \quad (2.94)$$

para os $\lambda_1(\mathbf{u})$ e $\lambda_3(\mathbf{u})$ campos característicos, respectivamente.

2.3.2.2. Ondas de choque

Unha onda de choque é unha solución débil que transporta a discontinuidade, na que se produce o salto da solución inicial ($x = 0$), a velocidade s , é dicir,

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{se } x < st, \\ \mathbf{w}_R, & \text{se } x > st. \end{cases} \quad (2.95)$$

Lembremos que a solución (2.95) deberá cumprir as condicións de salto de Rankine-Hugoniot (2.74):

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L) = s(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L). \quad (2.96)$$

Estas ondas estarán relacionadas cos $\lambda_1(\mathbf{w})$ ou $\lambda_3(\mathbf{w})$ campos característicos, e para que teñan sentido físico deberán verificar a seguinte condición de entropía:

$$\lambda_k(\mathbf{w}_L) > s_k > \lambda_k(\mathbf{w}_R), \quad (2.97)$$

o cal quere dicir que as k -características coliden na recta $x - s_k t = 0$, ilustrado na figura 2.3. Este tipo de ondas de choque son de tipo *compresivo*, por este comportamento que vimos de destacar das características. Cando estea relacionada co primeiro campo característico diremos que apunta cara a esquerda, mentres que se está relacionada co terceiro diremos que apunta cara a dereita. Estudaremos ámbolos dous casos á vez usando o superíndice \pm , estando o $-$ relacionado con ondas de choque que apuntan cara a esquerda e o $+$ coas que apuntan cara a dereita, a partir das condicións de Rankine-Hugoniot.

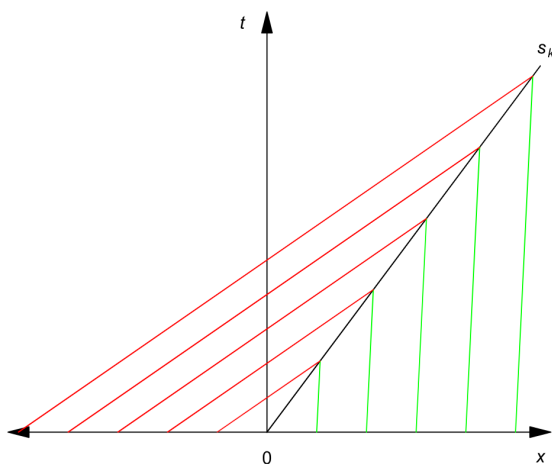


Figura 2.3: Estrutura das características para unha onda de choque asociada ao campo característico λ_k .

Partimos dos estados iniciais \mathbf{w}_L e \mathbf{w}_R , e supoñamos que a velocidade de propagación da onda

é s^\pm . Cambiemos o sistema de referencia para que se mova a esta velocidade, isto é,

$$\begin{cases} \hat{u}_L = u_L - s^\pm, & \hat{u}_R = u_R - s^\pm, \\ \hat{v}_L = v_L - s^\pm, & \hat{v}_R = v_R - s^\pm. \end{cases} \quad (2.98)$$

As condicións (2.96) baixo esta transformación son

$$\begin{cases} h_R \hat{u}_R = h_L \hat{u}_L, \\ h_R \hat{u}_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 = h_L \hat{u}_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2, \\ h_R \hat{u}_R \hat{v}_R = h_L \hat{u}_L \hat{v}_L. \end{cases} \quad (2.99)$$

Da primeira e terceira ecuación, automaticamente $\hat{v}_R = \hat{v}_L$. Denotemos por M^\pm ao *fluxo de masa* que atravesa a onda de choque. Pola primeira ecuación de (2.99) temos

$$M^\pm = \mp h_L \hat{u}_L = \mp h_R \hat{u}_R. \quad (2.100)$$

Substituíndo isto na segunda ecuación de (2.99),

$$\pm M^\pm \hat{u}_L - (\pm M^\pm) \hat{u}_R = \frac{1}{2} g (h_R^2 - h_L^2) \implies M^\pm = \pm \frac{1}{2} g \frac{(h_R + h_L)(h_R - h_L)}{\hat{u}_R - \hat{u}_L}. \quad (2.101)$$

De (2.100) temos

$$\hat{u}_R = \mp \frac{M^\pm}{h_R}, \quad \hat{u}_L = \mp \frac{M^\pm}{h_L}, \quad (2.102)$$

polo que podemos expresar o fluxo de masa en función da altura da columna de auga

$$M^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} g (h_R + h_L) h_R h_L}. \quad (2.103)$$

Para relacionar o fluxo de masa cas velocidades orixinais, de (2.98) temos

$$\hat{u}_R - \hat{u}_L = u_R - u_L, \quad (2.104)$$

polo que finalmente chegamos a

$$\begin{cases} u_R - u_L = \pm f^\pm(h_R, h_L), \\ f^\pm(h_R, h_L) = \mp (h_R - h_L) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h_R + h_L}{h_R h_L}}. \end{cases} \quad (2.105)$$

2.3.2.3. Ondas de corte

As ondas de corte son solucións descontínuas nas que se produce un salto relacionado co $\lambda_2(\mathbf{w})$ campo característico. Se traballamos coas variables físicas para atopar os dous 2-invariantes de Riemann, facendo uso de (2.89) e $\mathbf{r}_k = (0, 0, 1)^T$, temos

$$\frac{dh}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{1}, \quad (2.106)$$

co cal h e u serán constantes para as ondas de corte. Isto quere dicir que o salto se produce só para o valor de v , e necesariamente $h_L = h_R$ e $u_L = u_R$. Este salto deberá cumprir as condicións de Rankine-Hugoniot (2.75),

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L) = s(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L), \quad (2.107)$$

onde s é a velocidade de propagación da onda, que deberá ser $s = \lambda_2(\mathbf{w}_L) = \lambda_2(\mathbf{w}_R) = u_R = u_L$. Lembremos que esta onda producirase na rexión estrela.

2.3.3. Solución na rexión estrela

Despois do estudo das distintas ondas que poden estar presentes no problema (2.68), xa estamos en condicións de determinar o valor dos estados constantes presentes na rexión estrela. Resumamos as relacións que temos entre os estados constantes en función das ondas presentes.

Ondas do campo 1-característico

A onda que apunta cara a esquerda depende das velocidades características a ambos lados da onda. Cando $\lambda_1(\mathbf{w}_L) \leq \lambda_1(\mathbf{w}_*)$, ou equivalentemente $h_* \leq h_L$, haberá unha onda de rarefacción, mentres que se $\lambda_1(\mathbf{w}_L) > \lambda_1(\mathbf{w}_*)$ ($h_* > h_L$), unha onda de choque.

- Se a onda é de rarefacción, (2.94) dános

$$u_* = u_L - 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_L}). \quad (2.108)$$

- Se a onda é de choque, de (2.105) temos

$$u_* = u_L - (h_* - h_L) \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_* + h_L}{h_* h_L}}. \quad (2.109)$$

Neste caso, a velocidade de propagación da onda é

$$s_L = u_L - \frac{\sqrt{\frac{1}{2}g(h_* + h_L)h_* h_L}}{h_L}. \quad (2.110)$$

Ondas do campo 3-característico

Analogamente, a onda que apunta cara a dereita depende das velocidades características a ambos lados da onda. Se $\lambda_3(\mathbf{w}_*) \leq \lambda_3(\mathbf{w}_R)$ ($h_* \leq h_R$) haberá unha onda de rarefacción, mentres que se $\lambda_3(\mathbf{w}_*) > \lambda_3(\mathbf{w}_R)$ ($h_* > h_R$), terase unha onda de choque.

- Se a onda é de rarefacción, (2.94) dános

$$u_* = u_R + 2(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh_R}). \quad (2.111)$$

- Se a onda é de choque, de (2.105) temos

$$u_* = u_R + (h_* - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h_* + h_R}{h_* h_R}}. \quad (2.112)$$

Neste caso, a velocidade de propagación da onda é

$$s_R = u_R + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} g (h_* + h_R) h_* h_R}}{h_R}. \quad (2.113)$$

Ondas do campo 2-característico

Xa vimos que v se mantíña constante tanto nas ondas de choque como nas de rarefacción. Séguese entón que os dous valores de v na rexión estrela, v_{*L} e v_{*R} , son precisamente v_L e v_R , respectivamente, e a velocidade da propagación da onda de corte é $s_2 = u_*$.

Obtención de h_* e u_*

Se definimos as funcións

$$f_L(h, h_L) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_L}), & \text{se } h \leq h_L, \\ (h - h_L) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h+h_L}{hh_L}}, & \text{se } h > h_L, \end{cases} \quad (2.114)$$

$$f_R(h, h_R) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_R}), & \text{se } h \leq h_R, \\ (h - h_R) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h+h_R}{hh_R}}, & \text{se } h > h_R, \end{cases} \quad (2.115)$$

entón a través das relacións obtidas é claro que h_* cumpre

$$u_R - u_L + f_R(h_*, h_R) + f_L(h_*, h_L) = 0, \quad (2.116)$$

é dicir, h_* é raíz da función

$$\Psi(h) = f_L(h, h_L) + f_R(h, h_R) + u_R - u_L. \quad (2.117)$$

O valor de u_* obtense a partir de h_* como

$$u_* = \frac{f_R(h_*, h_R) - f_L(h_*, h_L) + u_R + u_L}{2}. \quad (2.118)$$

Para obter a raíz de Ψ , utilizaremos un método iterativo, como pode ser o método de Newton-Raphson. Debemos asegurar ademais, como supoñemos ata agora, que $h_* > 0$, que temos garantido se se cumpre a condición

$$2(a_L + a_R) > u_R - u_L. \quad (2.119)$$

2.3.4. O problema da rotura de presa

Unha aplicación real para o problema de Riemann (2.68) é o problema da rotura de presa. Supoñamos que temos unha presa que separa ao longo de $x = 0$ dous corpos de auga, de alturas h_L e h_R , en repouso, $u_L = 0 = u_R$. Ao crebarse a parede que separa os dous corpos de auga, nun caso pouco favorable produciranse unha serie de fenómenos que non se poderán describir correctamente coas ecuacións das augas pouco profundas. Pero se supoñemos que a separación desaparece nun tempo suficientemente pequeno, que poidamos considerar instantáneo, entón si poderemos aproximar este suceso a como un caso particular do problema de Riemann (2.68), que xa sabemos como resolver.

Capítulo 3

Métodos numéricos para a resolución de sistemas hiperbólicos

En vista da dificultade ou mesmo imposibilidade de resolver as ecuacións das augas pouco profundas, en xeral, é imperativo ter acceso a aproximacións sólidas que permitan a súa aplicación a situacións reais de carácter amplo. É por iso que exploraremos a metodoloxía de *volumes finitos*, unha familia de métodos numéricos aplicables a sistemas hiperbólicos de leis de conservación. Farémolo concretamente para aqueles dunha dimensión espacial, por simplicidade de implementación, sendo evidentemente escalables a máis dimensións.

3.1. Método de volumes finitos

Dentro dos métodos de volumes finitos, traballaremos con esquemas chamados conservativos. Partimos dun sistema hiperbólico de leis de conservación nunha dimensión espacial,

$$\mathbf{w}_t + (\mathbf{F}(\mathbf{w}))_x = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Nun método de diferencias finitas, partiríamos desta ecuación diferencial e discretizaríamos o problema a partir de aproximacións axeitadas para as derivadas. No seu lugar, integramos as ecuacións nun volume de control $\mathcal{R} = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{w}_t(x, t) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}(\mathbf{w}(x, t))_x dx dt = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Polo teorema de Fubini, podemos integrar en calquera orde, polo que se cambiamos a orde de integración da primeira integral, chegamos á igualdade

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{w}(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{w}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{w}(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{w}(x_2, t)) dt, \quad (3.3)$$

que expresa a evolución de $\mathbf{w}(x, \cdot)$ dende t_1 ata t_2 en $[x_1, x_2]$ de forma exacta. Desta igualdade é de onde nacerá o método.

Consideremos un dominio espacial $[a, b]$ e un mallado do mesmo, $\mathcal{M}(\Delta x) \subset (a, b)$, un conxunto de puntos $\{x_i\}_{i=1}^M$ que chamaremos nodos espaciais, con $x_{i-1} < x_i$ e norma do mallado

$$\Delta x = \sup_{i \in \{2, \dots, M\}} \{x_i - x_{i-1}\}. \quad (3.4)$$

Pois ben, se definimos as celas $C_i := \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right)$, con

$$x_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i \pm 1}}{2}, \quad (3.5)$$

que son ao que nos referimos con *volumes finitos*, o obxectivo é determinar o valor medio da integral de $\mathbf{w}(x, t^{n+1})$ a partir do de $\mathbf{w}(x, t^n)$. Se temos en conta o paso temporal $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ e dividimos entre $|C_i|$ (volume da cela) na igualdade (3.3), chegamos ao esquema numérico

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n), \quad (3.6)$$

onde se fan as seguintes aproximacións do valor medio das integrais:

$$\mathbf{w}_i^n \approx \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} \mathbf{w}(x, t^n) dx, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{w}(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (3.8)$$

As cantidades \mathbf{w}_i^n constrúen unha función definida a anacos que aproxima a $\mathbf{w}(x, t^n)$ en $[a, b]$, como se representa na figura 3.1.

Os termos $\mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^n$ aproximan o fluxo físico medio nos extremos de C_i ao longo de t^n e t^{n+1} , e por iso reciben o nome de *fluxo numérico*. A figura 3.2 representa graficamente o proceso que se leva a cabo en cada paso de tempo.

Os valores de \mathbf{w}_i^n podemos obtelos a partir dos datos iniciais avaliando a integral correspondente (exacta ou numericamente), mais non poderemos facer o mesmo para o fluxo numérico, pois involucra valores de $\mathbf{w}(x, \cdot)$ en tempos maiores a t^n , que non os temos dispoñibles. É por iso que os distintos métodos de volumes finitos pasan por seleccionar unha boa aproximación para o fluxo numérico.

Definición 3.1 (Esquema conservativo). Un esquema da forma (3.6), sendo

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \Phi(\mathbf{w}_{i-l}^n, \dots, \mathbf{w}_{i+r}^n), \quad (3.9)$$

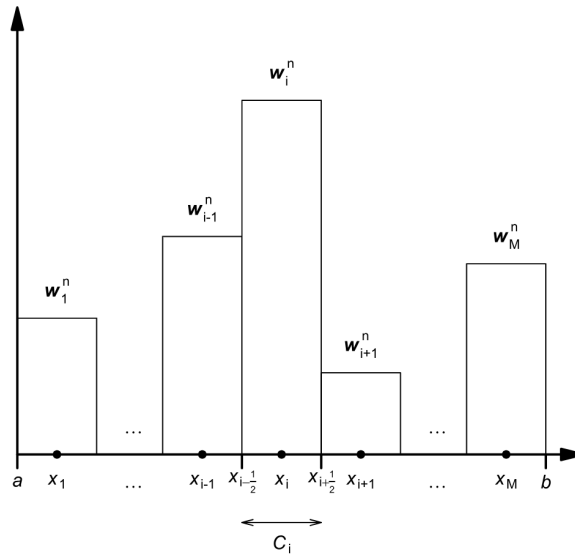


Figura 3.1: Discretización do dominio espacial e $\mathbf{w}(x, t^n)$.

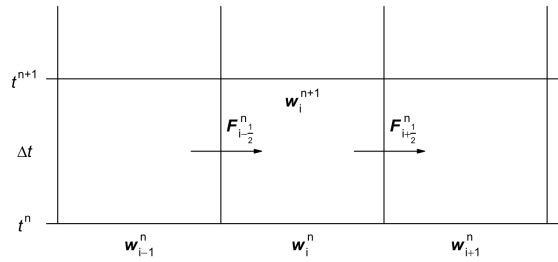


Figura 3.2: Esquema do método numérico.

con l e r enteiros non negativos, dise que é *conservativo* se o *fluxo numérico* Φ é unha aproximación do fluxo físico, $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, que cumpre a *condición de consistencia*

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}) = \Phi(\bar{\mathbf{w}}, \dots, \bar{\mathbf{w}}). \tag{3.10}$$

Se a maiores Φ é linear, dirase que o esquema é linear.

Por simplicidade, traballaremos con mallados uniformes, co cal $|C_i| = \Delta x, \forall i \in \{1, \dots, M\}$. Ademais das condicións de consistencia, o método numérico tamén deberá ser estable para que sexa converxente. Unha condición de estabilidade que deberán cumprir os métodos de volumes finitos explícitos é a condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL),

$$c_{cfl} = \frac{s_{max}^n \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \tag{3.11}$$

onde s_{max}^n é a velocidade máxima de propagación de onda, en valor absoluto, a tempo t^n . O valor c_{cfl} coñécese como número de Courant ou número CFL, e o que indica a desigualdade (3.11) é

que as ondas non poden viaxar máis da lonxitude dunha cela (Δx) nun intervalo de tempo Δt . Na práctica, para esquemas de primeira orde, escolleranse números CFL menores a 1, ademais de estimacións de s_{max}^n , para calcular o paso de tempo e tratar de garantir a estabilidade.

Os métodos conservativos compatirán algunhas das particularidades dos sistemas de leis de conservación, consecuencia do seguinte teorema, cuxa proba se atopa en [4].

Teorema 3.2 (Teorema de Lax-Wendroff). *Dada unha sucesión de mallados con parámetros de discretización $\Delta x_k, \Delta t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, se o resultado de aplicar un método conservativo consistente converxe, entón converxe a unha solución débil do sistema de leis de conservación.*

O teorema asegúranos que, en caso de converxer a algunha función, esta será unha solución débil do problema a resolver. Porén, xa vimos que as solucións débiles non son únicas, polo que cómpre preguntarnos como afectará isto ao método. Para elixir unha das solucións débiles, tiñamos certas condicións, chamadas condicións de entropía, que aportaban sentido físico adicional e permitían seleccionar a solución relevante fisicamente. Estas condicións poden adaptarse ao método conservativo, asegurando que a converxencia se produza cara a solución entrópica.

En [10] introdúcese o concepto de *esquemas monótonos*. Para este traballo abonda saber que un esquema monótono evita a aparición de *oscilacións espurias*, as cales entorpecerían a precisión do método. En relación a isto temos outro dos teoremas centrais na teoría dos métodos conservativos.

Teorema 3.3 (Teorema de Godunov). *Non existen esquemas conservativos que sexan á vez lineares, monótonos e teñan orde dous de converxencia ou maior.*

A continuación introduciremos algúns dos esquemas conservativos de primeira orde máis relevantes. Para deseñar métodos de alta orde que sexan robustos, deberase abandonar a linearidade para circunnavegar o Teorema de Godunov. Existe unha familia de métodos de orde arbitraria, a metodoloxía ADER (*Arbitrary high-order Derivative*), que se apoia no Teorema de Cauchy-Kovalevskaya e nas reconstrucións ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) e WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) para plantexar un problema de Riemann xeneralizado e aproximar a súa solución. De novo, poden obterse máis detalles en [10].

3.1.1. Método de Godunov

O método máis intuitivo que podemos crear ten por nome *método de Godunov*. Como xa dixemos, en cada paso de tempo os valores \mathbf{w}_i^n constrúen unha función constante a anacos. O fluxo numérico tiña por obxectivo proporcionar un valor aproximado da media integral do fluxo físico nos extremos das celas C_i . Se nos fixamos neses extremos, temos a ambos lados

unha rexión cun valor constante, que aproxima a solución $\mathbf{w}(x, t)$ a tempo t^n . Entón, localmente, podemos considerar os puntos $(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t^n)$ como a orixe de coordenadas $(0, 0)$, polo que neses puntos temos definido un problema de Riemann, como se bosquexa na figura 3.3, que denotaremos por $\text{RP}[x_{i-1}, x_i]$ e $\text{RP}[x_i, x_{i+1}]$.

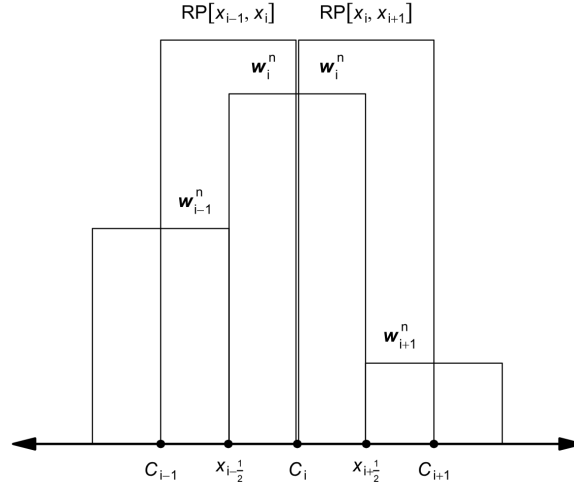


Figura 3.3: Problemas de Riemann a resolver en $[x_{i-1}, x_i]$ e $[x_i, x_{i+1}]$.

Se denotamos a solución autosimilar destes problemas por $\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^n\left(\frac{x}{t}\right)$ e $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^n\left(\frac{x}{t}\right)$, respectivamente, xa temos unha aproximación da solución coa que podemos avaliar o fluxo físico ao longo de $[t^n, t^{n+1}]$ e obter así o fluxo numérico:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{w}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt \approx \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i\pm\frac{1}{2}}(0)) dt = \mathbf{F}(\mathbf{w}_{i\pm\frac{1}{2}}(0)) = \mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

En (3.12), avaliar $\mathbf{w}_{i\pm\frac{1}{2}}$ en 0 quere dicir avaliála ao longo da característica $\frac{x}{t} = 0$, nas coordenadas locais de cada problema de Riemann, ao longo da cal a solución é constante. Este fluxo numérico é o *fluxo de Godunov*, que da nome ao método e dá lugar a un método conservativo. No capítulo 2.3, obtivemos a solución exacta do problema de Riemann para as ecuacións das augas pouco profundas con fondo húmido ($h > 0$), a cal podemos usar para calcular o fluxo de Godunov. Cabe destacar que o método é consistente coas condicións de entropía. En xeral, obter unha solución exacta do problema de Riemann non é tarefa sinxela, ou pode ser custoso, co cal tamén se pode substituír por algunha aproximación. Seguimos cun par destes métodos amplamente utilizados.

3.1.2. Esquema de Roe

O *esquema de Roe* pasa por linearizar as ecuacións (3.1). Como xa vimos para as ecuacións das augas pouco profundas, unha linearización de (3.1) ten a forma

$$\hat{\mathbf{w}}_t + \bar{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{w}}_x = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

onde $\bar{\mathbf{A}}$ é unha matriz de coeficientes constantes que aproxima a matriz xacobiana $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w})$. Nas inmediacións dun extremo $x_{i+\frac{1}{2}}$, a matriz $\bar{\mathbf{A}} \equiv \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ dependerá dos valores constantes $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_i^n$ e $\mathbf{w}_R = \mathbf{w}_{i+1}$, definindo así un problema de Riemann linear, o cal sabemos resolver. Roe propón que a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ debe cumprir estas tres propiedades:

1. Hiperbolicidade. $\bar{\mathbf{A}}$ debe ser diagonalizable con valores propios reais.
2. Consistencia. $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ converxe a $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{w})$ cando $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$ converxen a \mathbf{w} .
3. Conservación. A solución aproximada $\hat{\mathbf{w}}$ conserva a presenza de ondas de choque de \mathbf{w} á mesma velocidade de propagación s : $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L) = \mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L)$.

Baixo estas condicións o fluxo numérico resulta¹

$$\Phi(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L)) - \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)| (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L). \quad (3.14)$$

Para as ecuacións das augas pouco profundas, en [13] súxírese a seguinte elección da matriz $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{u}^2 + \bar{a}^2 & 2\bar{u} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{w}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ h_L u_L \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ h_R u_R \end{pmatrix}, \\ \bar{a} = \sqrt{g \left(\frac{h_L + h_R}{2} \right)}, & \bar{u} = \frac{\sqrt{h_L} u_L + \sqrt{h_R} u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Este esquema non é entrópico, polo que o seu uso está maioritariamente limitado a zonas onde a solución sexa regular. Para solucionar este problema introdúcese no fluxo numérico certa viscosidade numérica a través de diversas regularizacións, tema que discutiremos brevemente a continuación.

3.1.3. Esquemas de tipo Rusanov

En [3], preséntanse os *esquemas* \mathbf{Q} , caracterizados polo fluxo numérico

$$\Phi(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L)) - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)| (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L), \quad (3.17)$$

onde $|\mathbf{Q}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)|$ é unha matriz que depende continuamente de \mathbf{w}_L e \mathbf{w}_R e actúa como un termo de viscosidade numérica. O esquema de Roe é un caso particular deles, con $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{A}}$,

¹Se unha matriz \mathbf{A} diagonaliza como $\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, defínese o seu valor absoluto como $|\mathbf{A}| = \mathbf{P}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{P}^{-1}$, onde $|\mathbf{\Lambda}|$ ten os valores propios da diagonal en valor absoluto.

que como outros deste tipo presenta problemas coa entropía. Para solucionar estes problemas introdúcese regularizacións para os valores propios da matriz, evitando que se anulen. Unha destas regularizacións resulta nun *esquema de tipo Rusanov*, para o cal o fluxo numérico é

$$\Phi(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_L)) - \frac{1}{2} s_{Rus}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L), \quad (3.18)$$


onde o coeficiente de viscosidade numérica α_{rus} calcúlase como

$$s_{Rus}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \max \left\{ \max_{k=1,m} \{|\lambda_k(\mathbf{w}_L)|\}, \max_{k=1,m} \{|\lambda_k(\mathbf{w}_R)|\} \right\}. \quad (3.19)$$

Máis xeralmente, como se mostra en [2], os esquemas de tipo Rusanov proveñen dunha simplificación da familia de fluxos numéricos HLL (Harten, Lax e van Leer), baseados na estimación da menor e maior velocidade de propagación de onda. O esquema sería en xeral como (3.18), con $s_{Rus} = s_{max}^n$ a estimación en valor absoluto da maior velocidade de propagación de onda. Estes esquemas si son compatibles coas condicións de entropía, mais hai que escoller con delicadeza a estimación da velocidade de propagación para non subestimala.

Capítulo 4

Resultados numéricos e conclusións

Este capítulo ten por obxectivo a validación dos métodos numéricos vistos no anterior capítulo e desenvoltos a partir dos esforzos previos ao longo do traballo. Veremos que os métodos numéricos aproximan correctamente a solución exacta do problema de Riemann para as ecuacións das augas pouco profundas con fondo húmido e compararémos nalgúns casos, a través de gráficas coa solución exacta e aproximada. Os códigos utilizados para esta parte foron elaborados en Matlab  polo alumno e poden atoparse no Anexo II. Os esquemas utilizados son o método de Godunov, o esquema de Roe e o de Rusanov, descritos nas seccións 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, respectivamente.

Test	h_L	h_R	u_L	u_R	v_L	v_R	a	b	M	t_f
RP1	2	2	-2	2	-	-	-20	20	300	2.5
RP2	4	2	2	1	-	-	-20	20	100	2.5
RP3	2	4	-1	-2	-	-	-20	20	100	2.5
RP4	2	2	2	1	-	-	-20	20	150	2.5
RP5	3	1	1.5	0	1	-1	-20	20	200	2.5
RP6	100	30	0	0	-	-	-200	200	350	5

Cadro 4.1: Datos asociados a distintos problemas test de Riemann.

4.1. Aproximación do problema de Riemann

A continuación observaremos o comportamento destes métodos ao aproximar a solución do problema de Riemann para as augas pouco profundas, a cal obtivemos na sección 2.3. Daremos un exemplo para cada combinación de onda posible e concluiremos cun problema de rotura de presa unidimensional. Denotaremos por RPk a cada problema de Riemann que resolveremos. Farase a evolución temporal ata o tempo final t_f , nun dominio espacial $[a, b]$ con M nodos espaciais de

discretización. O cadro 4.1 resume tanto as condicións iniciais dos problemas como os datos de discretización utilizados.

Doble onda de rarefacción

En vista das gráficas observárase que os métodos cometen o maior erro ao redor daqueles lugares onde a solución non é regular. O caso no que a solución para o problema de Riemann consista en dúas ondas de rarefacción é o máis próximo a unha solución regular que veremos, polo que faremos para o RP1 a análise de converxencia dos tres métodos.

Supoñamos que temos unha secuencia de refinamentos de mallas dada por $\{\Delta x_k\}$. Supoñamos que o erro para certo método numérico e mallado k , $\varepsilon_{\Delta x_k}^r$, calcúlase usando certa norma $\|\cdot\|_r$. Para que a orde de converxencia sexa p_r , debe existir una constante C tal que

$$\varepsilon_{\Delta x_k}^r \leq C(\Delta x_k)^{p_r} \quad (4.1)$$

e ao refinar a malla se siga tendo que

$$\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}^r \leq C(\Delta x_{k+1})^{p_r}. \quad (4.2)$$

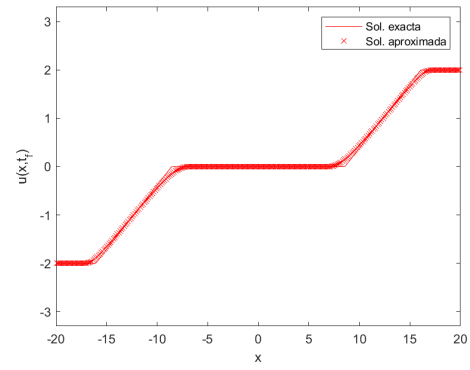
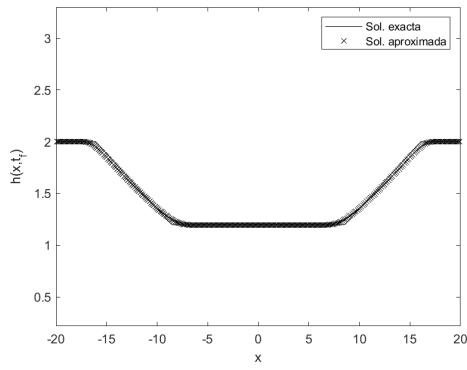
Por tanto, terase que

$$\frac{\varepsilon_{\Delta x_k}^r}{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}^r} \leq \left(\frac{\Delta x_{k+1}}{\Delta x_k}\right)^{p_r}, \quad (4.3)$$

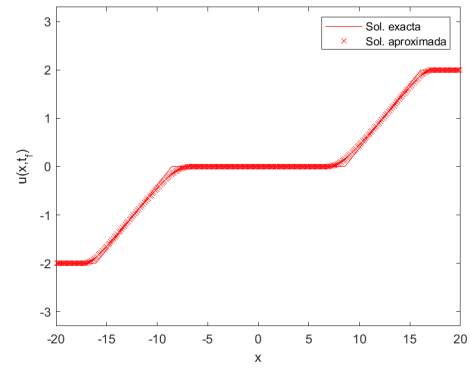
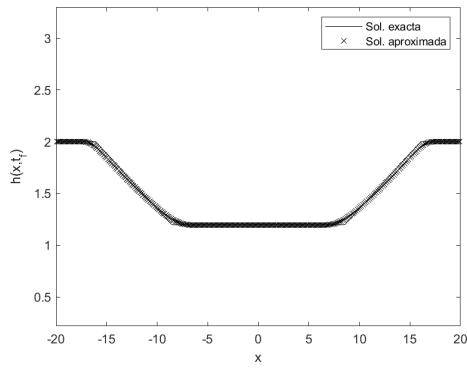
co cal podemos aproximar a orde de converxencia mediante

$$p_r^k \approx \frac{\log\left(\frac{\varepsilon_{\Delta x_k}^r}{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}^r}\right)}{\log\left(\frac{k+1}{k}\right)}. \quad (4.4)$$

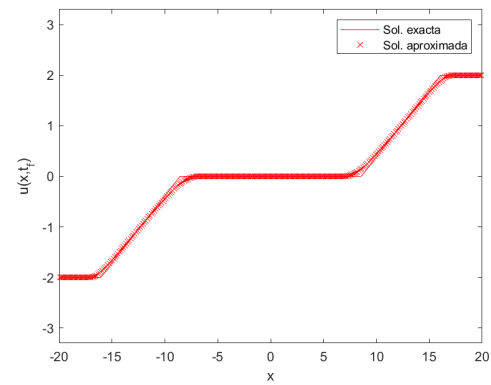
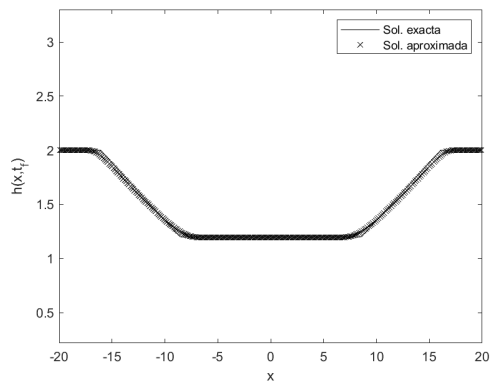
No cadro 4.2 recóllese o estudo de converxencia para os esquemas de Godunov, Rusanov e Roe e o problema de Riemann RP₁. Traballouse nun dominio espacial $[-20, 20]$ e cunha malla uniforme de M_k nodos de discretización, co valor $c_{cfl} = 0.9$ e co tempo final $t_f = 2.5$ s. Na figura 4.1 podemos comparar os resultados numéricos dos tres métodos para $M = 300$. Como observamos nas táboas, os métodos teñen un desempeño similar e converxen cara unha orde de converxencia próxima a 0.6, inferior á primeira orde esperada. Isto acontece pola non regularidade da solución, onde os métodos numéricos perden precisión, cousa que se aprecia visualmente na figura 4.1. Notemos que empregando un test cunha solución suficientemente regular recuperamos a orde un esperada. No que resta do capítulo dedicado aos resultados numéricos, amosaranse diversas gráficas para cada combinación de onda para o problema de Riemann das SWE. Nótese que en tódolos casos as imprecisión numéricas prodúcense a redor dos puntos onde a solución non é regular.



(a) Godunov



(b) Rusanov



(c) Roe

Figura 4.1: Solución de RP1 para $c_{cfl} = 0,9$.

M_k	Godunov		Rusanov		Roe	
	$\varepsilon_{\Delta x_k}^{L^2}$	$p_{L^2}^k$	$\varepsilon_{\Delta x_k}^{L^2}$	$p_{L^2}^k$	$\varepsilon_{\Delta x_k}^{L^2}$	$p_{L^2}^k$
25	2.9150	-	3.2622	-	2.8834	-
50	1.5930	0.87170	1.9095	0.77269	1.5419	0.90306
100	1.0895	0.87170	1.2629	0.59639	1.0615	0.53861
200	0.7284	0.58078	0.8217	0.62016	0.7134	0.57327
400	0.4777	0.60880	0.5264	0.64238	0.4697	0.60296
800	0.3120	0.61455	0.3367	0.64475	0.3078	0.60968

Cadro 4.2: Táboa de converxencia en norma L^2 para RP_1 usando os esquemas de Godunov, Rusanov e Roe.

Rarefacción pola esquerda, choque pola dereita

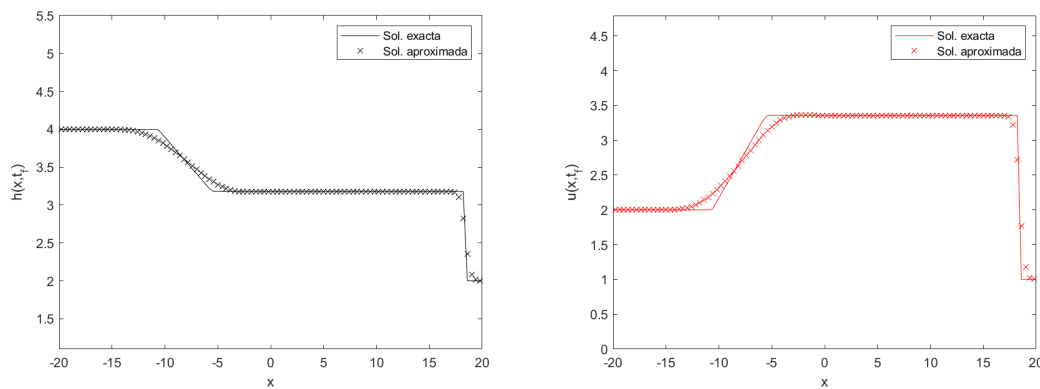


Figura 4.2: Solución de RP_2 co método de Godunov para $c_{cfl} = 0,9$, tempo final $t_f = 2,5$ e $M = 100$ nodos espaciais.

Choque pola esquerda, rarefacción pola dereita

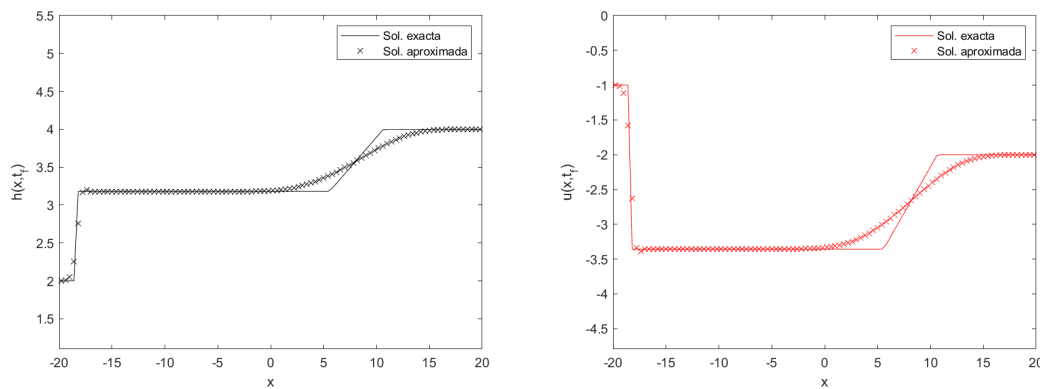


Figura 4.3: Solución de RP_3 co esquema de Rusanov para $c_{cfl} = 0,9$.

Doble choque

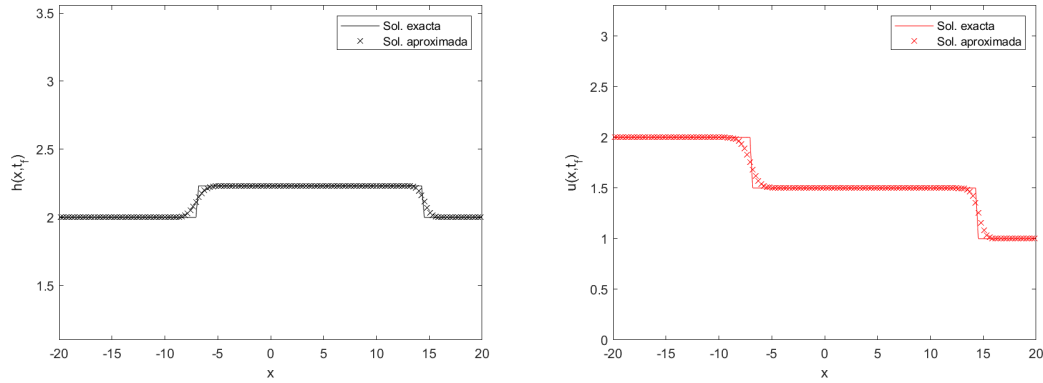


Figura 4.4: Solución de RP4 co esquema de Roe para $c_{cfl} = 0,9$.

Onda de corte

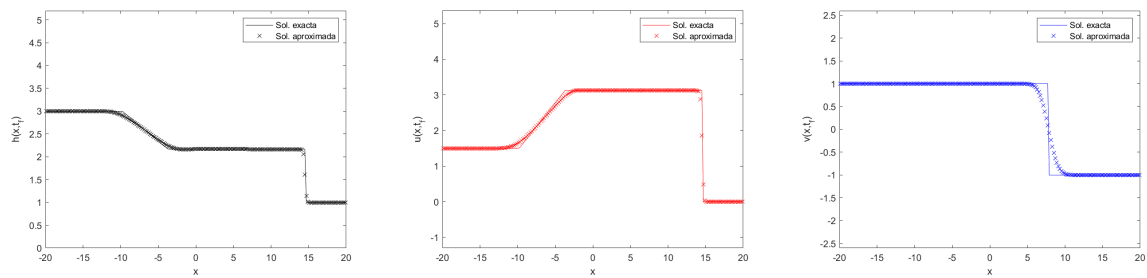


Figura 4.5: Solución de RP co método de Godunov para $c_{cfl} = 0,9$.

Problema de rotura de presa

Finalmente faremos a proba para un problema de rotura de presa unidimensional con alturas iniciais $h_L = 100$ m e $h_R = 30$ m. A solución é a da figura 4.7, que compara os métodos de Godunov, Rusanov e Roe, de arriba a abaixo.

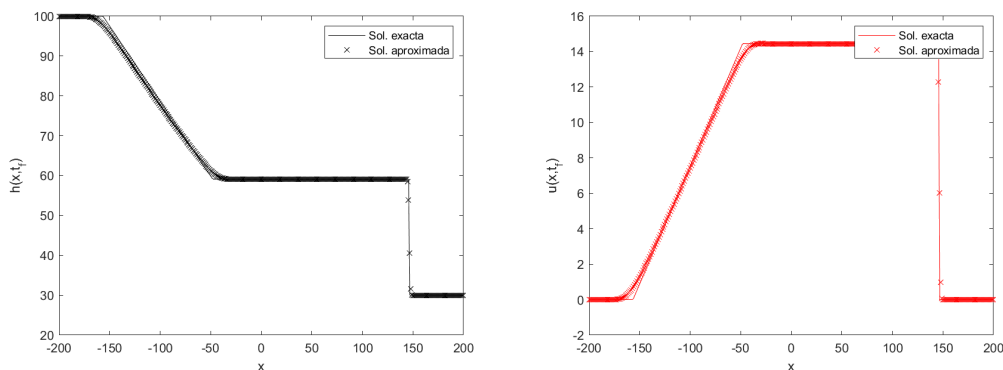


Figura 4.6: Godunov

Figura 4.7: Solución de RP6 (rotura de presa) usando o método de Godunov para $c_{cfl} = 0,9$.

4.2. Conclusións finais

En vista do anterior, os métodos numéricos de primeira orde seguen o comportamento cualitativo das solucións descontinuas, mais presentan erros maiores nas proximidades das descontinuidades, o cal motiva a busca de métodos de maior orde, que ademais terán que evadir as consecuencias do Teorema de Godunov, como por exemplo os da familia de métodos ADER. Para ser de utilidade práctica, tamén é preciso facer un estudo rigoroso do tratamento numérico dos termos fonte, pois os modelos homoxéneos resultan ser moi idealizados e será inevitable a eventual presenza destes termos.

Ao longo deste traballo, vimos como obter as ecuacións das augas pouco profundas a partir das ecuacións de Navier-Stokes incompresibles baixo certas hipóteses, e despois estudamos o seu carácter hiperbólico para obter algunhas solucións analíticas sobre as que desenvolver e validar os métodos numéricos de volumes finitos.

En relación ao Grao en Matemáticas, o primeiro capítulo dedúcese con naturalidade a partir da mecánica dos medios continuos e da mecánica de fluídos estudadas na materia de “Modelización Matemática”, e introdúcese o concepto de sistema hiperbólico a partir de nocións de álgebra linear básicas.

No capítulo 2 falamos do método das características, que se introduce para a ecuación do transporte na materia optativa de “Análise Numérica de Ecuacións en Derivadas Parciais”. Porén, neste traballo se relaciona con conceptos fundamentais da xeometría diferencial estudados na materia optativa de “Variedades Diferenciables”, permitindo unha definición máis rigorosa e un maior entendemento deste método de resolución de EDP. Máis adiante esténdese o entendemento

de solución dun sistema de leis de conservación para permitir solucións descontinuas, de xeito análogo a como se fai nos métodos de elementos finitos, vistos en diversas materias de matemática aplicada, como “Taller de Simulación Numérica”.

Para finalizar, descríbense os métodos de volumes finitos para sistemas de leis de conservación hiperbólicas homoxénea nunha dimensión espacial, unha familia de métodos numéricos dominante en problemas hidráulicos, e introdúcense tres esquemas conservativos de orde un que se usaron para validar os métodos numéricos aplicados á resolución do problema de Riemann para as ecuacións das augas someiras.

En visión a futuros traballos, cómpre continuar afondando na teoría matemática das leis de conservación hiperbólicas para completar a solución do problema de Riemann no caso de que non poidamos asegurar unha profundidade non nula e realizar a extensión natural a varias dimensións espaciais, para posteriormente incluír estas particularidades nos métodos numéricos.

Anexo A

Mecánica dos medios continuos

A.1. Definicións e notacións

Consideramos un espazo afín \mathbb{A} definido sobre un \mathbb{R} -espazo vectorial tridimensional V . Os elementos de \mathbb{A} e os escalares denotaranse con letra minúscula, os vectores con letra minúscula grosa, e os tensores de orde dous¹ con maiúscula grosa.

A.1.1. Movemento dun corpo

Definición A.1 (Rexión pechada). A clausura dun subconxunto $\mathcal{B} \subset \mathbb{A}$ aberto e conexo chamárase *rexión pechada*. Dirase, a maiores, que é *regular* se a súa fronteira, $\partial\mathcal{B}$, é regular a anacos.

A partir de agora \mathcal{B} fará referencia a unha rexión regular, que chamaremos *corpo* e cuxos elementos reciben o nome de puntos materiais. O obxectivo é estudar o movemento dun corpo ao longo do tempo dende unha configuración inicial.

Definición A.2 (Deformación). Dirase que unha aplicación $\mathbf{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{A}$ é unha *deformación* de \mathcal{B} se é inxectiva, regular, $\mathbf{f}(\mathcal{B})$ é unha rexión regular e, ademais, cumpre

$$\det(\nabla\mathbf{f}(p)) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{B}. \quad (\text{A.1})$$

Definición A.3 (Movemento). Un *movemento* de \mathcal{B} é unha aplicación

$$X : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A} \quad (\text{A.2})$$

de clase tres (\mathcal{C}^3) tal que $X(\cdot, t)$ é unha deformación de \mathcal{B} , para todo $t \in \mathbb{R}$.

¹Os tensores de orde dous son os elementos de $Lin = \{\mathbf{f} : V \rightarrow V, \mathbf{f} \text{ lineal}\}$.

Referirémonos a

$$\mathcal{B}_t = X(\mathcal{B}, t) \quad (\text{A.3})$$

como a rexión ocupada por \mathcal{B} no intre t , e os seus elementos son a posición ocupada polos puntos materiais nese mesmo tempo.

Definición A.4 (Traxectorias). Chamaremos *traxectoria do punto material* $p \in \mathcal{B}$ ao conxunto

$$\mathcal{T}_p = X(p, \mathbb{R}), \quad (\text{A.4})$$

e *traxectoria do movemento* ao conxunto

$$\mathcal{T} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\mathcal{B}_t \times \{t\}). \quad (\text{A.5})$$

Igual que falamos do movemento de p polo espazo afín, o seu equivalente polo espazo vectorial será o desprazamento que vén dado polo vector

$$\mathbf{u}(p, t) = X(p, t) - p. \quad (\text{A.6})$$

Así, o gradiente do movemento é

$$\mathbf{F}(p, t) = \nabla X(p, t) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(p, t), \quad (\text{A.7})$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade.

O feito de que $X(\cdot, t)$ sexa unha deformación garante a existencia dunha inversa da mesma regularidade, xa que é inxectiva e diferenciable con matriz xacobiana invertible en todo punto, co cal podemos reverter a traxectoria do movemento X mediante unha aplicación de \mathcal{C}^3 ,

$$P : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}, \quad (\text{A.8})$$

que proporciona o punto material $p \in \mathcal{B}$ que ocupa a posición x en t .

Distinguiremos entre campos materiais, os definidos en $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$, e os campos espaciais, definidos en \mathcal{T} . As aplicacións X e P permitirannos converter un campo noutro facendo uso da aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{T} \\ (p, t) &\longmapsto \Psi(p, t) = (X(p, t), t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e a súa inversa

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \Psi^{-1}(x, t) = (P(x, t), t). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Definición A.5 (Descricións materiais e espaciais). Sexa φ un campo espacial. Definimos a súa *descrición material* como

$$\varphi_m := \varphi \circ \Psi. \quad (\text{A.11})$$

Da mesma maneira, se ϕ é un campo material, a súa *descrición espacial* defínese como

$$\phi_s := \phi \circ \Psi^{-1}. \quad (\text{A.12})$$

No cadro A.1 resúmense as notación dos principais operadores diferenciais para os campos materiais e espaciais.

Operador diferencial	Campo material	Campo espacial
$\frac{\partial}{\partial t}$	$\dot{\phi}$	φ'
Diverxencia	$\nabla \cdot \phi$	$\text{div } \varphi$
Gradiente	$\nabla \phi$	$\text{grad } \varphi$

Cadro A.1: Resumo das notacións usadas para os operadores diferenciais.

Definición A.6 (Velocidade e aceleración). Os campos materiais $\frac{\partial X}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ recibirán o nome de *velocidade* e *aceleración*, respectivamente. Os seus equivalentes campos espaciais son as respectivas descricións espaciais

$$\mathbf{v} := \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_s \quad (\text{A.13})$$

e

$$\mathbf{a} := \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right)_s. \quad (\text{A.14})$$

Cando traballamos con campos espaciais, interézanos saber como cambia unha magnitude seguindo a traxectoria dunha partícula, para o cal definimos a derivada material.

Definición A.7 (Derivada material). Sexa φ un campo espacial. Definimos a súa derivada material como

$$\dot{\varphi} := \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right)_s. \quad (\text{A.15})$$

Para o cálculo da derivada material en termos de campos espaciais, non só hai que ter en conta a variación local no tempo, senón tamén a causada polo transporte do movemento, o cal se recolle na seguinte proposición.

Proposición A.8. Sexan φ e \mathbf{w} un campo espacial escalar e vectorial, respectivamente. As súas derivadas materiais veñen dadas por

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi, \quad (\text{A.16})$$

e

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.17})$$

Demostración. Sexa $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ un campo espacial escalar. Consideremos a súa descripción material

$$\varphi_m : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.18})$$

$\varphi_m = \varphi \circ \Psi$. Dado $(p, t) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}$, usando a regra da cadea temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(p, t) &= \frac{\partial(\varphi \circ \Psi)}{\partial t}(p, t) = D\varphi(\Psi(p, t)) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix} (\Psi(p, t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t} \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial t} \end{pmatrix} (p, t) \\ &= \text{grad } \varphi(\Psi(p, t)) \cdot \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\Psi(p, t)) \cdot 1 \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_m (p, t) + \left((\text{grad } \varphi)_m \cdot \frac{\partial X}{\partial t} \right) (p, t), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde $X \equiv (X_1, X_2, X_3)$. Usando a igualdade (A.19) e a definición de derivada material, chegamos a que, dado $(x, t) \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(x, t) &= \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right)_s (x, t) = \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_m + (\text{grad } \varphi)_m \cdot \frac{\partial X}{\partial t} \right)_s (x, t) \\ &= \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_m \right)_s (x, t) + ((\text{grad } \varphi)_m)_s (x, t) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_s (x, t) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \text{grad } \varphi(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Se \mathbf{w} é un campo espacial vectorial, aplicando (A.16) a cada compoñente w_i chegamos ao resultado (A.17). \square

Definimos a maiores o *vector posición* para o movemento dun corpo.

Definición A.9 (Vector posición). Chamamos *vector posición* con respecto á orixe $o \in \mathcal{B}$ ao campo vectorial espacial

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : \mathcal{T} &\rightarrow V \\ (x, t) &\mapsto \mathbf{r}(x, t) = x - o. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Observación A.10. Pódese ver que $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ e $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$.

A.1.2. Magnitudes e fluxos

A motivación detrás do estudo dos medios continuos é traballar, en lugar de cunha magnitude concentrada nun punto, con cantidades volumétricas, é dicir, coa densidade de magnitudes que se miden por unidade de volume e cuxo valor cambia de punto a punto (e poden ser tanto escalares como vectoriais). Por exemplo, en lugar de considerar unha masa puntual m (kg), estúdase a densidade de masa ρ (kg/m³) na traxectoria do movemento dun corpo. Isto podemos facelo seguindo a traxectoria dunha parte do corpo ou analizando unha rexión fixa do espazo.

Definición A.11 (Parte dun corpo). Unha *parte dun corpo* \mathcal{B} é unha subrexión regular $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. \mathcal{P} funciona como o corpo e segue o movemento, sendo $\mathcal{P}_t = X(\mathcal{P}, t)$ a rexión do espazo que ocupa a parte \mathcal{P} no tempo t .

Definición A.12 (Volume de control). Sexa $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_t$. Diremos que \mathcal{R} é un *volume de control* se é unha rexión regular limitada tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_s$, $\forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$.

Supoñamos logo que a *densidade* de certa magnitude vén dada polo campo espacial Φ (escalar ou vectorial). Entón a integral

$$\int_{\Omega} \Phi(x, t) dV_x \quad (\text{A.22})$$

representa a cantidade total de dita magnitude na rexión do espazo Ω no intre t . A cantidade total que entra ou sae de Ω a través da súa fronteira vén dada polo concepto de *fluxo*. No caso de producirse co movemento da materia, denomínase *fluxo convectivo*.

Definición A.13 (Fluxo convectivo). Sexa \mathcal{S} unha superficie orientada contida no corpo. Sexa $\mathbf{n}(x)$ o vector unitario normal á superficie no punto x , orientado positivamente. Se Φ representa a densidade dunha magnitude (escalar ou vectorial), a integral

$$\int_{\mathcal{S}} \Phi(x, t) (\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x)) dA \quad (\text{A.23})$$

representa o *fluxo convectivo* de dita magnitude a través de \mathcal{S} no intre t . A súa unidade de medida é a da magnitude dividida pola unidade de tempo.

Intuitivamente, a taxa de cambio dunha magnitude contida en certa parte do corpo será a taxa total de cambio no interior da parte máis este fluxo que se produce a través da súa fronteira. Esta idea recóllese no Teorema do transporte de Reynolds (ou Teorema de Reynolds para abreviar). Antes vexamos un resultado necesario para a súa demostración e un lema técnico.

Lema A.14 (Fórmula de Jacobi). Sexa $\Phi(t)$ unha matriz $n \times n$ cuxas columnas son solución da ecuación diferencial $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{A} : [a, b] \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$ continua. Entón tense que

$$(\det \Phi)'(t) = \text{tr}(\mathbf{A}(t)) \det \Phi(t). \quad (\text{A.24})$$

Proposición A.15. *Sexa \mathbf{F} o gradiente do movemento X . Entón tense que*

$$(\dot{\det \mathbf{F}}) = (\det \mathbf{F})(\operatorname{div} \mathbf{v})_m, \quad (\text{A.25})$$

sendo \mathbf{v} a velocidade.

Demostración. Por un lado, vexamos que

$$\dot{\mathbf{F}} = (\operatorname{grad} \mathbf{v})_m \mathbf{F}. \quad (\text{A.26})$$

Simplemente operando e facendo uso da regra da cadea,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(p, t) &= \frac{\partial \nabla X}{\partial t}(p, t) \stackrel{(**)}{=} \nabla \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) = \nabla \left(\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_s \right)_m(p, t) = \nabla \mathbf{v}_m(p, t) \\ &= \nabla(\mathbf{v} \circ \Psi)(p, t) = ((\operatorname{grad} \mathbf{v}) \circ \Psi)(p, t) \nabla X(p, t) = (\operatorname{grad} \mathbf{v})_m(p, t) \mathbf{F}(p, t), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde a igualdade (**) tense polo teorema de Schwartz.

Agora, aplicando a fórmula de Jacobi (lema A.14) a (A.26), tense que

$$(\dot{\det \mathbf{F}}) = \operatorname{tr}((\operatorname{grad} \mathbf{v})_m) \det \mathbf{F} = (\operatorname{div} \mathbf{v})_m \det \mathbf{F}, \quad (\text{A.28})$$

xa que $\operatorname{tr}((\operatorname{grad} \mathbf{v})_m) = (\operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{v}))_m$. □

Lembremos o que nos di o Teorema de Gauss.

Teorema A.16 (Teorema de Gauss). *Sexa Ω unha rexión regular limitada e sexan $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow V$ e $\mathbf{Q} : \Omega \rightarrow \operatorname{Lin}$ campos regulares. Entón*

1.

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi dV = \int_{\partial \Omega} \varphi \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.29})$$

2.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \int_{\partial \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.30})$$

3.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{Q} dV = \int_{\partial \Omega} \mathbf{Q} \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.31})$$

onde \mathbf{n} é o vector normal unitario a $\partial \Omega$ que apunta cara o exterior.

Enunciemos e demostremos agora o Teorema de Reynolds, que utilizaremos na obtención dos principios de conservación no capítulo 1.

Teorema A.17 (Teorema do transporte Reynolds).

Se φ é un campo escalar espacial e \mathcal{P} unha parte de \mathcal{B} , entón

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \varphi dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV_x + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.32})$$

e analogamente, para campos vectoriais espaciais, \mathbf{w} ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{w} dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\mathbf{w}} + \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{w}) dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dV_x + \int_{\partial \mathcal{P}_t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w} dA. \quad (\text{A.33})$$

Demostración. Lembremos que se \mathbf{f} é unha deformación de \mathcal{B} e $\varphi : \mathbf{f}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ é un campo escalar, entón polo teorema de cambio de variable tense que

$$\int_{\mathbf{f}(\mathcal{B})} \varphi dV_x = \int_{\mathcal{B}} (\varphi \circ \mathbf{f}) \det \nabla \mathbf{f} dV_p. \quad (\text{A.34})$$

Os puntos materiais $p \in \mathcal{P}$ están suxeitos á deformación $X(\cdot, t)$, polo que se aplicamos o teorema de cambio de variable obtemos que

$$\int_{\mathcal{P}_t} \varphi(x, t) dV_x = \int_{X(\mathcal{P}, t)} \varphi(x, t) dV_x = \int_{\mathcal{P}} \varphi(X(p, t), t) \det \nabla X(p, t) dV_p. \quad (\text{A.35})$$

Agora, derivando respecto de t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \varphi(x, t) dV_x = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \det \mathbf{F})(p, t) dV_p, \quad (\text{A.36})$$

xa que \mathcal{P} non depende de t , e onde $\mathbf{F} = \nabla X$ é o gradiente do movemento. Seguindo operando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \varphi(x, t) dV_x &= \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \det \mathbf{F})(p, t) dV_p \\ &= \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(p, t) \det \mathbf{F}(p, t) dV_p \\ &\quad + \int_{\mathcal{P}} \varphi_m(p, t) \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t}(p, t) dV_p \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(p, t) \det \mathbf{F}(p, t) dV_p \\ &\quad + \int_{\mathcal{P}} \varphi_m(p, t) \det \mathbf{F}(p, t) (\operatorname{div} \mathbf{v})_m(p, t) dV_p \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \varphi_m (\operatorname{div} \mathbf{v})_m \right) (p, t) \det \mathbf{F}(p, t) dV_p \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \varphi_m (\operatorname{div} \mathbf{v})_m \right) (p, t) \det \nabla X(p, t) dV_p \\ &= \int_{X(\mathcal{P}, t)} \left(\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right)_s + (\varphi_m)_s ((\operatorname{div} \mathbf{v})_m)_s \right) (x, t) dV_x \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v})(x, t) dV_x, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde en (*) usamos a Proposición A.15.

Para obter a segunda igualdade, simplemente aplicamos o Teorema de Gauss, tendo en conta que

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right) dV_x. \quad (\text{A.38})$$

Isto é,

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right) dV_x = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV_x + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.39})$$

sendo \mathbf{n} o vector unitario normal a \mathcal{P}_t que apunta cara o exterior.


No caso vectorial, procederíase de modo análogo, utilizando, a maiores, que

$$\operatorname{div}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \mathbf{w} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{w}. \quad (\text{A.40})$$

□

Anexo B

Códigos Matlab

Neste anexo se recollen os códigos de Matlab  que foron realizados polo alumno e utilizados para obter os resultados numéricos do capítulo 4. Impleméntase o método de volumes finitos nunha dimensión espacial para a resolución das ecuacións das augas pouco profundas unidimensionais. Inclúense os fluxos numéricos de Godunov, Rusanov e Roe e a solución exacta do problema de Riemann para as SWE con profundidade non nula.

B.1. Solución exacta do problema de Riemann

cons2phys.m

Transforma as variables conservativas nas físicas.

Listing B.1: cons2phys.m

```
1 function u=cons2phys(w)
2 % Transforma as variables conservativas nas variables físicas
3 global params
4 u=w;
5 for i=2:params.nvar
6     u(i,:)=w(i,:)./w(1,:);
7 end
8 return
9 end
```

phys2cons.m

Transforma as variables conservativas nas físicas.

Listing B.2: phys2cons.m

```

1 function w=phys2cons(u)
2 % Transforma as variables físicas nas conservativas
3 global params
4 w=u;
5 for i=2:params.nvar
6     w(i,:)=u(i,:).*w(1,:);
7 end
8 return
9 end

```

gk.m

Función auxiliar para a resolución do problema de Riemann.

Listing B.3: gk.m

```

1 function val=gk(h,hk)
2 global params
3 val = sqrt(0.5*params.g*(h+hk)/(h*hk));
4 return
5 end

```

NewtonRaphson.m

Método iterativo de Newton-Raphson para atopar raíces de funcións.

Listing B.4: NewtonRaphson.m

```

1 function sol=NewtonRaphson(x0,f,derf,tol,niter)
2 err=Inf;
3 iter=0; sol=x0;
4 while(err > tol && iter < niter)
5     iter=iter+1;
6     sol=x0-f(x0)/derf(x0);
7     err = 2*abs(sol-x0)/(sol+x0);
8     x0=sol;
9 end
10 if err > tol
11     error('N-R did not converge by %d iterations.\n', niter);
12 else
13     fprintf('N-R convergence in %d iterations and error %g.\n', iter, err);
14 end
15 return
16 end

```

wetbed.m

Calcula os estados constantes do problema de Riemann (2.68) e as velocidades de propagación de ondas que os separan.

Listing B.5: wetbed.m

```

1 function rp=wetbed(wl,wr,tol,niter)
2 % Esta función calcula os estados constantes da solución do problema de
3 % Riemann clásico, xunto coas velocidades de propagación das ondas que os
4 % separan. Os resultados almacénanse na estrutura rp con campos
5 % ul: estado constante esquerdo en variables físicas (estado inicial x<0)
6 % ur: estado constante dereito en variables físicas (estado inicial x>0)
7 % hstar: valor da altura da columna de auga na rexión estrela, h*
8 % ustar: valor da velocidade en x da auga na rexión estrela, u*
9 % sl1, sl2: velocidades que separan a rexión esquerda e a rexión estrela,
10 % sl2 vale -Inf se a onda pola esquerda é de choque
11 % sr1, sr2: velocidades que separan a rexión estrela e a rexión dereita,
12 % sr2 vale Inf se a onda pola dereita é de choque
13 % hstar obtense iterativamente usando o método de Newton-Raphson con
14 % tolerancia tol e número máximo de iteracións niter
15 global params
16 if(nargin < 4)
17     niter=200;
18 end
19 if(nargin < 3)
20     tol=1.e-6;
21 end
22 ul = cons2phys(wl); ur = cons2phys(wr); % variables físicas
23
24 if (2*(sqrt(params.g*ul(1))+sqrt(params.g*ur(1)))<=(ur(2)-ul(2)))
25     error("A condición de fondo húmido non se cumpre")
26 end
27
28 rp = struct("ul", ul, "hstar", 0, "ustar", 0, "ur", ur, ...
29     "sl1", 0, "sl2", 0, "sr1", 0, "sr2", 0);
30 f = @(h) ur(2) - ul(2) + fk(h, ur(1)) + fk(h, ul(1));
31 derf = @(h) derfk(h, ur(1)) + derfk(h, ul(1)); % derivada de f
32 h0=0.5*(sqrt(params.g*ul(1))+sqrt(params.g*ur(1))-0.5*(ur(2)-ul(2)))/params.g; % iterante
33     inicial
34 rp.hstar = NewtonRaphson(h0, f, derf, tol, niter);
35 rp.ustar = 0.5*(ur(2) + ul(2) + fk(rp.hstar, ur(1)) - fk(rp.hstar, ul(1)));
36
37 if(rp.hstar > ul(1)) % choque esqueda
38     rp.sl1 = ul(2) - rp.hstar*gk(rp.hstar,ul(1)); % velocidade do choque esquerdo
39     rp.sl2 = -Inf;
40 else % rarefacción esquerda
41     rp.sl1 = ul(2) - sqrt(params.g*ul(1)); % velocidade exterior da rarefacción
42     rp.sl2 = rp.ustar - sqrt(params.g*rp.hstar); % velocidade interior da rarefacción
43 end
44
45 if(rp.hstar > ur(1)) % choque dereito
46     rp.sr1 = ur(2) + rp.hstar*gk(rp.hstar,ur(1)); %% velocidade do choque dereito
47     rp.sr2 = Inf;

```

```

47 else % rarefacción dereita
48     rp.sr1 = ur(2) + sqrt(params.g*ur(1)); % velocidade exterior da rarefacción
49     rp.sr2 = rp.ustar + sqrt(params.g*rp.hstar); % velocidade interior da rarefacción
50 end
51
52 return
53 end
54
55 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
56 % funcións auxiliares para o cálculo de h*
57
58 function val=fk(h,hk)
59 global params
60 if(h>hk)
61     val=(h-hk)*gk(h,hk);
62 else
63     val=2*(sqrt(params.g*h)-sqrt(params.g*hk));
64 end
65 return
66 end
67
68 function val=derfk(h,hk) % derivada de fk respecto de h
69 global params
70 if(h>hk)
71     val=gk(h,hk)-params.g*(h-hk)/(4*h^2*gk(h,hk));
72 else
73     val=sqrt(params.g/hk);
74 end
75 return
76 end

```

rp_simil.m

Calcula a solución autosimilar de (2.68) en función de x/t e os estados constantes calculados con *wetbed.m*.

Listing B.6: rp_simil.m

```

1 function w=rp_simil(rp,vel)
2 % Esta función avalía a solución autosimilar w(x/t) do problema de Riemann
3 % clásico para a velocidade característica vel=x/t. A información para as
4 % rexións constantes e as velocidades de ondas que as separan están
5 % resumidas en rp, calculado coa función wetbed.
6 global params
7 if(vel <= rp.sl1)
8     w=phys2cons(rp.ul); % solución dentro da rexión constante esquerda
9 elseif(vel >= rp.sr1)
10    w=phys2cons(rp.ur); % solución dentro da rexión constante dereita
11 elseif(vel >= rp.sl2 && vel <= rp.sr2) % solución dentro da rexión estrela
12     if(params.nvar == 3)
13         if(vel <= rp.ustar) % esquerda da onda de corte

```

```

14     w=phys2cons([rp.hstar; rp.ustar; rp.ul(3)]);
15     else % derecha da onda de corte
16         w=phys2cons([rp.hstar; rp.ustar; rp.ur(3)]);
17     end
18     else
19         w=phys2cons([rp.hstar; rp.ustar]);
20     end
21 elseif(vel < rp.sl2) % solución dentro do abano de rarefacción esquerdo
22     aux = rp.ul(1:2) + ([rp.hstar; rp.ustar]-rp.ul(1:2)) * ...
23     (vel-rp.sl1)/(rp.sl2-rp.sl1);
24     if(params.nvar == 3)
25         w=phys2cons([aux; rp.ul(3)]);
26     else
27         w=phys2cons(aux);
28     end
29 else % solución dentro do abano de rarefacción dereito
30     aux = [rp.hstar; rp.ustar] + (rp.ur(1:2)-[rp.hstar; rp.ustar]) * ...
31     (vel-rp.sr2)/(rp.sr1-rp.sr2);
32     if(params.nvar == 3)
33         w=phys2cons([aux; rp.ur(3)]);
34     else
35         w=phys2cons(aux);
36     end
37 end
38 return
39 end

```

B.2. Volumes finitos

main.m

Programa principal.

Listing B.7: main.m

```

1 clear all; clf; close all
2 global params malla
3 letura_datos();
4 w0 = zeros(params.nvar,malla.M);
5 for i=1:malla.M % media da integral da condición inicial por celas
6     w0(:,i) = integral(@cond_ini,malla.celas(i),malla.celas(i+1), ...
7     "ArrayValued",true)/malla.dx;
8 end
9 wf = volfin(w0);
10 resultados(wf);

```

letura_datos.m

Le os datos e constrúe a malla.

Listing B.8: letura_datos.m

```

1 function letura_datos(carpeta)
2 % Letura dos datos contidos no directorio .\carpeta
3 % params: estrutura cos parámetros xerais do problema
4 %   nvar:   número de variables do problema
5 %   cfl:   número cfl (0 <= cfl < 1)
6 %   tf:    tempo final
7 %   test:  problema de proba a executar (con solución exacta), se é -1 (por
8 % defecto), a condición inicial vén dada polo arquivo cond_inicial.dat (por
9 % facer)
10 % solver: método/esquema a usar
11 %         1 -> Godunov (Riemann exacto)
12 %         2 -> Rusanov (por defecto)
13 %         3 -> Roe
14 %   t0:    tempo inicial (por defecto 0)
15 % malla:  estrutura cos datos relacionados coa malla espacial
16 %   a:     extremo esquerdo do intervalo espacial
17 %   b:     extremo dereito do intervalo espacial
18 % fronteira: condicións fronteira
19 %         1: Dirichlet
20 %         2: Periódicas
21 %   M:     número de nodos espaciais
22 %   nodos: coordenadas dos nodos espaciais x_i
23 %   celas: extremos x_{i+-1/2} das celas C_i
24 global params malla
25 if nargin==0
26     carpeta = ".\datos\SWE"; % nome por defecto da carpeta cos datos
27 end
28 % abrir o arquivo de parámetros en modo lectura
29 arquivo = carpeta + "\parametros.dat";
30 [arq,n]=valid_open(arquivo, 3);
31 params = struct("dir", carpeta, "nvar", 0, "cfl", 0, "t0", 0, "tf", 0, ...
32     "solver", 2, "test", -1, "g", 9.8);
33 params.nvar = fscanf(arq,"%i",1);
34 params.cfl = fscanf(arq,"%f",1);
35 if(params.cfl <= 0 || params.cfl>1)
36     error("0 número CFL debe estar entre 0 e 1\n") % uso de métodos explícitos
37 end
38 params.tf = fscanf(arq,"%f",1);
39 if(n>3)
40     params.test = fscanf(arq,"%i",1);
41     if(n>4)
42         params.solver = fscanf(arq,"%i",1);
43         if(n>5)
44             params.t0 = fscanf(arq,"%f",1);
45         end
46     end
47 end
48 fclose(arq);

```

```

49 % abrir o arquivo de parámetros en modo lectura
50 arquivo = carpeta + "\malla.dat";
51 [arq,n] = valid_open(arquivo, 5);
52 malla = struct("a", 0, "b", 0, "fronteira_esq", 0, ...
53     "fronteira_der", 0, "M", 0, "nodos", 0, "celas", 0, "dx", 0);
54 malla.a = fscanf(arq, "%f", 1);
55 malla.b = fscanf(arq, "%f", 1);
56 malla.fronteira_esq = fscanf(arq, "%i", 1);
57 malla.fronteira_der = fscanf(arq, "%i", 1);
58 malla.M = fscanf(arq, "%i", 1);
59 if(n>5)
60     malla.nodos = fscanf(arq, "%f", [1, malla.M])';
61     malla.celas = [malla.a; (malla.nodos(1:(malla.M-1)) + ...
62         malla.nodos(2:malla.M))/2; malla.b];
63 else
64     malla.celas = linspace(malla.a, malla.b, malla.M+1)';
65     malla.nodos = (malla.celas(1:malla.M) + malla.celas(2:(malla.M+1)))/2;
66 end
67 malla.dx = max(diff(malla.celas));
68 fclose(arq);
69 return
70 end
71
72 function [arq,n]=valid_open(arquivo, nmin)
73 arq=fopen(arquivo, "r");
74 if arq==-1
75     error("Erro ao ler " + arquivo + "\n");
76 end
77 % n é o número de li as do arquivo, que se supón o número de parámetros
78 n=0;
79 while fgetl(arq)~= -1 % contamos o número de li as
80     n=n+1;
81 end
82 if n<nmin
83     error("Non hai suficientes datos en " + arquivo + "\n")
84 end
85 frewind(arq);
86 return
87 end

```

cond_ini.m

Condición inicial do problema.

Listing B.9: cond_ini.m

```

1 function w0=cond_ini(x)
2 % Condicións iniciais
3 global params
4 n = length(x);
5 w0 = zeros(params.nvar, n);
6 switch params.test

```

```

7   case -1 % en proceso
8       % arq = fopen(params.dir + "\cond_inicial.dat","r");
9       % w0 = fscanf(arq,"%f",[1,n]');
10      % fclose(arq);
11   case 0 % problema estacionario
12       w0(1,:) = 2+zeros(1,n);
13       w0(2:params.nvar,:) = zeros(params.nvar-1,n);
14   case 1 % problema constante
15       w0(1,:) = 3+zeros(1,n);
16       w0(2:params.nvar,:) = 3+zeros(params.nvar-1,n);
17   case 2 % doble rarefacción
18       wl=phys2cons([2; -2]);
19       wr=phys2cons([2; 2]);
20       rp=wetbed(wl,wr);
21       for i=1:n
22           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
23       end
24   case 3 % rarefacción izquierda, choque derecha
25       wl=phys2cons([4; 2]);
26       wr=phys2cons([2; 1]);
27       rp=wetbed(wl,wr);
28       for i=1:n
29           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
30       end
31   case 4 % choque izquierda, rarefacción derecha
32       wl=phys2cons([2; -1]);
33       wr=phys2cons([4; -2]);
34       rp=wetbed(wl,wr);
35       for i=1:n
36           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
37       end
38   case 5 % doble choque
39       wl=phys2cons([2; 2]);
40       wr=phys2cons([2; 1]);
41       rp=wetbed(wl,wr);
42       for i=1:n
43           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
44       end
45   case 6 % presencia de onda de corte
46       wl=phys2cons([3; 1.5; 1]);
47       wr=phys2cons([1; 0; -1]);
48       rp=wetbed(wl,wr);
49       for i=1:n
50           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
51       end
52   case 7 % rotura de presa
53       wl=phys2cons([100; 0; 0]);
54       wr=phys2cons([30; 0; 0]);
55       rp=wetbed(wl,wr);
56       for i=1:n
57           w0(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/params.t0);
58       end
59   end
60   return

```

61 end

sol_exact.m

Solución exacta do problema.

Listing B.10: sol_exact.m

```

1 function sol=sol_exact(x,t)
2 % Algunhas solucións exactas de proba para a validación dos métodos
3 global params
4 n = length(x);
5 sol = zeros(params.nvar, n);
6 switch params.test
7     case 0 % solución estacionaria
8         sol(1,:) = 2+zeros(1,n);
9         sol(2:params.nvar,:) = zeros(params.nvar-1,n);
10    case 1 % solución constante
11        sol(1,:) = 3+zeros(1,n);
12        sol(2:params.nvar,:) = 3 + zeros(params.nvar-1,n);
13    case 2 % doble rarefacción
14        wl=phys2cons([2; -2]);
15        wr=phys2cons([2; 2]);
16        rp=wetbed(wl,wr);
17        for i=1:n
18            sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
19        end
20    case 3 % rarefacción esquerda, choque dereita
21        wl=phys2cons([4; 2]);
22        wr=phys2cons([2; 1]);
23        rp=wetbed(wl,wr);
24        for i=1:n
25            sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
26        end
27    case 4 % choque esquerda, rarefacción dereita
28        wl=phys2cons([2; -1]);
29        wr=phys2cons([4; -2]);
30        rp=wetbed(wl,wr);
31        for i=1:n
32            sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
33        end
34    case 5 % doble choque
35        wl=phys2cons([2; 2]);
36        wr=phys2cons([2; 1]);
37        rp=wetbed(wl,wr);
38        for i=1:n
39            sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
40        end
41    case 6 % presenza de onda de corte
42        wl=phys2cons([3; 1.5; 1]);
43        wr=phys2cons([1; 0; -1]);
44        rp=wetbed(wl,wr);

```

```

45     for i=1:n
46         sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
47     end
48     case 7 % rotura de presa
49         wl=phys2cons([100; 0; 0]);
50         wr=phys2cons([30; 0; 0]);
51         rp=wetbed(wl,wr);
52         for i=1:n
53             sol(:,i)=rp_simil(rp,x(i)/t);
54         end
55     end
56     return
57 end

```

volfin.m

Función principal para aplicar o método de volumes finitos.

Listing B.11: volfin.m

```

1 function wf=volfin(wn)
2 % Función principal para o método de volumes finitos. A partir de wn
3 % obtense wf co fluxo numérico en cada paso de tempo.
4 global params malla
5 tn = params.t0; wf=wn;
6 while(tn < params.tf)
7     dt = calcula_dt(wn); % calcúlase o paso de tempo a partir do número CFL
8     if((params.tf-tn) < dt)
9         dt = params.tf - tn; % para non pasarse do tempo final
10    end
11    fprintf("Tempo: %f, dt: %f\n",tn,dt);
12    dtdx = dt/malla.dx;
13    %% Os termos fonte están sen implementar %%
14    % Condicións de contorno en x=a
15    fnmenos = ccontorno_esq(wn,tn,malla.fronteira_esq);
16    fnmas = fluxo_num(wn(:,1),wn(:,2));
17    wf(:,1) = wn(:,1)-dtdx*(fnmas-fnmenos);
18    for i=2:(malla.M-1)
19        fnmenos = fnmas;
20        fnmas = fluxo_num(wn(:,i),wn(:,i+1));
21        wf(:,i) = wn(:,i) - dtdx*(fnmas-fnmenos);
22    end
23    % Condicións de contorno en x=b
24    fnmenos = fnmas;
25    fnmas = ccontorno_der(wn,tn,malla.fronteira_der);
26    wf(:,malla.M) = wn(:,malla.M)-dtdx*(fnmas-fnmenos);
27    wn = wf; % actualizamos a condición inicial
28    tn = tn + dt; % actualizamos o tempo
29 end
30 return
31 end

```

calcula_dt.m

Calcula o paso de tempo Δt en función do valor c_{cfl} e Δx .

Listing B.12: calcula_dt.m

```

1 function dt=calcula_dt(w)
2 global params malla
3 u = cons2phys(w);
4 snmax = max(abs(u(2,:))+sqrt(params.g*u(1,:))); % estimación da velocidade de onda máxima
5 dt = params.cfl*malla.dx/snmax;
6 return
7 end

```

RoeMat.m

Calcula a matriz de Roe ou outra derivada da mesma.

Listing B.13: RoeMat.m

```

1 function A=RoeMat(wl,wr,flag)
2 % Calcula a matriz A(wl,wr) do linearizado de Roe.
3 % flag == 1 -> calcular |A(wl,wr)|
4 % flag == 2 -> calcular A(wl,wr)^-1
5 % flag == 3 -> calcular sign(A)
6 global params
7 ul = cons2phys(wl); ur = cons2phys(wr);
8 haux = sqrt([wl(1);wr(1)]);
9 ubar = sum(haux.*[ul(2);ur(2)])/sum(haux);
10 abar = sqrt(0.5*params.g*(ul(1)+ur(1)));
11 if(params.nvar == 3)
12     vbar = sum(haux.*[ul(3);ur(3)])/sum(haux);
13     lambda = [ubar-abar, ubar, ubar+abar]; % valores propios
14     P = [1, 0, 1; lambda(1), 0, lambda(3); vbar, 1, vbar]; % vectores propios
15 else
16     lambda = [ubar-abar, ubar+abar]; % valores propios
17     P = [1, 1; lambda(1), lambda(2)]; % vectores propios
18 end
19 switch flag
20     case 1 % abs(A)
21         A = P*diag(abs(lambda))*P^-1;
22     case 2 % A^-1
23         A = P*diag(1./lambda)*P^-1; % pendiente de tratar con valores propios nulos
24     case 3 % signo(A)
25         A = P*diag(sign(lambda))*P^-1;
26     otherwise % A
27         A = P*diag(lambda)*P^-1;
28 return
29 end

```

fluxo.m

O fluxo físico.

Listing B.14: fluxo.m

```

1 function fw=fluxo(w)
2 % Fluxo físico
3 global params
4 fw=w;
5 fw(1,:) = w(2,:);
6 fw(2,:) = w(2,:).^2./w(1,.)+0.5*params.g*w(1,:).^2;
7 if(params.nvar == 3)
8     fw(3,:) = w(2,:).*w(3,:)./w(1,:);
9 end
10 return
11 end

```

fluxo_num.m

O fluxo numérico. Inclúe o de Godunov (Riemann exacto), Rusanov e Roe.

Listing B.15: fluxo_num.m

```

1 function res=fluxo_num(wl,wr)
2 % Cálculo do fluxo numérico  $F^{n_{i+1/2}}$  a partir dos estados  $w^{n_i}$  e
3 %  $w^{n_{i+1}}$  usando o método/esquema dado por params.solver
4 global params
5 switch params.solver
6     case 1 % Godunov
7         rp = wetbed(wl,wr);
8         res = fluxo(rp_simil(rp,0)); %  $F(w_{i+1/2}(0))$ 
9     case 2 % Rusanov
10        ul = cons2phys(wl); ur = cons2phys(wr);
11        h0=0.5*(sqrt(params.g*ul(1))+sqrt(params.g*ur(1)) - ...
12            0.5*(ur(2)-ul(2)))/params.g; % estimaci3n de h*
13        vels = [ul(2) - sqrt(params.g*ul(1))*qk(h0,ul(1)); ...
14            ur(2) + sqrt(params.g*ur(1))*qk(h0,ur(1))]; % acotaci3n das velocidades de
15        propagaci3n de ondas
16        res=0.5*(fluxo(wl)+fluxo(wr)-max(abs(vels))*(wr-wl));
17     case 3 % Roe
18        % res = 0.5*(fluxo(wr)+fluxo(wl)-RoeFlux(wl,wr));
19        res = 0.5*(fluxo(wr)+fluxo(wl)-RoeMat(wl,wr,1)*(wr-wl));
20 end
21 return
22 end
23 function val=qk(h,hk)
24 if(h>hk)
25     val=sqrt(0.5*h*(h+hk)/hk^2);
26 else
27     val=1;

```

```
28 end
29 return
30 end
```

ccontorno_esq.m

Calcula o fluxo numérico no límite esquerdo a partir das condicións de contorno en $x = a$.

Listing B.16: ccontorno_esq.m

```
1 function fluxocc=ccontorno_esq(wn,tn,tipo)
2 % Condicións de contorno en x=a
3 global malla
4 wr = wn(:,1);
5 switch tipo
6     case 1 % Dirichlet
7         wl = DirichletEsq(tn);
8         fluxocc = fluxo_num(wl, wr);
9     case 2 % Periódicas
10        fluxocc = fluxo_num(wn(:,malla.M), wr);
11     case 3 % Neumann
12        wl = wr - malla.dx*NeumannEsq(tn)/2;
13        fluxocc = fluxo_num(wl, wr);
14     otherwise
15        fluxocc = 0;
16 end
17 return
18 end
```

ccontorno_der.m

Calcula o fluxo numérico no límite dereito a partir das condicións de contorno en $x = b$.

Listing B.17: ccontorno_der.m

```
1 function fluxocc=ccontorno_der(wn,tn,tipo)
2 % Condicións de contorno en x=b
3 global malla
4 wl = wn(:,malla.M);
5 switch tipo
6     case 1 % Dirichlet
7         wr = DirichletDer(tn);
8         fluxocc = fluxo_num(wl, wr);
9     case 2 % Periódicas
10        fluxocc = fluxo_num(wl, wn(:,1));
11     case 3 % Neumann
12        wr = wl + malla.dx*NeumannDer(tn)/2;
13        fluxocc = fluxo_num(wl, wr);
14     otherwise
```

```
15     fluxocc = 0;
16 end
17 return
18 end
```

DirichletEsq.m

Condicions Dirichlet en $x = a$.

Listing B.18: DirichletEsq.m

```
1 function wfron=DirichletEsq(t)
2 global malla
3 wfron = sol_exact(malla.a,t);
4 return
5 end
```

DirichletDer.m

Condicions Dirichlet en $x = b$.

Listing B.19: DirichletDer.m

```
1 function wfron=DirichletDer(t)
2 global malla
3 wfron = sol_exact(malla.b,t);
4 return
5 end
```

NeumannEsq.m

Condicions Neumann en $x = a$.

Listing B.20: NeumannEsq.m

```
1 function wx=NeumannEsq(t)
2 % Condición Neumann w_x(malla.a,t)=NeumannEsq(t)
3 wx=zeros(size(t));
4 return
5 end
```

NeumannDer.m

Condicions Neumann en $x = b$.

Listing B.21: NeumannDer.m

```

1 function wx=NeumannDer(t)
2 % Condición Neumann w_x(malla.b,t)=NeumannDer(t)
3 wx=zeros(size(t));
4 return
5 end

```

resultados.m

Crea os ficheiros coas gráficas nas que aparecen a solución exacta e a aproximada, calculada con *volfin.m*.

Listing B.22: resultados.m

```

1 function resultados(wf)
2 % Debuxa as gráficas dos resultados finais e garda as figuras
3 global params malla
4 u = cons2phys(wf);
5 sol = cons2phys(sol_exact(malla.nodos,params.tf));
6 res_dir = params.dir + "\resultados\test" + params.test + "\solver" + params.solver; %
   carpeta onde se gardan os resultados
7 mkdir(res_dir)
8 figh=plot(malla.nodos,sol(1,:), "k-");
9 % axis equal
10 axis([malla.a, malla.b, 1.1*(min(sol(1,:))-1), 1.1*(max(sol(1,:))+1)]);
11 ylabel("h(x,t_f)")
12 xlabel("x")
13 hold on
14 plot(malla.nodos,u(1,:), "kx");
15 legend("Sol. exacta", "Sol. aproximada")
16 saveas(figh, res_dir + "\h.png")
17 hold off
18 figu=plot(malla.nodos,sol(2,:), "r-");
19 % axis equal
20 axis([malla.a, malla.b, 1.1*(min(sol(2,:))-1), 1.1*(max(sol(2,:))+1)]);
21 ylabel("u(x,t_f)")
22 xlabel("x")
23 hold on
24 plot(malla.nodos,u(2,:), "rx")
25 legend("Sol. exacta", "Sol. aproximada")
26 saveas(figu, res_dir + "\u.png")
27 hold off
28 if(params.nvar == 3)
29     figv=plot(malla.nodos,sol(3,:), "b-");
30     % axis equal
31     axis([malla.a, malla.b, 1.1*(min(sol(3,:))-1), 1.1*(max(sol(3,:))+1)]);
32     ylabel("v(x,t_f)")
33     xlabel("x")
34     hold on
35     plot(malla.nodos,u(3,:), "bx")
36     legend("Sol. exacta", "Sol. aproximada")

```

```

37     saveas(figv,res_dir + "\v.png")
38     hold off
39 end
40 return
41 end

```

B.3. Análise de converxencia

converxencia.m

Crea as táboas de converxencia, como por exemplo 4.2.

Listing B.23: converxencia.m

```

1  %%%% Análise de converxencia %%%%
2  clear all;
3  global params malla
4  letura_datos();
5  conv_dir = params.dir + "\converxencia\test" + params.test;
6  mkdir(conv_dir)
7  arquivo = conv_dir + "\solver" + params.solver + ".txt";
8  arq = fopen(arquivo,"w");
9  if(arq==-1)
10     error("Erro ao abrir " + arquivo + "\n");
11 end
12 fprintf(arq,"-----\n");
13 fprintf(arq,"| M          | Error in || ||_L2 | p_k          |\n");
14 fprintf(arq,"-----\n");
15 errL2 = zeros(6);
16 for k=0:5
17     malla.M=25*2^k;
18     malla.celas = linspace(malla.a,malla.b,malla.M+1)';
19     malla.nodos = (malla.celas(1:malla.M) + malla.celas(2:(malla.M+1)))/2;
20     malla.dx = max(diff(malla.celas));
21     w0 = zeros(params.nvar,malla.M);
22     for i=1:malla.M % media da integral da condición inicial por celas
23         w0(:,i) = integral(@cond_ini,malla.celas(i),malla.celas(i+1), ...
24             "ArrayValued",true)/malla.dx;
25     end
26     wf = volfin(w0);
27     sol = sol_exact(malla.nodos,params.tf);
28     errL2(k+1) = normalL2(wf,sol);
29 end
30 malla.M=25;
31 fprintf(arq,"| %3i          | %1.4f          |          |\n", ...
32     malla.M, errL2(1));
33 fprintf(arq,"-----\n");
34 for k=1:5
35     malla.M=25*2^k;
36     fprintf(arq,"| %3i          | %1.4f          | %1.5f          |\n", ...

```

```
37         malla.M, errL2(k+1), log(errL2(k)/errL2(k+1))/log(2));
38     fprintf(arq, "-----\n");
39 end
40 fclose(arq);
```


Bibliografía

- [1] Bermúdez, A. (2005) *Continuum Thermomechanics*. Birkhauser, Basel.
- [2] Toro, E. F. (2001) *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley.
- [3] Vázquez-Cendón, M. E. (2015) *Solving Hyperbolic Equations with Finite Volume Methods*. Springer International Publishing (2015).
- [4] Godlewski, E. & Raviart, P. A. (2013) Nonlinear hyperbolic systems in one space dimension en *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws* (pp. 37-98). New York, NY: Springer.
- [5] Vázquez-Cendón, M.E. and Toro, E.F. (2003) *Exact solution of some hyperbolic systems with source terms*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 459(2029), pp. 263–271. doi:10.1098/rspa.2002.0987.
- [6] LeFloch, P. G. (2002) *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Basel AG, Springer
- [7] Lax, P. D. (1973) *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [8] Lee, J. M. (2012) Integral Curves and Flows. En *Introduction to Smooth Manifolds* (pp. 205–248). New York, NY: Springer.
- [9] Dafermos, C. M. (2016). *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer Berlin, Heidelberg.
- [10] Toro, E. F. (2009). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [11] Vázquez-Cendón, M.E. (1999) *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, Journal of Computational Physics, 148(2), pp. 497–526. doi:10.1006/jcph.1998.6127.
- [12] Toro, E. F. (2024) *Computational Algorithms for Shallow Water Equations*. Springer Cham.

- [13] Glaister, P. (1988) *Approximate riemann solutions of the shallow water equations*. Journal of Hydraulic Research, 26(3), pp. 293–306. doi:10.1080/00221688809499213.