



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo de Fin de Grao

# A conxectura de Andrews-Curtis

Alba Sendón Blanco

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO EN MATEMÁTICAS

**Traballo de Fin de Grao**

# **A conxectura de Andrews-Curtis**

Alba Sendón Blanco

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Xeometría e Topoloxía
<b>Título:</b> A conxectura de Andrews-Curtis
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Sexa <math>G</math> un grupo dado por unha presentación</p> $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ <p>A presentación dise balanceada se hai o mesmo número de xeradores (<math>n</math>) que de relacións (<math>m</math>). A conxectura de Andrews-Curtis afirma que toda presentación balanceada do grupo trivial pode transformarse na presentación trivial mediante unha sucesión de operacións elementais descritas en (*).</p> <p>O obxectivo do traballo consiste en introducirse no estudo da conxectura. Poderá abordarse a relación coa conxectura de Andrews-Curtis xeométrica, que é equivalente á conxectura orixinal pero enúnciase en termos topolóxicos.</p> <p>Tamén poderá complementarse o traballo cun enfoque computacional empregando o software GAP.</p>
<b>Recomendacións</b>
(*). Barmak, J. A. (2011). <i>Algebraic topology of finite topological spaces and applications</i> (Vol. 2032). Springer.



# Índice xeral

<b>Resumo e abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>1</b>
<b>1. Espazos topolóxicos finitos e conxuntos preordenados finitos</b>	<b>5</b>
1.1. Espazos topolóxicos finitos . . . . .	5
1.2. Relación entre preordes e espazos finitos . . . . .	7
1.3. Aplicacións que preservan a orde e continuidade . . . . .	10
1.4. Conexidade . . . . .	12
1.5. Topoloxías no espazo de aplicacións continuas . . . . .	13
1.6. Homotopías . . . . .	15
1.7. Propiedades de separación . . . . .	17
<b>2. Versión simplicial da conxectura de Andrews-Curtis</b>	<b>19</b>
2.1. Complexos simpliciais . . . . .	19
2.2. Operacións con complexos simpliciais . . . . .	21
2.3. Complexos de orde e posets de caras . . . . .	23
2.3.1. Subdivisión estelar . . . . .	25
2.4. Colapsos e tipo de homotopía simple . . . . .	28
2.5. O sombreiro bobo . . . . .	32
2.6. Versión simplicial da conxectura . . . . .	35
<b>3. Versión para posets da conxectura de Andrews-Curtis</b>	<b>37</b>
3.1. Núcleo dun espazo finito e Teorema de Clasificación . . . . .	37
3.2. Homotopía débil e Teorema de McCord . . . . .	42
3.3. Colapsos e tipo de homotopía simple . . . . .	48
3.4. Relación entre as conxecturas . . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



# Resumo e abstract

## Resumo

A conxectura de Andrews-Curtis foi proposta por James J. Andrews e Morton L. Curtis en 1965, é orixinalmente alxébrica e afirma que toda presentación balanceada do grupo trivial pode converterse (a través de transformacións de Andrews-Curtis) na presentación trivial.

O noso obxectivo é mostrar dúas versións diferentes da conxectura de Andrews-Curtis, ambas cun enfoque topolóxico: unha para complexos simpliciais finitos e outra para posets finitos. Ademais, estableceremos a equivalencia entre elas.

## Abstract

The Andrews-Curtis conjecture was proposed by James J. Andrews and Morton L. Curtis in 1965, is originally algebraic and states that every balanced presentation of the trivial group can become (through Andrews-Curtis transformations) the trivial presentation.

Our aim is to show two different versions of the Andrews-Curtis conjecture, both of them from a topological point of view: one for finite simplicial complexes and another one for finite posets. Furthermore, we will establish the equivalence between them.



# Introdución

Este traballo trata sobre a conxectura de Andrews-Curtis. Chámase así a unha suposición formulada polos matemáticos americanos James J. Andrews e Morton L. Curtis en 1965 ([2]), orixinalmente alxébrica, que afirma o seguinte:

**Conxectura** (Andrews-Curtis, versión alxébrica). *Unha presentación balanceada do grupo trivial pode converterse (a través de transformacións de Andrews-Curtis) na presentación trivial.*

Un grupo é un conxunto cunha operación interna e asociativa tal que existe un elemento neutro e cada elemento ten o seu simétrico. O grupo trivial é aquel cun só elemento (o neutro). Calquera grupo pode darse como unha presentación  $G = \langle S \mid R \rangle = F(S)/\langle R \rangle_N$ , sendo  $S$  un conxunto (de xeradores),  $R \subseteq F(S)$  un subconxunto do grupo libre xerado por  $S$  (relacións) e  $\langle R \rangle_N$  o menor subgrupo normal de  $F(S)$  que contén a  $R$ . Así, un grupo presentado por un número finito de xeradores e relacións,  $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ , dise balanceado se ten o mesmo número de xeradores ca de relacións, é dicir, se  $n = m$ . A conxectura de Andrews-Curtis di que unha presentación deste tipo do grupo trivial pode mudar na presentación trivial  $\langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$  por medio das transformacións seguintes:

**Definición** (Transformacións de Andrews-Curtis). *Sexa  $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  un grupo presentado por un número finito de xeradores e relacións, os seguintes cambios na presentación son as chamadas transformacións de Andrews-Curtis e preservan o grupo presentado:*

- *Cambiar unha relación  $r_j$  por  $r_j^{-1}$ .*
- *Cambiar unha relación  $r_j$  por  $r_j r_k$  ou  $r_k r_j$  con  $k \neq j$ .*
- *Cambiar unha relación  $r_j$  por  $w r_j w^{-1}$  con  $w \in F(x_1, \dots, x_n)$ .*
- *Cambiar todas as aparicións do xerador  $x_i$  nas relacións por  $x_i^{-1}$ ,  $x_i x_j$  ou  $x_j x_i$  con  $i \neq j$ .*

- *Engadir un novo xerador  $x$  e unha nova relación  $x$ .*
- *Se na presentación aparecen un xerador  $x$  e unha relación  $x$ , eliminar ambos.*

No noso caso, manexaremos dúas versións distintas desta conxectura, ambas topolóxicas, pois aínda que nun primeiro momento a Topoloxía se presente como unha materia máis ben teórica e cunha compoñente analítica forte, existe unha faceta da mesma máis combinatoria e relacionada coa Álgebra, así como con moitos problemas que manteñen ocupados ós matemáticos na actualidade.

Basearémonos principalmente na tese doutoral do matemático arxentino Jonathan A. Barmak ([3]), así coma en moitas obras da bibliografía da mesma, escritas por coñecidos topólogos coma o británico John H. C. Whitehead ([22]) ou os americanos Robert E. Stong ([19]) e Michael C. McCord ([15]). Tamén tomaremos ideas de autores máis recentes con obras non utilizadas por Barmak, como poden ser o ruso-alemán Dmitry F. Kozlov ([13]), o americano Bruno Benedetti ou o alemán Frank H. Lutz ([4]).

No primeiro capítulo, analizaremos as propiedades topolóxicas dos espazos finitos, os cales a priori poden parecer pouco interesantes. Chegaremos á conclusión de que os conceptos de espazo topolóxico finito e de conxunto preordenado finito son basicamente o mesmo, só que baixo diferentes enfoques. Veremos que o estudo topolóxico e homotópico deste tipo de espazos tamén se pode reducir a termos combinatorios: as aplicacións continuas entre espazos finitos son exactamente aquelas que preservan a orde entre os conxuntos preordenados asociados, e para probar que dous espazos finitos son homotopicamente equivalentes basta atopar unha cerca (Definición 1.36) de aplicacións continuas entre un e outro. Aprenderemos que incluso podemos estudar sen perda de xeneralidade (cando falamos de invarianza homotópica) tan só os conxuntos parcialmente ordenados (posets) finitos.

No segundo capítulo, adentrarémonos no mundo dos complexos simpliciais: aprenderemos que son e como construír a súa realización xeométrica, así como a relación que gardan cos posets. Introduciremos tamén as nocións de colapso, expansión, deformación e tipo de homotopía simple para complexos simpliciais finitos, chegando á conclusión de que se dous complexos simpliciais teñen o mesmo tipo de homotopía simple, as súas respectivas realizacións xeométricas teñen o mesmo tipo de homotopía. Porén, o recíproco non se cumpre: analizaremos en particular o caso do sombreiro bobo. Trátase dun complexo simplicial finito que non se pode colapsar a un punto pero cuxa realización xeométrica é contráctil. Con todo, o sombreiro bobo pódese 3-deformar a un punto, feito que motiva que se conxecture que isto ocorre para todo 2-complejo simplicial.

**Conxectura** (Andrews-Curtis, versión simplicial). *Dado un complexo simplicial finito 2-dimensional  $K$  tal que a súa realización xeométrica  $|K|$  é contráctil, entón  $K$  é 3-deformable*

a un punto.

Chegamos así á versión máis puramente xeométrica da conxectura, a cal está estreitamente relacionada con conxecturas e teoremas quizais máis famosos:

**Conxectura** (Zeeman). *Dado un complexo simplicial finito 2-dimensional  $K$  tal que a súa realización xeométrica  $|K|$  é contráctil, entón  $|K| \times [0, 1]$  é poliedricamente colapsable.*

**Teorema** (Poincaré). *Calquera variedade compacta de dimensión 3 simplemente conexas e sen fronteira é homeomorfa á 3-esfera.*

Así, cunha versión da conxectura de Andrews-Curtis para complexos simpliciais e unha relación entre estes últimos e os posets, no terceiro capítulo presentamos unha versión da conxectura para conxuntos parcialmente ordenados finitos que será equivalente á xa vista. Con esta intención, introducimos as ideas de beat point e tipo de homotopía forte para espazos finitos e demostramos que esta última equivale ó concepto de tipo de homotopía. Tamén aprenderemos os conceptos de grupo de homotopía e tipo de homotopía débil, vendo que este último termo equivale a tipo de homotopía para realizacións xeométricas de complexos simpliciais, pero non en xeral. Así, mostramos o que son os beat points débiles e probamos que a súa eliminación é unha equivalencia de homotopía débil entre espazos finitos. Desta maneira, chegamos a que a conxectura que vimos para complexos simpliciais é equivalente á seguinte:

**Conxectura** (Andrews-Curtis, versión para posets). *Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$  de altura 2. Se  $X$  é debilmente homotopicamente equivalente a un punto, entón  $X$  3-defórmase a un punto.*

Cómpre dicir que a análise feita para complexos simpliciais pódese estender para CW-complexos ([21]), espazos topolóxicos que tamén definiremos. Con esta xeralización, pódese establecer a equivalencia entre as dúas conxecturas topolóxicas e a alxébrica dunha maneira similar á que mostramos neste traballo: búscase unha maneira de relacionar cada CW-complexo cun grupo dado por unha presentación e viceversa, e establécense equivalencias entre as transformacións de Andrews-Curtis e os colapsos e expansións elementais ([7], Chapter 1; [23]). Da mesma forma, a cada grupo dado por unha presentación podemoslle asociar un “presentation poset” e viceversa, e relacionar as operacións realizadas entre ambos ([8]).

O plantexamento combinatorio de todo o traballo pide a berros un tratamento computacional do mesmo. GAP (Groups, Algorithms, Programming) é un software para Álgebra discreta computacional, especialmente centrado na teoría de grupos computacional. Trátase dun sistema idóneo para usar neste caso, e de feito utilízanos moitos expertos neste

campo. Por falta de tempo e espazo, non é posible incluír un capítulo sobre programación neste traballo, pero non descartamos que este sexa o punto de partida de investigacións posteriores.

Na actualidade, sábese que a conxectura é certa para dimensións maiores ca 2, e para dimensión 2 coñécese a validez da mesma nalgúns casos particulares. Porén, pénsase que a conxectura é falsa en xeral, existindo varios contraexemplos potenciais ([12]):

$$\langle a, b, c \mid c^{-1}bc = b^2, a^{-1}ca = c^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$$

$$\langle a, b \mid ba^2b^{-1} = a^3, ab^2a^{-1} = b^3 \rangle$$

$$\langle a, b \mid aba = bab, a^4 = b^5 \rangle$$

Coa cantidade de enfoques distintos cos que conta a conxectura e a gran ferramenta que constitúe a computación, non sería raro confirmala ou desmentila nun futuro próximo.

# Capítulo 1

## Espazos topolóxicos finitos e conxuntos preordenados finitos

### 1.1. Espazos topolóxicos finitos

Comezamos introducindo unhas nocións básicas de Topoloxía Xeral que nos serán útiles ó longo do capítulo.

**Definición 1.1.** Unha *topoloxía* sobre un conxunto  $X$  consiste nunha familia  $\tau$  de subconxuntos de  $X$  tal que:

1. O conxunto baleiro e o total pertencen á topoloxía:  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. Dada unha familia arbitraria de elementos da topoloxía, a súa unión tamén pertence a ela:  $U_\alpha \in \tau \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$ .
3. Dada unha familia finita de elementos da topoloxía, a súa intersección tamén pertence a ela:  $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ .

Un par  $(X, \tau)$  con  $X$  un conxunto e  $\tau$  unha topoloxía sobre  $X$  chámase *espazo topolóxico*. Os elementos de  $\tau$  son os *abertos* de  $X$ , e se  $x \in U$  con  $U$  aberto diremos que  $U$  é unha *veciñanza (aberta)* de  $x$ . Verifícase o seguinte:  $A \subseteq X, A \in \tau \iff \forall x \in A \exists U \in \tau: x \in U \subseteq A$ .

Os complementarios dos abertos serán os *pechados* do espazo topolóxico e verifican que  $\emptyset$  e  $X$  son pechados, que a unión finita de pechados é un pechado e que a intersección arbitraria de pechados é un pechado.

Usualmente, denotaremos por  $X$  o espazo topolóxico  $(X, \tau)$  cando está claro (ou é irrelevante) que topoloxía estamos a usar.

**Definición 1.2.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico. Unha familia de abertos  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  será unha *base da topoloxía*  $\tau$  se todo aberto da topoloxía se pode expresar como unión de elementos de  $\mathcal{B}$ . Equivalentemente,  $\mathcal{B}$  será unha base de  $\tau$  se dados  $U \in \tau$ ,  $x \in U$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq U$ .

**Proposición 1.3.** Unha familia  $\mathcal{B}$  de subconxuntos dun conxunto  $X$  será unha base dalgunha topoloxía sobre  $X$  se, e só se, verifica:

- Cada punto do conxunto está contido nalgún elemento de  $\mathcal{B}$ :  $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}: x \in B$ .  
De maneira equivalente,  $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$ .
- Para calquera par de elementos de  $\mathcal{B}$  e para cada punto na intersección de ambos, existe un elemento de  $\mathcal{B}$  que contén o punto e que está contido na intersección: se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}: x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

Neste caso, dita topoloxía é o conxunto de unións arbitrarias de elementos da base:

$$\tau(\mathcal{B}) = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{B} \forall \alpha \in \mathcal{A} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

**Definición 1.4.** Para cada  $x$  nun espazo topolóxico  $(X, \tau)$ , unha familia  $\mathcal{B}_x$  de veciñanzas de  $x$  será unha *base local* de  $\tau$  en  $x$  se para todo aberto  $U$  contendo a  $x$  existe un elemento de  $\mathcal{B}_x$  contido en  $U$ :  $\forall U \in \tau, x \in U \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x: x \in B \subseteq U$ .

**Definición 1.5.** Unha familia de abertos  $\mathcal{S} \subseteq \tau$  será unha *subbase* da topoloxía  $\tau$  se o conxunto de interseccións finitas de elementos de  $\mathcal{S}$  constitúe unha base de  $\tau$ . Isto significa que podemos escribir calquera aberto de  $\tau$  como unión de interseccións finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ . Entón,  $\tau$  é a topoloxía máis pequena que contén a  $\mathcal{S}$  e dicimos que  $\mathcal{S}$  xera  $\tau$ .

**Definición 1.6.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico e  $A \subseteq X$  un subconxunto. Verifícase que  $\tau|_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$  é unha topoloxía sobre  $A$ , á que chamaremos *topoloxía subespazo*. Diremos que  $(A, \tau|_A)$  é un *subespazo topolóxico* de  $(X, \tau)$ .

**Definición 1.7.** Sexan  $(X_1, \tau_1)$  e  $(X_2, \tau_2)$  espazos topolóxicos. Verifícase que a familia  $\{U_1 \times U_2 : U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$  é base dunha topoloxía sobre  $X_1 \times X_2$  á que denominaremos *topoloxía produto*.

**Definición 1.8.** Unha *relación de equivalencia* é unha relación reflexiva, simétrica e transitiva. Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico e consideremos unha relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $X$ . O conxunto de clases de equivalencia denomínase *conxunto cociente*  $X/\sim$  e a aplicación  $\pi: x \in X \mapsto [x] := \{y \in X : y \sim x\} \in X/\sim$  *proxección canónica*. A familia  $\{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$  constitúe unha topoloxía sobre  $X/\sim$  á que denominaremos *topoloxía cociente*.

**Definición 1.9.** Un espazo topolóxico é *finito* se ten un número finito de elementos.

**Observación 1.10.** Os espazos topolóxicos finitos son *espazos de Alexandroff* ou *A-espazos*, é dicir, verifican que a intersección arbitraria de abertos é un aberto. Consecuentemente, a unión arbitraria de pechados é un pechado e así o conxunto de pechados dun espazo topolóxico finito  $(X, \tau)$  constitúe unha topoloxía sobre  $X$  (posiblemente distinta de  $\tau$ ). Denominaremos  $X^{op}$  o espazo topolóxico formado polos pechados de  $X$ .

Moitos dos resultados que veremos a continuación para espazos finitos verifícanse en xeral para espazos topolóxicos cun número finito de abertos ou mesmo para A-espazos.

## 1.2. Relación entre preordes e espazos finitos

Agora introduciremos a idea de conxunto preordenado para comparala coa de espazo topolóxico finito, tal e como fixeron Pavel S. Alexandroff ([1]), J. Peter May ([14]) ou Robert E. Stong ([19]).

**Definición 1.11.** Unha *preorde* sobre un conxunto é unha relación reflexiva e transitiva definida no mesmo. Un *conxunto preordenado* é un conxunto cunha preorde.

Unha *relación de orde* sobre un conxunto é unha relación reflexiva, antisimétrica e transitiva definida no mesmo. Un *conxunto parcialmente ordenado* (ou *poset*) é un conxunto cunha relación de orde.

Normalmente, empregaremos “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” para denotar a relación de preorde ou de orde, aínda que ás veces tamén faceremos uso de “ $\subseteq$ ”, “ $\supseteq$ ”. Tamén utilizaremos “ $<$ ”, “ $>$ ”, “ $\subset$ ”, “ $\supset$ ” para indicar que a relación é estrita.

**Definición 1.12.** Sexa  $X$  un conxunto parcialmente ordenado e sexan  $x, y \in X$ . Dicimos que  $x$  *precede* a  $y$  (ou que  $y$  *cobre* a  $x$ ) se  $x < y$  e  $\nexists z \in X: x < z < y$ . Escribimos  $x \prec y$ . Un *diagrama de Hasse* é unha representación gráfica dun conxunto parcialmente ordenado finito  $X$  que se consegue debuxando unha aresta ascendente dun elemento  $x$  a un elemento  $y$  de  $X$  se e só se  $x$  precede a  $y$ .

**Definición 1.13.** Sexa  $X$  un conxunto parcialmente ordenado finito (ver Exemplo 1.53):

- Un elemento  $x$  de  $X$  é *maximal* se  $x \leq y \Rightarrow y = x$ , e *minimal* se  $y \leq x \Rightarrow y = x$ .
- Un elemento  $x$  de  $X$  é un *máximo* se  $y \leq x \forall y \in X$ , e *mínimo* se  $x \leq y \forall y \in X$ .
- Unha *cadea* é un subconxunto de  $X$  totalmente ordenado; é dicir, tal que os seus elementos son comparables dous a dous. Unha *k-cadea* (ou cadea de lonxitude  $k$ ) é unha cadea de  $X$  con  $k + 1$  elementos. Definimos a *altura* dun poset finito como o máximo das lonxitudes das súas cadeas.

- Unha *anticadea* é un subconxunto de  $X$  onde ningún par deles é comparable.

**Definición 1.14.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico finito. Para cada punto  $x \in X$  definimos o seu *conxunto aberto minimal* como  $U_x = \bigcap \{U \in \tau : x \in U\}$ . Será un subconxunto aberto de  $X$  por ser intersección finita de abertos.

**Proposición 1.15.** *A familia de conxuntos abertos minimais constitúe unha base da topoloxía de  $X$ . Ademais, calquera outra base de  $\tau$  ten que conter a esta. Por isto, será a chamada base minimal de  $X$ .*

*Demostración.* Sexa  $U$  aberto,  $x \in U$ . Temos que  $x \in U_x \subseteq U$  por definición de  $U_x$ . Vemos así que o conxunto de abertos minimais é unha base de  $\tau$ . Ademais, sexa  $\mathcal{B}$  unha base calquera de  $\tau$  e  $x \in X$  arbitrario. Entón,  $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U_x \Rightarrow U_x = B \in \mathcal{B}$ , co cal a base minimal está contida en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Observación 1.16.** É claro que todo espazo topolóxico finito  $(X, \tau)$  é *primeiro numerable*, é dicir, admite unha base local numerable (en particular, finita e unitaria) en cada punto. En efecto, para  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x = \{U_x\}$  é unha base local da topoloxía, pois se  $x \in U \in \tau$ , entón  $x \in U_x \subseteq U$  por definición.

Ademais, será *segundo numerable*, é dicir, admite unha base numerable (en particular, finita e con tantos elementos coma  $X$ ), pois acabamos de ver que a base minimal é unha base da topoloxía.

**Definición 1.17.** Definimos a seguinte relación no espazo topolóxico finito  $(X, \tau)$ :

$$x \leq y : \iff U_x \subseteq U_y \iff x \in U_y.$$

A última equivalencia séguese de que se  $U_x \subseteq U_y$ , como  $x \in U_x \subseteq U_y$ , é claro que  $x \in U_y$ . Reciprocamente, se  $x \in U_y$ , temos que  $U_y$  é unha veciñanza de  $x$  e por definición,  $U_x \subseteq U_y$ . A relación definida é de preorde: a propiedade reflexiva verificase porque  $x \in U_x$ , logo  $x \leq x$ , e a propiedade transitiva cúmprese porque se  $x \leq y$ ,  $y \leq z$ , entón  $U_x \subseteq U_y$ ,  $U_y \subseteq U_z$  e polo tanto,  $U_x \subseteq U_z$  e  $x \leq z$ .

**Exemplo 1.18.** Consideramos o conxunto  $X = \{a, b, c, d, e\}$  coa topoloxía

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, X\}.$$

Temos os seguintes abertos minimais:

$$U_a = \{a\}, U_b = X, U_c = \{c\}, U_d = \{d, e\}, U_e = \{d, e\}.$$

Polo tanto, a relación de preorde asociada viría dada por:

$$a \leq b, c \leq b, d \leq e \leq b, e \leq d \leq b.$$

**Definición 1.19.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito. Para cada punto  $x \in X$  definimos a súa *clausura* como  $F_x = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ pechado}, x \in F\}$ . Será un subconxunto pechado de  $X$  por ser intersección de pechados.

**Proposición 1.20.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico finito,  $x, y \in X$ . Verifícase que  $y$  está na clausura de  $x$  se, e só se,  $x$  pertence ó aberto minimal de  $y$ :  $y \in F_x \iff x \in U_y$ .

*Demostración.* Como sabemos que os pechados son os complementarios dos abertos, temos

$$F_x = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ pechado}, x \in F\} = \bigcap \{X \setminus U : U \in \tau, x \notin U\}.$$

Desta maneira,  $y \in F_x$  se e só se  $y \in X \setminus U \forall U \in \tau : x \notin U$ , é dicir, se e só se todo aberto que non conteña a  $x$  tampouco contén a  $y$ . Equivalentemente,  $y \in F_x$  se e só se  $x$  pertence a todo aberto que contén a  $y$ , ou o que é o mesmo,  $y \in F_x$  se e só se  $x$  pertence ó aberto minimal de  $y$ .  $\square$

**Observación 1.21.** Xa vimos que dado un espazo topolóxico finito  $X$ , o conxunto de pechados do mesmo constitúe o espazo topolóxico finito  $X^{op}$ . Así,  $\{F_x\}_{x \in X}$  conforma unha base da topoloxía de  $X^{op}$  e ademais a última proposición vénnos a dicir que  $X^{op}$  induce en  $X$  a orde inversa ca  $X$ . En efecto,  $x \leq y \iff x \in U_y \iff y \in F_x \iff y \leq_{op} x$ .

**Definición 1.22.** Se agora consideramos  $X$  un conxunto preordenado finito e tomamos a familia  $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in X}$  con  $B_x = \{y \in X : y \leq x\}$ , vemos que esta última é unha base de topoloxía:

- Sexa  $x \in X$ . Como  $x \leq x$  por estaremos falando dunha relación de preorde,  $x \in B_x$ .
- Se  $z \in B_x \cap B_y$ , entón  $\exists B_z \in \mathcal{B} : z \in B_z \subseteq B_x \cap B_y$ .

Así, podemos considerar en  $X$  a topoloxía xerada por dita base.

**Exemplo 1.23.** Consideramos o conxunto  $X = \{a, b, c, d, e\}$  coa seguinte relación de preorde:

$$a \leq b, c \leq b, d \leq e \leq b, e \leq d \leq b.$$

A base asociada sería

$$\mathcal{B} = \{B_a, B_b, B_c, B_d, B_e\} = \{\{a\}, X, \{c\}, \{d, e\}, \{d, e\}\}.$$

Temos a seguinte topoloxía xerada pola base mencionada:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, X\}.$$

Vemos que aquí facemos o inverso que no Exemplo 1.18: partimos do conxunto preordenado que obtivemos alí e chegamos ó espazo topolóxico inicial. Ademais, notemos que a base considerada neste é a base minimal do exemplo anterior. Isto ocorrerá sempre, tal e como ilustramos no seguinte teorema.

**Teorema 1.24.** *Sexa  $X_T$  un espazo topolóxico finito. Entón podemos asociarlle un conxunto preordenado  $P(X_T)$  coa relación de preorde  $x \leq y: \iff U_x \subseteq U_y$ . Da mesma maneira, se  $X_P$  é un conxunto preordenado, podemos asociarlle un espazo topolóxico  $T(X_P)$  con base  $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in X_P}$ , sendo  $B_x = \{y \in X: y \leq x\}$ . Verifícase que  $T(P(X_T)) = X_T$  e  $P(T(X_P)) = X_P$ .*

*Demostración.* Basta ver que a base minimal coincide coa base  $\mathcal{B}$  aquí mencionada. Sexa  $x \in X$ , temos  $y \in U_x \iff y \leq x \iff y \in \{z \in X: z \leq x\} = B_x$ .  $\square$

A partir de agora falaremos indistintamente de espazos topolóxicos finitos e conxuntos preordenados finitos.

### 1.3. Aplicacións que preservan a orde e continuidade

Xa atopamos unha interpretación combinatoria dos espazos topolóxicos finitos, agora imos presentar tamén un enfoque combinatorio da continuidade das aplicacións entre os mesmos.

**Definición 1.25.** Unha aplicación entre dous espazos topolóxicos dise *continua* se a imaxe recíproca de todo aberto do codominio é un aberto do dominio.

$$f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y) \text{ continua} : \iff f^{-1}(U) \in \tau_X \ \forall U \in \tau_Y.$$

**Proposición 1.26.** *Sexan  $X$  e  $Y$  dous espazos topolóxicos,  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación. Equivalen:*

1.  $f$  continua.
2. A imaxe recíproca de todo aberto dunha base da topoloxía do codominio  $Y$  é un aberto do dominio  $X$ .
3. A imaxe recíproca de todo aberto dunha subbase da topoloxía do codominio  $Y$  é un aberto do dominio  $X$ .
4. Para todo punto  $x \in X$  do dominio e toda veciñanza  $W$  da súa imaxe  $f(x)$  existe unha veciñanza  $U$  de  $x$  tal que a súa imaxe está contida en  $W$ :

$$\forall x \in X, \forall W \in \tau_Y: f(x) \in W, \exists U \in \tau_X: x \in U, f(U) \subseteq W.$$

**Exemplo 1.27.** ■ A inclusión  $i: (A, \tau|_A) \rightarrow (X, \tau)$  con  $A \subseteq X$  é unha aplicación continua.

- A proxección canónica  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  é unha aplicación continua. É máis, trátase dunha *identificación*, que verifica que para todo espazo topolóxico  $X'$  e calquera aplicación  $f: X/\sim \rightarrow X'$  temos:  $f \circ \pi$  continua  $\iff$   $f$  continua

**Definición 1.28.** Unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  entre dous espazos topolóxicos denomínase un *homeomorfismo* se é continua, bixectiva e con inversa continua. Diremos que dous espazos topolóxicos  $X$  e  $Y$  son *homeomorfos* se existe un homeomorfismo entre eles, e denotarémolo por  $X \cong Y$ .

**Definición 1.29.** Dicimos que unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  entre dous conxuntos preordenados *preserva a orde* se  $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \forall x, x' \in X$ .

**Proposición 1.30.** *Unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  entre dous espazos topolóxicos finitos é continua se, e só se, preserva a orde dos conxuntos preordenados finitos asociados.*

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Sexan  $x, x' \in X: x \leq x'$ , (equivalentemente,  $x \in U_{x'}$ ) e vexamos que  $f(x) \leq f(x')$ . Como  $U_{f(x')}$  é un aberto en  $Y$  e  $f$  é continua,  $f^{-1}(U_{f(x')})$  será un aberto en  $X$ , e ademais  $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$  posto que  $f(x') \in U_{f(x')}$  por definición. Desta maneira,  $x \in U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$  e entón  $f(x) \in U_{f(x')}$ , ou o que é o mesmo,  $f(x) \leq f(x')$ .

“ $\Leftarrow$ ” Para ver que  $f$  é continua, é suficiente ver que a imaxe recíproca de todo aberto básico do codominio é un aberto do dominio. Consideramos así  $U_y$  un aberto da base minimal, vexamos que  $\forall x \in f^{-1}(U_y), x \in U_x \subseteq f^{-1}(U_y)$ , co cal cada punto de  $f^{-1}(U_y)$  ten unha veciñanza aberta contida no mesmo e polo tanto estamos a falar dun aberto. Sexa  $x \in f^{-1}(U_y)$ , temos  $f(x) \in U_y$ , ou, equivalentemente,  $U_{f(x)} \subseteq U_y$ . Entón,

$$z \in U_x \iff z \leq x \Rightarrow f(z) \leq f(x) \iff f(z) \in U_{f(x)} \subseteq U_y \iff z \in f^{-1}(U_y),$$

co cal concluímos o que queríamos. □

**Corolario 1.31.** *A partir de  $f: X \rightarrow Y$ , temos  $f^{op}: X^{op} \rightarrow Y^{op}$  coa mesma definición nos conxuntos subxacentes pero considerando as topoloxías duais nos espazos finitos. Temos que  $f$  é continua se, e só se,  $f^{op}$  o é.*

*Demostración.* Acabamos de ver que  $f$  é continua se, e só se, preserva a orde, é dicir, se, e só se,  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \forall x, y \in X$ . Pero isto último é equivalente a que  $x \geq_{op} y \Rightarrow f(x) \geq_{op} f(y) \forall x, y \in X^{op}$ , ou, o que é o mesmo, a que  $f^{op}$  preserve a orde, o cal ocorre se, e só se,  $f^{op}$  é continua. □

## 1.4. Conexidade

**Definición 1.32.** Un espazo topolóxico  $X$  é *conexo* se non é a unión disxunta de dous abertos non baleiros. Equivalentemente,  $X$  é conexo se os únicos subconxuntos del “abertos e pechados á vez” son  $\emptyset$  e  $X$ . Verifícase que  $X$  é conexo se, e só se, para todo par de puntos  $x, y \in X$  existe un subconxunto conexo  $U$  de  $X$  tal que  $x, y \in U$ .

**Proposición 1.33.** *A imaxe mediante unha aplicación continua dun espazo conexo é conexa.*

*Demostración.* Ver [16], Theorem 23.5. □

**Definición 1.34.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico. Un *camiño* de  $x \in X$  a  $y \in X$  é unha aplicación continua  $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ . A relación “estar conectado por un camiño con” é de equivalencia, co cal falaremos de camiños entre puntos. Diremos que un espazo topolóxico é *conexo por camiños* se para cada par de puntos do mesmo existe un camiño entre eles.

Nun primeiro momento, podemos pensar que non existe ningunha aplicación continua do intervalo unidade (ou de calquera espazo infinito) nun conxunto finito, aparte das constantes. A seguinte proposición mostrará o contrario:

**Proposición 1.35.** *Se  $x$  e  $y$  son dous puntos comparables dun conxunto finito  $X$ , entón existe un camiño entre  $x$  e  $y$ .*

*Demostración.* Supoñamos  $x \leq y$ , é dicir,  $U_x \subseteq U_y$  (o outro caso sería análogo). Consideremos  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(t) = x$  para  $0 \leq t < 1$  e  $\alpha(1) = y$ . Obviamente,  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha(1) = y$ , e ademais  $\alpha$  é continua porque se  $U$  é un aberto de  $X$ ,

$$\alpha^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x \notin U (\Rightarrow y \notin U) \\ [0, 1), & \text{se } x \in U, y \notin U \\ [0, 1], & \text{se } y \in U (\Rightarrow x \in U) \end{cases} .$$

É dicir,  $\alpha^{-1}(U)$  é un aberto na topoloxía relativa de  $[0, 1]$  para todo aberto  $U \subseteq X$ . □

**Definición 1.36.** Sexa  $X$  un conxunto finito preordenado. Unha *cerca* en  $X$  é unha secuencia  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de puntos tales que calquera dous consecutivos son comparables. Dise que  $X$  é *orde-conexo* se para calquera dous puntos  $x, y \in X$  existe unha cerca comezando en  $x$  e acabando en  $y$ .

**Proposición 1.37.** *Sexa  $X$  un espazo finito. As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1.  $X$  é un espazo topolóxico conexo.
2.  $X$  é un conxunto preordenado orde-conexo.
3.  $X$  é un espazo topolóxico conexo por camiños.

*Demostración.* ■  $1 \Rightarrow 2$ : Supoñamos  $X$  conexo e sexa  $x \in X$ . Definimos:

$$A = \{y \in X : \text{existe unha cerca de } x \text{ a } y\}$$

Temos que  $A \neq \emptyset$  porque  $x \in A$ .

Vexamos que  $A$  é un aberto. É obvio ver que se  $y \in A$  e  $z \leq y$ , logo  $z \in A$ . Así,  $z \in A \forall z \leq y$  ou, equivalentemente,  $z \in A \forall z \in U_y$ , o que é o mesmo que  $U_y \subseteq A$ . Vemos que existe unha veciñanza de  $y$  contida en  $A$  para todo  $y$  de  $A$ , logo  $A$  é un aberto.

Vexamos agora que  $A$  é un pechado probando que  $X \setminus A$  é un aberto:

$$X \setminus A = \{y \in X : \text{non existe unha cerca de } x \text{ a } y\}.$$

É obvio ver que se  $y \in X \setminus A$  e  $z \leq y$ , logo  $z \in X \setminus A$ , pois de existir unha cerca de  $x$  a  $z$  tamén existiría de  $x$  a  $y$ . Así,  $z \in X \setminus A \forall z \leq y$  ou, equivalentemente,  $z \in X \setminus A \forall z \in U_y$ , o que é o mesmo que  $U_y \subseteq X \setminus A$ . Vemos que existe unha veciñanza de  $y$  contida en  $X \setminus A$  para todo  $y$  de  $A$ , logo  $X \setminus A$  é un aberto.

Por ser distinto do baleiro e aberto e pechado ó mesmo tempo,  $A = X$  e así para todo punto existe unha cerca de  $x$  a el, co cal dous puntos calquera de  $X$  estarán unidos por unha cerca e entón  $X$  é orde-conexo.

- $2 \Rightarrow 3$ : é consecuencia da Proposición 1.35 e de que a existencia de camiños entre puntos é unha relación de equivalencia.
- $3 \Rightarrow 1$ : sexan  $x, y \in X$ , como  $X$  é conexo por camiños, existe unha aplicación continua  $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ . Así,  $\alpha(I)$  é un subespazo conexo de  $X$  (por ser imaxe continua dun conxunto conexo, véxase a Proposición 1.33) tal que  $x, y \in \alpha(I)$ . Desta maneira, concluímos que  $X$  é conexo. □

**Observación 1.38.** Notemos que en particular  $U_x$  é conexo para todo  $x \in X$ .

## 1.5. Topoloxías no espazo de aplicacións continuas

**Definición 1.39.** Sexan  $X$  e  $Y$  dous conxuntos,  $Y$  preordenado. No conxunto de aplicacións entre  $X$  e  $Y$  establecemos unha *preorde puntual*:  $f \leq g: \iff f(x) \leq g(x) \forall x \in X$ .

Está claro que se trata dunha relación reflexiva e transitiva: en particular xerará unha topoloxía no conxunto de aplicacións entre dous conxuntos preordenados finitos que preservan a orde, ou o que é o mesmo, no conxunto de aplicacións continuas entre dous espazos topolóxicos finitos (Proposición 1.30).

**Definición 1.40.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico. Se  $\mathcal{U} \subseteq \tau$  é unha familia de abertos tal que  $X = \cup_{U \in \mathcal{U}} U$ , dicimos que  $\mathcal{U}$  é un *recubrimento (aberto)* de  $X$ . Se  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$  son dous recubrimentos de  $X$  e  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ , dicimos que  $\mathcal{U}_1$  é un *subrecubrimento* de  $\mathcal{U}_2$ . Un espazo topolóxico dise *compacto* se todo recubrimento do mesmo admite un subrecubrimento finito.

**Definición 1.41.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos topolóxicos e consideramos o conxunto  $Y^X$  de aplicacións continuas de  $X$  en  $Y$ . A *topoloxía compacto-aberta* en  $Y^X$  é a topoloxía xerada pola subbase formada polos conxuntos

$$S(K, W) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq W\}$$

con  $K$  compacto,  $K \subseteq X$  e  $W$  aberto en  $Y$ .

**Proposición 1.42.** *Se  $X$  e  $Y$  son dous espazos finitos, a topoloxía compacto-aberta coincide coa xerada pola preorde puntual no conxunto de aplicacións continuas entre eles.*

*Demostración.* Sexa  $\tau_1$  a topoloxía compacto-aberta e  $\tau_2$  a xerada pola preorde puntual.

- $\tau_1 \subseteq \tau_2$ : vexamos que  $S(K, W)$  (con  $W$  un aberto en  $Y$  e  $K$  un compacto, é dicir, un subconxunto calquera, de  $X$ ) é un aberto de  $\tau_2$ , ou, equivalentemente, que todo punto de  $S(K, W)$  admite unha veciñanza contida no mesmo. En particular, vexamos que  $U_f \subseteq S(K, W) \forall f \in S(K, W)$ . Sexa logo  $f \in S(K, W)$  e  $g \in U_f$ , é dicir, tal que  $g(x) \leq f(x) \forall x \in X$ . En particular,  $g(x) \leq f(x) \forall x \in K$ . Desta maneira,  $U_{g(x)} \subseteq U_{f(x)} \forall x \in K$ , e como  $U_{f(x)} \subseteq W \forall x \in K$  por ser  $W$  aberto, temos que  $g(x) \in U_{g(x)} \subseteq W \forall x \in K$  e entón  $g \in S(K, W)$ .
- $\tau_2 \subseteq \tau_1$ : basta ver que cada aberto da base minimal é un aberto na topoloxía compacto-aberta. Así, notemos que

$$\begin{aligned} U_f &= \{g \in Y^X : g \leq f\} = \{g \in Y^X : g(x) \leq f(x) \forall x \in X\} \\ &= \{g \in Y^X : g(x) \in U_{f(x)} \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{f(x)}). \end{aligned}$$

Será polo tanto aberto por ser intersección finita de abertos. □

## 1.6. Homotopías

**Definición 1.43.** Dicimos que unha aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  entre dous espazos topolóxicos é *homótopa* a outra aplicación continua  $g: X \rightarrow Y$  se existe unha aplicación continua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ ,  $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ . Escribimos  $f \simeq g$  e dicimos que  $H$  é unha *homotopía* de  $f$  a  $g$ .

Se dita homotopía é tal que para un subespazo  $A \subseteq X$  e para cada  $a \in A$  verifícase  $H(a, t) = f(a) \forall t \in [0, 1]$ , dicimos que  $f$  e  $g$  son *homótopas relativo a  $A$*  e escribimos  $f \simeq g \text{ rel } A$ .

A relación “ser homótopa a” no conxunto de aplicacións continuas entre dous espazos topolóxicos é de equivalencia, co cal podemos falar de que  $f$  e  $g$  son homótopas e de que  $H$  é unha homotopía entre  $f$  e  $g$ .

**Definición 1.44.** Diremos que dous espazos topolóxicos  $X$  e  $Y$  son *homotopicamente equivalentes* ou que teñen o mesmo *tipo de homotopía* se existen  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  continuas e tales que  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  e  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Escribimos  $X \simeq Y$  e dicimos que  $f$  (ou  $g$ ) é unha *equivalencia de homotopía*. Dicimos que  $X$  é un espazo *contráctil*, e escribimos  $X \simeq *$ , se ten o mesmo tipo de homotopía ca un punto.

**Definición 1.45.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico e  $E \subseteq X$  un subespazo. Dicimos que  $E$  é un *retracto* de  $X$  se existe unha aplicación continua  $r: X \rightarrow E$  tal que  $r \circ i = \text{id}_E$  (*retracción*), con  $i: E \rightarrow X$  a inclusión.  $E$  será un *retracto por deformación (forte)* se  $i \circ r \simeq \text{id}_X$  ( $\text{rel } E$ ).

**Proposición 1.46** (Lei exponencial). *Sexan  $X, Y$  espazos finitos. Existe unha bixección natural entre o conxunto de homotopías  $Y^{X \times [0, 1]}$  e o conxunto de camiños  $(Y^X)^{[0, 1]}$ :*

$$\begin{aligned} \Phi: Y^{X \times [0, 1]} &\longrightarrow (Y^X)^{[0, 1]} \\ H: X \times [0, 1] \rightarrow Y &\longmapsto \Phi(H): [0, 1] \rightarrow Y^X \\ (x, t) \mapsto H(x, t) & \qquad t \mapsto \Phi(H)(t): X \rightarrow Y \\ & \qquad \qquad \qquad x \mapsto \Phi(H)(t)(x) := H(x, t). \end{aligned}$$

*Demostración.* Esta proposición cúmprese para  $X, Y$  espazos topolóxicos en xeral con  $X$  primeiro numerable ([10], Theorem 2), en particular para espazos finitos.  $\square$

**Corolario 1.47.** *Sexan  $f, g: X \rightarrow Y$  dúas aplicacións continuas entre espazos finitos. Serán homótopas se, e só se, hai unha cerca  $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$ . Ademais,  $f$  e  $g$  serán homótopas relativo a  $A \subseteq X$  se, e só se, hai unha cerca  $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$  tal que  $f_i|_A = f|_A \forall 0 \leq i \leq n$ .*

*Demostración.* Existe unha homotopía  $H$  entre  $f$  e  $g$  se, e só se, existe un camiño  $\Phi(H)$  entre  $f$  e  $g$ , e pola Proposición 1.37 isto é equivalente a que exista unha cerca entre  $f$  e  $g$ . Ademais, esta homotopía será tal que para cada  $a \in A$ ,  $H(a, t) = f(a) \forall t \in [0, 1]$  se, e só se,  $\Phi(H)(t)(a) = f(a) \forall t \in [0, 1]$ , é dicir, se, e só se,  $\Phi(H)(t)|_A = f|_A \forall t \in [0, 1]$ . Así,  $f$  e  $g$  serán homótopas relativo a  $A \subseteq X$  se, e só se, hai unha cerca  $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots f_n = g$  cumprindo  $f_i|_A = f|_A \forall 0 \leq i \leq n$ .  $\square$

**Exemplo 1.48.** Calquera espazo finito  $X$  cun máximo é contráctil. En efecto, sexa  $m \in X$  dito máximo e consideremos  $r: x \in X \mapsto m \in \{m\}$ . Temos que  $r$  é continua porque preserva a orde (ou porque é constante), que  $r \circ i = \text{id}_{\{m\}}$  e que  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ . Isto último séguese de que  $\text{id}_X(x) = x \leq m = (i \circ r)(x) \forall x \in X$ . Así,  $\text{id}_X \leq i \circ r$  e chegamos ó que queríamos. Temos que existe un punto de  $X$  que é un retracto por deformación forte do mesmo, co cal  $X$  é contráctil. Cunha demostración análoga, podemos probar que pasa o mesmo con calquera espazo finito cun mínimo.

Porén, non todo espazo finito contráctil ten que ter un máximo ou un mínimo: por exemplo, o poset  $X$  cuxo diagrama de Hasse vemos na Figura 1.1 non ten máximo nin mínimo, mais é contráctil. En efecto, consideremos as aplicacións  $f: X \rightarrow X$  con  $f(x_i) = x_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $f(x_4) = f(x_5) = x_3$  e  $g: X \rightarrow X$  con  $g(x_i) = x_3 \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Temos  $\text{id} \geq f \leq g = i \circ r$  con  $r: X \rightarrow \{x_3\}$  retracción.

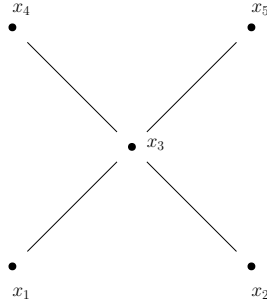


Figura 1.1

**Corolario 1.49.** Sexan  $f, g: X \rightarrow Y$  dúas aplicacións continuas entre espazos finitos. Verifícase  $f \simeq g \iff f^{op} \simeq g^{op}$ . En particular,  $f: X \rightarrow Y$  é unha equivalencia de homotopía se, e só se,  $f^{op}: X^{op} \rightarrow Y^{op}$  é unha equivalencia de homotopía e dous espazos finitos teñen o mesmo tipo de homotopía se, e só se, os seus correspondentes espazos duais teñen o mesmo tipo de homotopía.

*Demostración.* Temos que  $f \simeq g$  se, e só se, existe unha cerca  $f = f_0 \leq f_1 \geq \dots f_n = g$ . Isto equivale a que haxa unha cerca  $f^{op} = f_0^{op} \geq_{op} f_1^{op} \leq_{op} \dots f_n^{op} = g^{op}$ , é dicir, a que  $f^{op} \simeq g^{op}$ .  $\square$

## 1.7. Propiedades de separación

**Definición 1.50.** Un espazo topolóxico  $X$  dise:

- que é  $T_0$  (ou un espazo *de Kolmogorov*) se para calquera dous puntos distintos de  $X$  existe unha veciñanza dun deles que non contén ó outro.
- que é  $T_1$  (ou un espazo *de Fréchet*) se cada punto de  $X$  é un pechado.
- que é  $T_2$  (ou un espazo *Hausdorff*) se para calquera dous puntos distintos de  $X$  existen veciñanzas dos mesmos que son disxuntas entre elas.

Verifícase que  $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ . Ademais, se un espazo finito  $(X, \tau)$  é  $T_1$ , a súa topoloxía é a discreta ( $\tau = \mathcal{P}(X)$ ): en efecto, calquera subconxunto de  $X$  será unión finita de pechados (os puntos contidos en dito subconxunto), logo será pechado e en consecuencia calquera subconxunto de  $X$  será complementario dun pechado e por tanto un aberto. Isto indícanos que calquera espazo finito de Fréchet (ou Hausdorff) vai ser un espazo discreto, e polo tanto pouco interesante. Así, ímonos centrar na propiedade  $T_0$ .

O conxunto preordenado dos Exemplos 1.18 e 1.23 non é un poset, pois non verifica a propiedade antisimétrica: temos  $e \leq d$ ,  $d \leq e$  pero  $d \neq e$ . Así mesmo, o espazo topolóxico considerado non é de Kolmogorov, pois  $d$  e  $e$  son dous puntos distintos e toda veciñanza de calquera deles contén ó outro.

**Proposición 1.51.** *Un espazo topolóxico finito  $X$  é  $T_0$  se, e só se, a preorde asociada ó mesmo é antisimétrica (e polo tanto  $X$  sería un conxunto parcialmente ordenado finito).*

*Demostración.* " $\Rightarrow$ " Sexan  $x, y \in X$  tales que  $x \leq y$ ,  $y \leq x$  e supoñamos que son distintos. Logo existe unha veciñanza dun (poñamos  $x$ ) que non contén ó outro ( $y$ ). Desta maneira,  $y \notin U_x$  (pois  $U_x$  é a intersección das veciñanzas de  $x$ ), o cal contradí que  $y \leq x$ . Así,  $x = y$  e o noso conxunto verifica a propiedade antisimétrica e é polo tanto un conxunto parcialmente ordenado.

" $\Leftarrow$ " Sexan  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Se  $x \not\leq y$ , logo  $x \notin U_y$  e atopamos unha veciñanza de  $y$  que non contén a  $x$ . Se  $x \leq y$ ,  $y \not\leq x$  (se non,  $x = y$  por antisimetría e chegaríamos a unha contradición), logo  $y \notin U_x$  e atopamos unha veciñanza de  $x$  que non contén a  $y$ . En calquera caso, vemos que  $X$  é un espazo topolóxico  $T_0$ .  $\square$

**Proposición 1.52.** *Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico finito. Verifícase que é homotópicamente equivalente a un espazo  $T_0$ .*

*Demostración.* Definimos a seguinte relación de equivalencia en  $X$  (está claro que se trata dunha relación reflexiva, simétrica e transitiva):

$$x \sim y : \iff U_x = U_y \iff (x \leq y) \wedge (y \leq x).$$

Sexa  $X_0 = X / \sim$  o conxunto cociente por dita relación e  $\pi: x \in X \mapsto [x] \in X_0$  a proxección canónica (é dicir, dotamos a  $X_0$  da topoloxía cociente). Sexa tamén  $i: X_0 \rightarrow X$  unha aplicación de conxuntos tal que  $\pi \circ i = \text{id}_{X_0}$  (basta que leve cada clase de equivalencia a un dos seus representantes).

$\pi$  é continua porque consideramos a topoloxía cociente. Ademais, será unha identificación, co cal para ver que  $i$  é continua, basta probar que  $i \circ \pi$  é continua, e isto verifícase porque é claro que preserva a orde. En efecto, supoñamos  $x \leq y$ : temos  $i([x]) \in [x]$ , co cal en particular  $i([x]) \leq x$ ; e da mesma maneira  $i([y]) \in [y]$  implica  $i([y]) \geq y$ . Consecuentemente,  $i([x]) \leq x \leq y \leq i([y])$  e entón  $i([x]) \leq i([y])$ . Así, temos dúas aplicacións continuas  $\pi$  e  $i$  tales que  $\pi \circ i = \text{id}_{X_0}$  e  $i \circ \pi \simeq \text{id}_X$ , verificándose isto último porque  $i \circ \pi \leq \text{id}_X$  e polo Corolario 1.47.

Ademais,  $X_0$  é un espazo  $T_0$ , é dicir, a relación de preorde asociada verifica a propiedade antisimétrica. En efecto, supoñamos que  $[x], [y] \in X_0$  son tales que  $[x] \leq [y]$  e  $[y] \leq [x]$ . Entón, por un lado temos que  $x \leq i([x]) \leq i([y]) \leq y$ , e por outro que  $y \leq i([y]) \leq i([x]) \leq x$  (pois acabamos de ver que  $i$  preserva a orde). É dicir,  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , ou o que é o mesmo,  $x \sim y$ , ou sexa,  $[x] = [y]$ .  $\square$

$X_0$  é o chamado *cociente de Kolmogorov* de  $X$ . Desta proposición deducimos que para invariantes homotópicas podemos falar tan só de posets finitos en lugar de conxuntos preordenados finitos en xeral. Adoitaremos relacionar  $X_0$  con  $i(X_0)$ , sendo  $i$  a aplicación utilizada na proba da proposición anterior, tal e como vemos no seguinte exemplo.

**Exemplo 1.53.** Recuperemos o conxunto preordenado dos Exemplos 1.18 e 1.23, que xa vimos que non verifica a propiedade antisimétrica.

$$X = \{a, b, c, d, e\},$$

$$a \leq b, c \leq b, d \leq e \leq b, e \leq d \leq b.$$

Para obter un espazo  $T_0$ , tan só temos que identificar os elementos  $d$  e  $e$ , resultando o poset co diagrama de Hasse da Figura 1.2. Aquí temos que  $b$  é un elemento maximal e máximo; que  $a, c, d$  son elementos minimais, pero non mínimos; que  $\{d\}$  é unha 0-cadea; que  $\{a, b\}$  é unha 1-cadea; que  $\{a, c, d\}$  é unha anticadea e que  $d$  precede a  $b$  (ou que  $b$  cobre a  $d$ ).

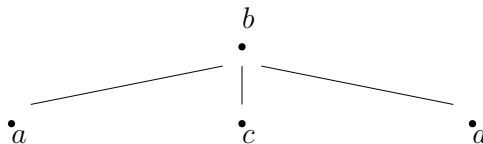


Figura 1.2

## Capítulo 2

# Versión simplicial da conxectura de Andrews-Curtis

### 2.1. Complexos simpliciais

Antes de nada, desenvolveremos a teoría sobre complexos simpliciais necesaria para este capítulo.

**Definición 2.1.** Un *complexo simplicial (abstracto)* é unha colección  $K$  de subconxuntos non baleiros e finitos dun conxunto  $V_K$  (conxunto de *vértices*) de tal xeito que:

- $K$  é pechado por subconxuntos:  $\alpha \in K, \emptyset \neq \beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \in K$ .
- Todos os subconxuntos unitarios de  $V_K$  están en  $K$ .

Os elementos de  $K$  son os chamados *símplices (abstractos)*. Un símplice dise  *$n$ -símplice* (ou símplice de dimensión  $n$ ) se ten  $n + 1$  elementos. A *dimensión* dun complexo simplicial  $K$ ,  $\dim(K)$ , será o supremo das dimensións do símplices que o forman. Se un complexo simplicial ten dimensión  $n$ , diremos que é un  *$n$ -complexo simplicial*.

Se  $K$  é finito, falaremos dun *complexo simplicial finito*.

Se  $\sigma, \tau \in K$  e  $\sigma \subseteq \tau$ , diremos que  $\sigma$  é unha *cara* de  $\tau$ . Se ademais  $\sigma \neq \tau$ , denominarémola *cara propia*. Se  $\sigma \subset \tau$  e  $\nexists \tilde{\sigma} \in K: \sigma \subset \tilde{\sigma} \subset \tau$ , diremos que é unha *cara inmediata*.

**Definición 2.2.** Sexan  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ , dicimos que son *afinmente independentes* se:

$$\sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i = 0, \sum_{i=0}^n t_i = 0 \Rightarrow t_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Isto equivale a que os vectores  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0 \in \mathbb{R}^m$  sexan linearmente independentes (en particular,  $n \leq m$ ).

Dado un conxunto  $\{v_0, \dots, v_n\}$  de  $n + 1$  puntos afinmente independentes, definimos o  $n$ -símplice xeométrico (ou símplice xeométrico de dimensión  $n$ ) xerado por eles coma a envoltura convexa dos mesmos:

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i : \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i = 0, \dots, n \right\}.$$

Para  $x = \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i \in [v_0, \dots, v_n]$  con  $\sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i = 0, \dots, n$  definimos o soporte de  $x$  como  $\text{sop}(x) = \{v_i : t_i \neq 0\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$ . As coordenadas baricéntricas de  $x$  serán  $(t_0, \dots, t_n)$ . O baricentro de  $[v_0, \dots, v_n]$  será o punto que ten todas as coordenadas baricéntricas iguais, é dicir,  $b([v_0, \dots, v_n]) = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ .

**Definición 2.3.** Sexa  $K$  un complexo simplicial abstracto. Para cada símplice  $\sigma \in K$ , tomamos un símplice xeométrico da mesma dimensión  $|\sigma| \subseteq \mathbb{R}^m$ . Definimos a realización xeométrica de  $K$  como o espazo topolóxico resultante de considerar a seguinte topoloxía sobre o conxunto  $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ :

$$A \subseteq |K| \text{ aberto} : \iff A \cap |\sigma| \text{ aberto } \forall \sigma \in K$$

$$(A \subseteq |K| \text{ pechado} : \iff A \cap |\sigma| \text{ pechado } \forall \sigma \in K).$$

Se  $K$  é un complexo simplicial finito, basta identificar as caras comúns dos símplices e considerar a topoloxía euclidiana subespazo de  $\mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 2.4.** ■ Para  $V_{K_1} = \{a\}$  un conxunto unitario, o único complexo simplicial non baleiro  $K_1$  posible sería  $K_1 = \{\{a\}\}$ . Trátase dun 0-complexo simplicial ó que usualmente chamaremos vértice e denotaremos  $a$ , sen máis.

- A familia  $K_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$  de subconxuntos de  $V_{K_2} = \{1, 2, 3, 4\}$  sería un complexo simplicial abstracto de dimensión 1.

Podemos ver as realizacións xeométricas de  $K_1$  e  $K_2$  na Figura 2.1.

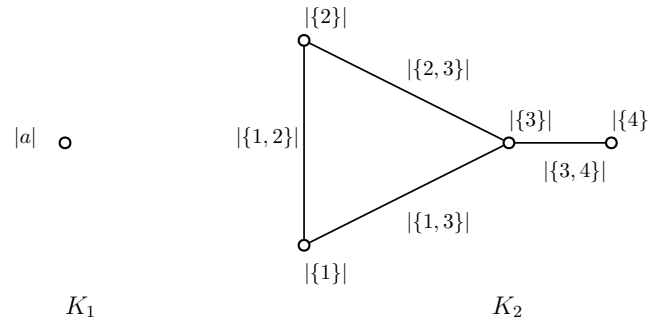


Figura 2.1

**Observación 2.5.** De aquí en diante non nos imos preocupar polo conxunto de vértices dun complexo simplicial, daremos por feito que sempre é o adecuado (é dicir, o conxunto de elementos dos subconxuntos unitarios do complexo simplicial que estamos a considerar). Así mesmo, permitiremonos o abuso de notación de nomear  $|\sigma|$  como  $\sigma$  sen máis, para todo símlice  $\sigma$  dun complexo simplicial.

## 2.2. Operacións con complexos simpliciais

**Definición 2.6.** Dado un complexo simplicial  $K$  e un subconxunto  $L \subseteq K$ , dicimos que  $L$  é un *subcomplexo* de  $K$  se segue a ser un complexo simplicial en si mesmo.

**Proposición 2.7.** Sexa  $K$  un complexo simplicial e  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$  unha familia de subcomplexos do mesmo. Entón  $\cup_{\alpha \in A} L_\alpha$  e  $\cap_{\alpha \in A} L_\alpha$  tamén son subcomplexos de  $K$ .

**Observación 2.8.**  $\dim(K \cup L) = \max\{\dim(K), \dim(L)\}$ .

**Definición 2.9.** Sexa  $K$  un complexo simplicial e  $\sigma \in K$  un símlice. Definimos os seguintes subcomplexos de  $K$ :

- *Fronteira* de  $\sigma$ :  $\dot{\sigma} := \{\tau \in K : \tau \subset \sigma\}$
- *Complementario* de  $\sigma$ :  $\sigma^c := \{\tau \in K : \sigma \not\subseteq \tau\}$
- *Estrela (pechada)* de  $\sigma$ :  $\text{st}(\sigma) := \{\tau \in K : \tau \cup \sigma \in K\}$
- *Enlace (link)* de  $\sigma$ :  $\text{lk}(\sigma) := \{\tau \in \text{st}(\sigma) : \sigma \cap \tau = \emptyset\}$

Tamén podemos definir a *estrela aberta* de  $\sigma$  como  $\text{st}(\sigma) \setminus \text{lk}(\sigma)$ . Isto xa non sería un subcomplexo de  $K$ .

**Observación 2.10.** Se  $\sigma$  é un vértice, podemos interpretar a súa estrela como unha bóla pechada centrada nel, o seu enlace como a fronteira da mesma e a súa estrela aberta como unha bóla aberta centrada nel, todo isto na realización xeométrica do complexo simplicial.

**Exemplo 2.11.** Para o complexo  $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$  e os símlices  $\sigma = \{v_0, v_1\} \in K, \tau = \{v_0, v_1, v_2\} \in K$  temos (ver Figura 2.2):

- $\dot{\sigma} = \{\{v_0\}, \{v_1\}\}$
- $\sigma^c = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$
- $\text{st}(\sigma) = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\} = K$
- $\text{lk}(\sigma) = \{\{v_2\}\}$

- $\dot{\tau} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}\}$
- $\tau^c = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}\}$
- $\text{st}(\tau) = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\} = K$
- $\text{lk}(\tau) = \emptyset$

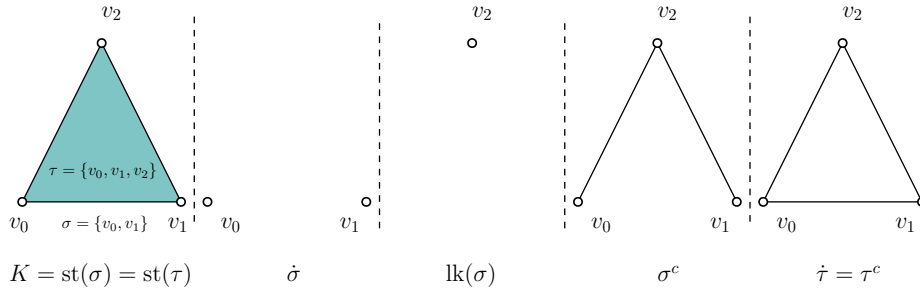


Figura 2.2

**Exemplo 2.12.** Consideremos o seguinte complexo simplicial  $K$ :

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}.$$

Para  $\{v_4\} \in K$  temos (ver Figura 2.3):

$$\begin{aligned} \text{st}(v_4) &= \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \\ &\quad \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}, \\ \text{lk}(v_4) &= \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}. \end{aligned}$$

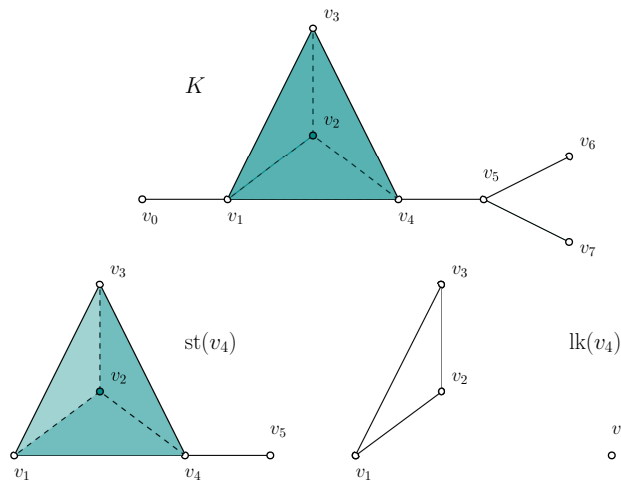


Figura 2.3

**Definición 2.13.** Sexan  $K$  e  $L$  complexos simpliciais. Definimos o *join* de  $K$  e  $L$  coma o seguinte complexo:

$$K * L = KL := K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$$

Se  $K$  é tan só un vértice, estaremos a falar dun *cono* sobre  $L$ .

Se un complexo simplicial  $K$  é igual a un cono sobre un subcomplexo do mesmo, diremos que  $K$  é un *cono simplicial*.

A fórmula xeral para a dimensión dun join é  $\dim(KL) = \dim(K) + \dim(L) + 1$ . En particular,  $\dim(aK) = \dim(K) + 1$  para conos simpliciais.

**Exemplo 2.14.** Sexa  $L = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}\}$ . O cono sobre  $L$  será (ver Figura 2.4):

$$aL = \{\{a\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \{a, v_2\}, \{a, v_0, v_1\}, \{a, v_1, v_2\}, \{a, v_0, v_2\}\}.$$

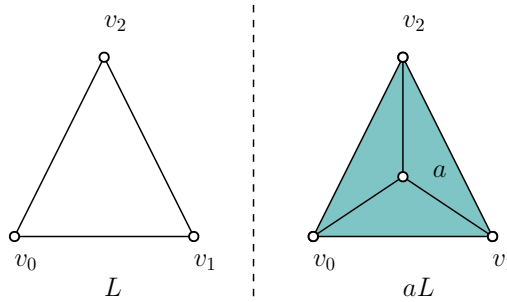


Figura 2.4

## 2.3. Complexos de orde e posets de caras

Descubriremos a continuación que os posets finitos e complexos simpliciais finitos están estreitamente relacionados, tal e como indicou Pavel S. Alexandroff ([1]).

**Definición 2.15.** Dado  $K$  un complexo simplicial finito, definimos o seu *poset de caras*  $\mathcal{X}(K)$  como o poset cuxos elementos son todos os símlices de  $K$  coa relación de orde definida pola inclusión entre os mesmos:  $\alpha \leq \beta : \iff \alpha \subseteq \beta$ . A altura de  $\mathcal{X}(K)$  será igual á dimensión de  $K$ .

**Exemplo 2.16.** Ó complexo  $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$  podémoslle asociar o poset  $\mathcal{X}(K) = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$

coas seguintes cadeas maximais (ver Figura 2.5):

$$\begin{aligned} \{v_0\} &\leq \{v_0, v_1\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}, & \{v_1\} &\leq \{v_1, v_2\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}, \\ \{v_0\} &\leq \{v_0, v_2\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}, & \{v_2\} &\leq \{v_0, v_2\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}, \\ \{v_1\} &\leq \{v_0, v_1\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}, & \{v_2\} &\leq \{v_1, v_2\} \leq \{v_0, v_1, v_2\}. \end{aligned}$$

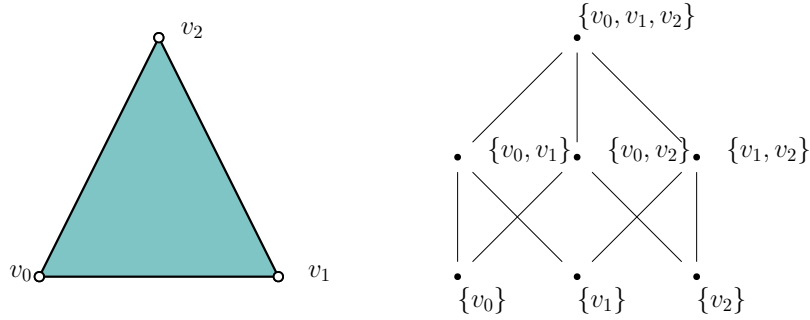


Figura 2.5

**Definición 2.17.** Dado  $X$  un poset finito, definimos o *complexo de orde* asociado a  $X$ ,  $\mathcal{K}(X)$ , como o complexo simplicial que ten como  $n$ -símplices as  $n$ -cadeas de  $X$ . Así,  $\alpha \subseteq \beta$  como símplices en  $\mathcal{K}(X)$ :  $\iff \alpha \subseteq \beta$  como cadeas en  $X$ . A dimensión de  $\mathcal{K}(X)$  será igual á altura de  $X$ .

**Exemplo 2.18.** Ó poset  $\mathcal{X}(K) = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$  visto antes podémoslle asociar o seguinte complexo simplicial (ver Figura 2.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = & \{ \{ \{v_0\} \}, \{ \{v_1\} \}, \{ \{v_2\} \}, \{ \{v_0, v_1\} \}, \{ \{v_1, v_2\} \}, \{ \{v_0, v_2\} \}, \{ \{v_0, v_1, v_2\} \} \}, \\ & \{ \{v_0\}, \{v_0, v_1\} \}, \{ \{v_0\}, \{v_0, v_2\} \}, \{ \{v_1\}, \{v_0, v_1\} \}, \{ \{v_1\}, \{v_1, v_2\} \}, \{ \{v_2\}, \{v_0, v_2\} \}, \\ & \{ \{v_2\}, \{v_1, v_2\} \}, \{ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \\ & \{ \{v_0\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_0\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \\ & \{ \{v_0\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_1\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \\ & \{ \{v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}, \{ \{v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \} \}. \end{aligned}$$

O conxunto de vértices deste complexo simplicial sería:

$$V_{\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))} = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\} \}.$$

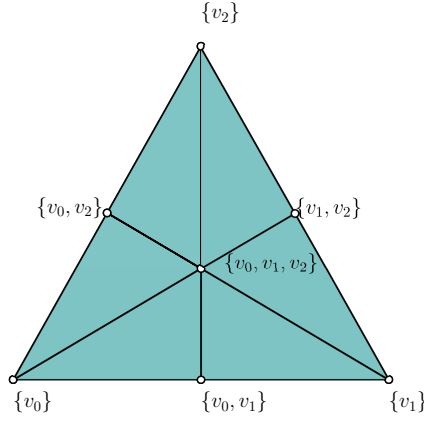


Figura 2.6

Nos Exemplos 2.16 e 2.18 vemos que  $\mathcal{K} \circ \mathcal{X} \neq \text{id}$ . Da mesma maneira,  $\mathcal{X} \circ \mathcal{K} \neq \text{id}$ : para os exemplos anteriores,  $\mathcal{X}(\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)))$  sería un poset con 22 elementos e polo tanto distinto de  $\mathcal{X}(K)$  (con 7 elementos). Así,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{X}$  non son inversas unha da outra, o cal motiva as seguintes definicións:

**Definición 2.19.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito. Definimos a súa *subdivisión baricéntrica* como  $K' := \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ . Trátase dun complexo simplicial cuxos vértices son os elementos de  $K$  e cuxos elementos son as cadeas do poset de caras de  $K$ .

**Definición 2.20.** Sexa  $X$  un poset finito. Definimos a súa *subdivisión baricéntrica* como  $X' := \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ . Trátase dun poset cuxos elementos son as cadeas de  $X$  coa relación de inclusión.

**Observación 2.21.** A dimensión da subdivisión baricéntrica dun complexo simplicial finito será igual á dimensión do complexo simplicial de partida. Analogamente, a altura dun poset será igual á altura da súa subdivisión baricéntrica.

**Observación 2.22.** Verifícase que  $|K| \cong |K'|$  polo homeomorfismo  $s_K: |K'| \rightarrow |K|$  que leva cada vértice da realización xeométrica de  $K'$  (é dicir, cada símplice de  $K$ ) no seu baricentro e que se estende linearmente para os restantes puntos de  $K'$  (ver [9], Theorem III.1.4):

$$s_K \left( \sum_{i=0}^n t_i \cdot \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot s_K(\sigma_i) = \sum_{i=0}^n t_i \cdot b(\sigma_i).$$

### 2.3.1. Subdivisión estelar

Ás veces, a realización de subdivisións baricéntricas complica moito o noso complexo simplicial, o cal motiva a busca dunha “subdivisión baricéntrica local”.

**Definición 2.23.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $\sigma \in K$  un símplice. A *subdivisión estelar* de  $K$  en  $\sigma$  é o seguinte complexo simplicial:

$$\text{st}(K, \sigma) = a\dot{\sigma}\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c.$$

**Proposición 2.24.**  $\dim(\text{st}(K, \sigma)) \leq \dim(K)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\text{st}(K, \sigma) = a\dot{\sigma}\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c$ .

En primeiro lugar,  $\sigma^c$  é un subcomplexo de  $K$ , logo  $\dim(\sigma^c) \leq \dim(K)$ .

Agora ben, fixémonos en que

$$a\dot{\sigma} * \text{lk}(\sigma) = a\dot{\sigma} \cup \text{lk}(\sigma) \cup \{\tau_1 \cup \tau_2 : \tau_1 \in a\dot{\sigma}, \tau_2 \in \text{lk}(\sigma)\}.$$

- Como  $\dim(\dot{\sigma}) = \dim(\sigma) - 1$ ,  $\dim(a\dot{\sigma}) = \dim(\sigma) - 1 + 1 = \dim(\sigma) \leq \dim(K)$
- $\text{lk}(\sigma)$  é un subcomplexo de  $K$ , logo  $\dim(\text{lk}(\sigma)) \leq \dim K$ .
- Supoñamos que existe  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  con  $\tau_1 \in a\dot{\sigma}, \tau_2 \in \text{lk}(\sigma), \dim(\tau) > \dim(K)$ . Esta unión ten que ser disxunta porque  $a \notin \text{lk}(\sigma), \dot{\sigma} \cap \text{lk}(\sigma) = \emptyset$ . Ademais, xa vimos que  $\dim(\tau_1) \leq \dim(\sigma)$ , co cal  $\dim(\tau_2) > \dim(K) - \dim(\sigma) - 1$ . Pero isto último implicaría que  $\exists \sigma \cup \tau_2 \in K$ :  $\dim(\sigma \cup \tau_2) > \dim(\sigma) + \dim(K) - \dim(\sigma) - 1 + 1 = \dim(K)$ , o cal contradí a definición de dimensión. Así,  $\dim(\tau) \leq \dim(K) \forall \tau \in a\dot{\sigma}\text{lk}(\sigma)$ .

Podemos entón concluir  $\dim(\text{st}(K, \sigma)) = \max\{\dim(a\dot{\sigma}\text{lk}(\sigma)), \dim(\sigma^c)\} \leq \dim(K)$ . □

**Exemplo 2.25.** Para o complexo  $K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$  e o símplice  $\tau = \{v_0, v_1, v_2\}$  temos:

$$\begin{aligned} \text{st}(K, \tau) &= a\dot{\tau}\text{lk}(\tau) \cup \tau^c \stackrel{2,11}{=} a\{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}\} \cup \emptyset \\ &\stackrel{2,14}{=} \{\{a\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \{a, v_2\}, \\ &\quad \{a, v_0, v_1\}, \{a, v_1, v_2\}, \{a, v_0, v_2\}\}. \end{aligned}$$

Agora para  $\sigma = \{v_0, v_1\} \in \text{st}(K, \tau)$  temos (similar ó Exemplo 2.11):

- $\dot{\sigma} = \{\{v_0\}, \{v_1\}\}$
- $\text{st}(\sigma) = \{\{a\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \{v_0, v_1\}, \{a, v_0, v_1\}\}$
- $\text{lk}(\sigma) = \{\{a\}\}$
- $\sigma^c = \{\{a\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \{a, v_2\}, \{a, v_1, v_2\}, \{a, v_0, v_2\}\}$

Desta maneira:

$$\begin{aligned}
 \text{st}(\text{st}(K, \tau), \sigma) &= \text{b}\sigma\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c \\
 &= \{\{b\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{b, v_0\}, \{b, v_1\}\} \cup \sigma^c \\
 &= \{\{a\}, \{b\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{b, v_0\}, \{b, v_1\}, \{a, b\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \{a, b, v_0\}, \\
 &\quad \{a, b, v_1\}\} \cup \sigma^c \\
 &= \{\{a\}, \{b\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{b, v_0\}, \{b, v_1\}, \{a, b\}, \{a, v_0\}, \{a, v_1\}, \\
 &\quad \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{a, v_2\}, \{a, b, v_0\}, \{a, b, v_1\}, \{a, v_1, v_2\}, \{a, v_0, v_2\}\}.
 \end{aligned}$$

Vemos que a subdivisión estelar de  $\sigma$  en  $\text{st}(K, \tau)$  só afecta a  $\text{st}(\sigma)$ .

Da mesma maneira podemos realizar as subdivisións estelares  $\text{st}(\text{st}(\text{st}(K, \tau), \sigma), \{v_1, v_2\})$  e  $\text{st}(\text{st}(\text{st}(\text{st}(K, \tau), \sigma), \{v_1, v_2\}), \{v_0, v_2\})$ , obtendo así o complexo simplicial cuxa realización xeométrica podemos ver na Figura 2.7.

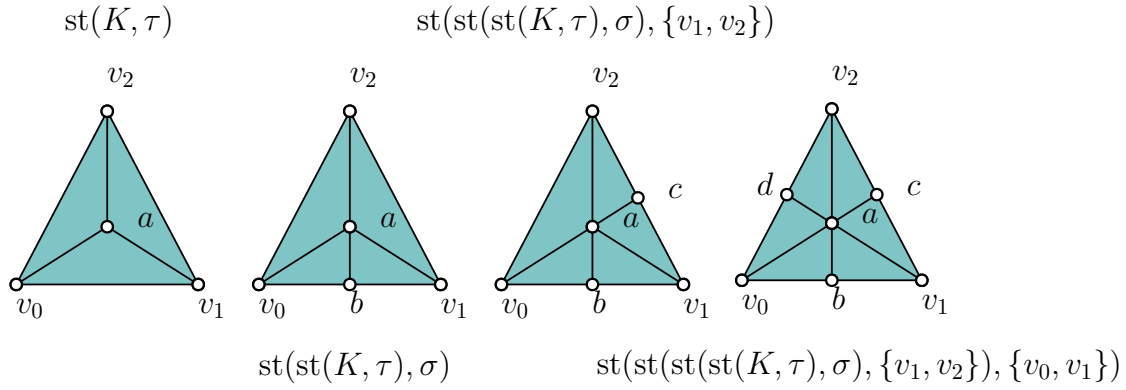


Figura 2.7

Vemos que obtivemos a subdivisión baricéntrica de  $K$  tan só realizando subdivisións estelares con respecto ós símplexes “máis grandes” de  $K$ .

O procedemento utilizado no exemplo anterior pódese xeralizar para todos os complexos simpliciais finitos para obter a subdivisión baricéntrica a partir de subdivisións estelares sucesivas.

**Proposición 2.26.** *Sexa  $K$  un complexo simplicial finito. Entón  $K'$  pode obterse realizando un número finito de subdivisións estelares sucesivas.*

*Demostración.* Ver [13], Proposition 2.23. □

**Observación 2.27.** A anterior proposición implica que o que probemos para subdivisións estelares verificase tamén para a subdivisión baricéntrica dun complexo simplicial finito.

## 2.4. Colapsos e tipo de homotopía simple

Introduciremos agora a noción de colapso elemental para complexos simpliciais finitos, a cal foi desenvolvida principalmente por J. H. C. Whitehead en [22].

**Definición 2.28.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito. Un símplice  $\sigma \in K$  dise que é *cara libre* de  $\tau \in K$  se  $\sigma$  é cara propia de  $\tau$  e non é cara propia de ningún outro símplice de  $K$ .

**Observación 2.29.** Nótese que as caras libres son caras inmediatas de símplices maximais. Ademais, as caras libres dun complexo simplicial  $K$  serán elementos do seu poset asociado  $\mathcal{X}(K)$  que preceden a un único elemento. Porén, o recíproco non se cumpre: se un elemento de  $\mathcal{X}(K)$  precede a un único elemento que non é maximal, non será cara libre no complexo simplicial de partida, pois será cara propia de máis dun único símplice.

**Observación 2.30.** Que un símplice  $\sigma$  dun complexo simplicial finito  $K$  sexa cara libre de  $\tau$  equivale a que exista un vértice  $a \in V_K$ ,  $a \notin \sigma$  verificando  $K = (K \setminus \{\sigma, \tau\}) \cup a\sigma$  e  $(K \setminus \{\sigma, \tau\}) \cap a\sigma = a\dot{\sigma}$  (ver Figura 2.8).

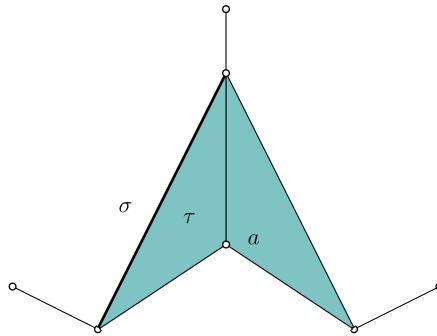


Figura 2.8

**Proposición 2.31.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $\sigma \in K$  unha cara libre de  $\tau \in K$ . Entón  $|K \setminus \{\sigma, \tau\}| \simeq |K|$ . É máis, trátase dun retracto por deformación forte.

*Demostración.* Ver [3], páxina 25. □

**Definición 2.32.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $\sigma \in K$  unha cara libre de  $\tau \in K$ . Denominamos *colapso elemental* ó paso de  $K$  a  $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ , e denotámolo  $K \searrow^e K \setminus \{\sigma, \tau\}$ . Da mesma maneira, chamamos *expansión elemental* ó paso de  $K \setminus \{\sigma, \tau\}$  a  $K$ , e indicámolo  $K \setminus \{\sigma, \tau\} \nearrow^e K$ .

**Definición 2.33.** Sexan  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos. Dicimos que  $K$  *colapsa* a  $L$ , e escribimos  $K \searrow L$ , se existe unha sucesión de colapsos elementais

$$K = K_0 \searrow^e K_1 \searrow^e \dots \searrow^e K_n = L.$$

Analogamente, dicimos que  $L$  *expándese* a  $K$ , e escribimos  $L \nearrow K$ , se existe unha sucesión de expansións elementais

$$L = L_0 \nearrow^e L_1 \nearrow^e \dots \nearrow^e L_n = K.$$

**Definición 2.34.** Sexa  $K$  un complexo simplicial. Dicimos que  $K$  é *colapsable* se colapsa a un punto. Denotarémolo por  $K \searrow *$ .

**Definición 2.35.** Sexan  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos. Dicimos que  $K$  e  $L$  teñen o mesmo *tipo de homotopía simple* se existe unha sucesión  $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$  de tal xeito que  $K_i \searrow^e K_{i+1}$  ou  $K_i \nearrow^e K_{i+1}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Denotámolo  $K \frown L$ .

**Definición 2.36.** Sexan  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos. Dicimos que  $K$  *n-defórmase* a  $L$  se  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple e ademais as expansións e os colapsos levados a cabo só involucran complexos de dimensión menor ou igual ca  $n$ .

Vexamos agora unha serie de resultados referentes a colapsos e tipo de homotopía simple:

**Proposición 2.37.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $a \notin K$  un vértice, temos que  $aK$  é colapsable. É dicir, os conos simpliciais son colapsables.

*Demostración.* Sexa  $\sigma \in K \subseteq aK$  un símlice maximal de  $K$ , temos que é unha cara libre de  $\{a\} \cup \sigma$  en  $aK$ , co cal  $aK \searrow^e aK \setminus \{\sigma, \{a\} \cup \sigma\} = a(K \setminus \{\sigma\})$ . Podemos repetir esta operación cun símlice maximal de  $K \setminus \{\sigma\}$ , e así sucesivamente ata colapsar  $aK$  a a nun número finito de colapsos elementais por estaremos falando de complexos simpliciais finitos.  $\square$

**Corolario 2.38.** Os símlices son colapsables.

*Demostración.* Por símlice entendemos un complexo simplicial finito  $K$  da seguinte forma:  $K = \{\sigma\} \cup \{\tau: \tau \subset \sigma\}$ . Entón, calquera das caras inmediatas de  $\sigma \in K$  é unha cara libre, co cal podemos tomar  $\tau$  unha delas e colapsar elementalmente  $K \searrow^e K \setminus \{\sigma, \tau\} = a\tau$ , sendo este último colapsable a un punto pola proposición que acabamos de ver, co cal  $K$  tamén será colapsable.  $\square$

**Observación 2.39.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $\sigma \in K$ . Ás veces referirémonos a  $\sigma$  non como símlice de  $K$ , senón como subcomplexo da forma que acabamos de ver.

**Proposición 2.40.** *Sexan  $K, L, M$  complexos simpliciais finitos,  $a \notin K$  un vértice e  $K_1, K_2$  subcomplexos de  $K$ . Verifícase:*

1.  $K$  colapsable  $\iff aK \searrow K$ .
2.  $K \searrow L \implies KM \searrow LM$ .
3.  $K_1 \cup K_2 \searrow K_1 \iff K_2 \searrow K_1 \cap K_2$ .

*Demostración.* Incluiremos aquí a demostración do primeiro apartado, seguindo as outras un razoamento parecido.

$K$  é colapsable se, e só se, existe unha sucesión de colapsos elementais

$$K = K_0 \xrightarrow{e} K_1 \xrightarrow{e} \dots \xrightarrow{e} K_n = *.$$

De maneira equivalente,  $K$  é colapsable se, e só se, existe unha sucesión de símplices  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in K$  tales que  $\sigma_1$  é cara libre de  $\tau_1 \in K_0 = K$ ,  $\sigma_i$  é cara libre de

$$\tau_i \in K_{i-1} = K \setminus \{\sigma_1, \tau_1, \dots, \sigma_{i-1}, \tau_{i-1}\}$$

para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  e  $K_n = K \setminus \{\sigma_1, \tau_1, \dots, \sigma_n, \tau_n\} = *$ .

Isto equivale a que exista unha sucesión de símplices  $\{a\} \cup \sigma_1, \dots, \{a\} \cup \sigma_n \in aK$  tales que  $\{a\} \cup \sigma_1$  é cara libre de  $\{a\} \cup \tau_1 \in aK_0 = aK$ ,  $\{a\} \cup \sigma_i$  é cara libre de

$$\{a\} \cup \tau_i \in aK_{i-1} = aK \setminus \{\{a\} \cup \sigma_1, \{a\} \cup \tau_1, \dots, \{a\} \cup \sigma_{i-1}, \{a\} \cup \tau_{i-1}\}$$

para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  e

$$aK_n = aK \setminus \{\{a\} \cup \sigma_1, \{a\} \cup \tau_1, \dots, \{a\} \cup \sigma_n, \{a\} \cup \tau_n\} = K \cup \{\{a\}, \{a, *\}\} \xrightarrow{e} K,$$

é dicir, equivale a que  $aK \searrow K$ . □

**Corolario 2.41.** *Sexa  $K$  un complexo simplicial finito e  $v \in V_K$  un vértice do mesmo. Entón  $\text{lk}(v)$  colapsable  $\iff K \searrow v^c$ .*

*Demostración.*

$$\text{lk}(v) \searrow * \iff \text{st}(v) = v\text{lk}(v) \searrow \text{lk}(v) = \text{st}(v) \cap v^c \iff K = \text{st}(v) \cup v^c \searrow v^c. \quad \square$$

**Proposición 2.42.** *Sexa  $K$  un complexo simplicial finito de dimensión  $n$ , entón  $K$   $(n+1)$ -defórmase en  $K'$ .*

*Demostración.* Pola Proposición 2.26, basta ver que para  $\sigma \in K$ ,  $K$   $(n+1)$ -defórmase en  $\text{st}(K, \sigma) = a\hat{\sigma}\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c$ , posto que  $\dim(K) \geq \dim(\text{st}(K, \sigma))$  (Proposición 2.24).

En primeiro lugar, é doado ver que  $\sigma$  é unha cara libre de  $\{a\} \cup \sigma \in a\sigma$ , co cal hai un colapso elemental  $a\sigma \searrow a\sigma \setminus \{\sigma, \{a\} \cup \sigma\} = a\hat{\sigma}$ , ou o que é o mesmo, hai unha expansión elemental  $a\hat{\sigma} \nearrow a\sigma$ , sendo este último colapsable a  $\sigma$  pola Proposición 2.40, sabendo que os símlices son colapsables a un punto polo Corolario 2.38. Temos entón  $a\hat{\sigma} \nearrow a\sigma \searrow \sigma$ , o cal, pola Proposición 2.40, se traduce en  $a\hat{\sigma}\text{lk}(\sigma) \nearrow a\sigma\text{lk}(\sigma) \searrow \sigma\text{lk}(\sigma) = \text{st}(\sigma)$ . Isto implica  $\text{st}(K, \sigma) = a\hat{\sigma}\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c \nearrow a\sigma\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c \searrow \sigma\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c = K$ , co cal  $K$  e  $K'$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple. Como ademais  $\dim(a\sigma\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c) = \dim(a\hat{\sigma}\text{lk}(\sigma) \cup \sigma^c) + 1 \leq n+1$ , queda claro que estamos a falar de  $(n+1)$ -deformacións.  $\square$

Xa vimos que os colapsos elementais en complexos simpliciais finitos son retraccións de deformación forte nas súas realizacións xeométricas. Así, se dous complexos simpliciais finitos  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple,  $|K|$  e  $|L|$  terán o mesmo tipo de homotopía. Tamén vimos no caso de  $K$  e  $K'$  que as súas realizacións xeométricas son homeomorfas (en particular, teñen o mesmo tipo de homotopía) e eles teñen o mesmo tipo de homotopía simple. Ademais, se as realizacións xeométricas de dous complexos simpliciais de dimensión 1 teñen o mesmo tipo de homotopía, ditos complexos tamén terán o mesmo tipo de homotopía simple. Porén, como veremos na seguinte sección, isto non é certo para todas as dimensións.

**Proposición 2.43.** *Sexa  $K$  un 1-complejo simplicial finito. Verifícase:*

$$K \text{ colapsable} \iff |K| \text{ contráctil.}$$

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Visto.

“ $\Leftarrow$ ” Se  $K$  é un complexo simplicial finito de dimensión 1,  $K$  tan só terá 0-símlices (vértices) e 1-símlices (arestas). Unha cara libre de  $K$  será un vértice que forma parte dunha única aresta. Vexamos que se  $|K|$  é contráctil, entón  $K$  ten unha cara libre. En efecto, supoñamos que  $K$  non ten ningunha cara libre, logo cada vértice de  $K$  forma parte de polo menos dúas arestas. Consecuentemente, podemos construír un lazo en  $|K|$  que non se pode deformar continuamente nun punto, o cal é unha contradición con que  $|K|$  é contráctil. Así,  $K$  ten unha cara libre que podemos colapsar, sendo o espazo resultante tamén contráctil, pois os colapsos son equivalencias de homotopía. Podemos entón repetir o proceso, e ó estaremos falando de complexos simpliciais finitos, acabaremos colapsando o noso complexo a un punto.  $\square$

## 2.5. O sombreiro bobo

Comezamos esta sección cun exemplo dun complexo simplicial finito non colapsable.

**Exemplo 2.44.** Consideremos o seguinte complexo simplicial finito (ver Figura 2.9):

$$V_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \\ \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \\ \{4, 8\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \\ \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 7, 8\}, \{3, 4, 8\}, \{3, 5, 6\}, \\ \{4, 5, 6\}, \{4, 6, 8\}, \{6, 7, 8\}\}.$$

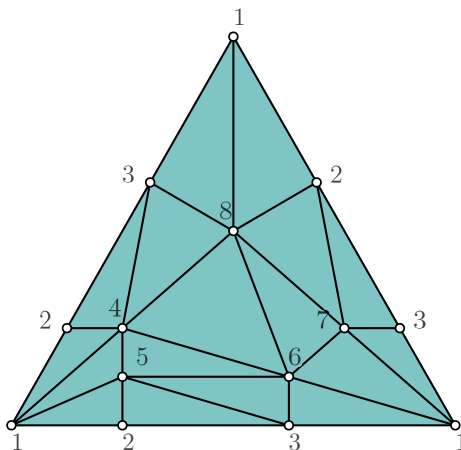


Figura 2.9

Non é difícil comprobar que  $K$  non ten ningunha cara libre: todos os 1-símplices (conxuntos con dous elementos) do mesmo forman parte de polo menos dous 2-símplices (conxuntos con tres elementos). Así,  $K$  non é colapsable.

Estudaremos agora a realización xeométrica (ou mellor dito, un espazo topolóxico homeomorfo á mesma) do complexo simplicial finito anterior para ver que é contráctil.

**Definición 2.45.** O *sombreiro bobo* (*the dunce hat*) é o espazo topolóxico cociente obtido ó identificar os lados dun triángulo de forma non coherente, tal e como mostra a Figura 2.10.

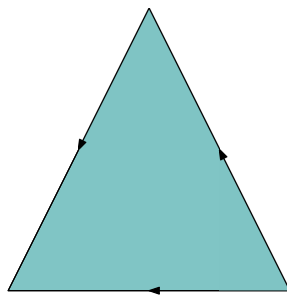


Figura 2.10

**Observación 2.46.** Podemos pensar no sombreiro bobo como nun triángulo de tea no que pegamos dúas arestas formando un cono e logo pegamos a base do cono a unha xeratriz do mesmo, tal e como vemos na Figura 2.11. Esta última foi extraída dun artigo de Christopher Zeeman ([24]), matemático británico que estudou moitas das propiedades deste espazo.



Figura 2.11

Vexamos uns conceptos topolóxicos que nos serán de axuda á hora de deducir características do sombreiro bobo (para máis información, consultar [5]).

**Definición 2.47.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos topolóxicos,  $A \subseteq X$  pechado e  $f: A \rightarrow Y$  unha aplicación continua. Denotamos por  $Y \cup_f X$  ó espazo cociente  $(X \sqcup Y) / \sim$  con  $\sim$  a relación de equivalencia definida por  $x \sim f(x)$ . É o chamado *espazo de adxunción de  $X$  a  $Y$  por  $f$* .

**Observación 2.48.** Pola definición de  $\sim$ , dous puntos  $x, y \in X \sqcup Y$  están relacionados se:

- $x = y$ .
- $x, y \in A \subseteq X$  e  $f(x) = f(y)$ .
- $x \in A \subseteq X$  e  $f(x) = y$  (ou viceversa).

Aproveitamos aquí para introducir o concepto de CW-complexo, posto que está estreitamente relacionado cos espazos de adxunción e en particular as realizacións xeométricas dos complexos simpliciais son CW-complexos.

**Definición 2.49.** Un espazo topolóxico  $X$  é un *CW-complexo* se existe unha sucesión de espazos topolóxicos  $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$  tales que  $X_0$  é un espazo discreto e  $X_n$  obtense a partir de  $X_{n-1}$  pola adxunción de *n-celas* ( $\mathbb{D}^n$ ) ó mesmo.

**Definición 2.50.** Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación continua, denotamos o *cilindro de f* (*mapping cylinder*) a  $M_f = Y \cup_{f_0} (X \times [0, 1])$  con  $f_0: X \times \{0\} \rightarrow Y$  tal que  $f_0(x, 0) = f(x)$ .

**Definición 2.51.** Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación continua, denotamos o *cono de f* (*mapping cone*) a  $C_f = M_f / \sim$ , con  $\sim$  a seguinte relación de equivalencia:

$$x, y \in M_f, x \neq y, x \sim y: \iff x, y \in X \times \{1\}.$$

**Exemplo 2.52.** Podemos ver o sombreiro bobo coma o cono  $C_f$  da seguinte aplicación:

$$f: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$e^{2\pi is} \mapsto f(e^{2\pi is}) = \begin{cases} e^{2\pi i 3s}, & \text{se } s \in [0, \frac{2}{3}] \\ e^{2\pi i(2-3s)}, & \text{se } s \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

Observemos que  $f$  é continua por ser unha función exponencial (continua) en cada intervalo e por coincidir nos extremos dos mesmos. Vendo a Figura 2.12 podemos intuír como actúa esta aplicación.

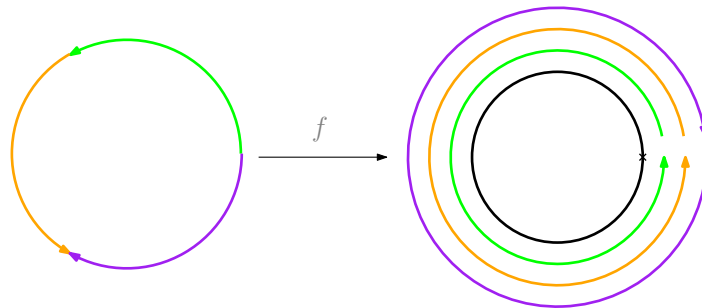


Figura 2.12

**Proposición 2.53.** Se  $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow Y$ , entón  $C_{f_0} \simeq C_{f_1}$  relativo a  $Y$  e ó vértice do cono.

*Demostración.* Ver [5], Theorem 14.18. □

**Teorema 2.54.** O sombreiro bobo é contráctil.

*Demostración.* Se vemos que a aplicación  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida antes é homótopa á identidade, utilizando a Proposición 2.53, probaríamos que o sombreiro bobo ten o mesmo tipo

de homotopía que  $C_{\text{id}}$ , que é un cono usual e polo tanto homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ . Como este último é contráctil, concluiríamos que o sombreiro bobo tamén o é. Así, basta considerar a seguinte homotopía:

$$H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$(e^{2\pi is}, t) \mapsto \begin{cases} e^{2\pi i(3s(1-t)+st)}, & s \in [0, \frac{2}{3}] \\ e^{2\pi i((2-3s)(1-t)+st)}, & s \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} .$$

Está claro que se trata dunha función continua por ser composición dunha función polinómica cunha exponencial en cada intervalo e coincidir nos extremos dos mesmos. Ademais,  $H(e^{2\pi is}, 0) = f(e^{2\pi is})$ ,  $H(e^{2\pi is}, 1) = \text{id}(e^{2\pi is}) \forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

## 2.6. Versión simplicial da conxectura

Acabamos de ver que o sombreiro bobo  $D$  é contráctil, pero é realización xeométrica dun complexo simplicial non colapsable. Non se trata do único espazo ó que lle ocorre isto, outro exemplo sería a *casa de dúas habitacións* de Bing ([11], páxina 4). Así, vemos que as retraccións non sempre se traducen en colapsos.

Porén, demostrouse que o sombreiro bobo pódese expandir a un complexo simplicial que ten a 3-esfera como realización xeométrica ([4]), sendo este último colapsable. Así, o sombreiro bobo non é colapsable, pero si 3-deformable a un punto. Os matemáticos estadounidenses James J. Andrews e Morton L. Curtis conxecturaron que isto ocorre para todo 2-complejo simplicial.

**Conxectura 2.55** (Andrews-Curtis, versión simplicial). *Dado un complexo simplicial finito 2-dimensional  $K$  tal que a súa realización xeométrica  $|K|$  é contráctil, entón  $K$  é 3-deformable a un punto.*

A versión desta conxectura para dimensións superiores xa se probou ([20], Theorem 1).

**Teorema 2.56** (Whitehead-Wall). *Sexa  $n \geq 3$  un número natural. Dado un complexo simplicial finito  $n$ -dimensional  $K$  con realización xeométrica  $|K|$  contráctil, entón  $K$  é  $(n + 1)$ -deformable a un punto.*

En consecuencia, todo 2-complejo simplicial finito con realización xeométrica contráctil pódese 4-deformar a un punto, pero que se poida 3-deformar ou non segue a ser unha pregunta aberta.

Na mesma liña, Christopher Zeeman probou que  $D$  non é poliedricamente colapsable (no sentido que describe en [24]), pero que en cambio  $D \times [0, 1]$  si (ver Figura 2.13), e tamén conxecturou que isto pasa para todo 2-complejo simplicial.

**Conxectura 2.57** (Zeeman). *Dado un complexo simplicial finito 2-dimensional  $K$  tal que a súa realización xeométrica  $|K|$  é contráctil, entón  $|K| \times [0, 1]$  é poliedricamente colapsable.*

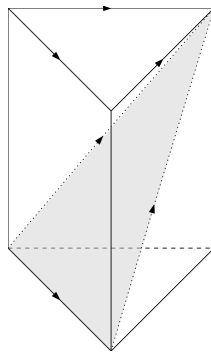


Figura 2.13

Posto que os colapsos poliédricos implican a existencia de colapsos simpliciais, a conxectura de Zeeman implica a conxectura de Andrews-Curtis. Ademais, a conxectura de Zeeman implica a famosa conxectura de Poincaré, agora teorema grazas a Grigori Perelman, matemático ruso que a demostrou entre o 2002 e o 2003. Este fito fixo a Perelman merecedor da Medalla Fields en 2006 e do primeiro Premio do Milenio do Instituto Clay, galardóns que declinou por non querer fama e considerar que outros moitos matemáticos foran responsables deste descubrimento.

**Teorema 2.58** (Poincaré). *Calquera variedade compacta de dimensión 3 simplemente conexa e sen fronteira é homeomorfa á 3-esfera.*

Por este teorema, sabemos que a conxectura de Andrews-Curtis é certa para un tipo especial de 2-complexos simpliciais: aqueles embebidos en variedades de dimensión 3 (os chamados *spines*). Porén, pénsase que en xeral non se verifica, existindo na actualidade numerosos contraexemplos potenciais.

Ademais, a coincidencia no tipo de homotopía das realizacións xeométricas non sempre implica a coincidencia no tipo de homotopía simple dos complexos simpliciais asociados, pois existe unha obstrución chamada *grupo de Whitehead* do complexo.

Para máis información sobre estas e outras conxecturas e a relación entre elas, pódese consultar [17].

## Capítulo 3

# Versión para posets da conxectura de Andrews-Curtis

Ata o momento, temos visto unha versión da conxectura de Andrews-Curtis para complexos simpliciais, así como unha relación entre os complexos simpliciais e os posets, sendo estes últimos os espazos topolóxicos que mellor sabemos manexar. Así, o obxectivo deste capítulo é presentar unha versión da conxectura de Andrews-Curtis para conxuntos parcialmente ordenados que será equivalente á vista para complexos simpliciais.

### 3.1. Núcleo dun espazo finito e Teorema de Clasificación

Imos comezar cun exemplo de aplicación dos resultados vistos no primeiro capítulo que motiva o desenvolvemento desta sección.

**Exemplo 3.1.** Consideremos o poset  $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  e o subespazo  $A = \{x_0, x_1, x_2\}$  de  $X$  da Figura 3.1.

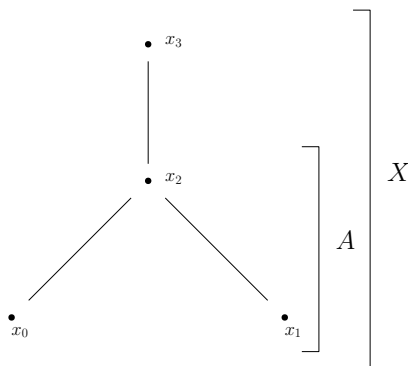


Figura 3.1

Xa sabemos que as aplicacións identidade  $\text{id}: X \rightarrow X$  e inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  son continuas, e consideramos  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r|_A = \text{id}|_A$  e  $r(x_3) = x_2$ .

$r$  é continua porque preserva a orde:

- $x_0 \leq x_2$  e  $r(x_0) = x_0 \leq x_2 = r(x_2)$ .
- $x_1 \leq x_2$  e  $r(x_1) = x_1 \leq x_2 = r(x_2)$ .
- $x_2 \leq x_3$  e  $r(x_2) = x_2 \leq x_2 = r(x_3)$ .

É claro que  $r \circ i = \text{id}|_A$  e ademais,  $i \circ r \simeq \text{id}$  porque  $(i \circ r)(x) \leq \text{id}(x) \forall x \in X$ :

- $(i \circ r)(x_i) = x_i \leq x_i = \text{id}(x_i)$  para  $i = 0, 1, 2$ .
- $(i \circ r)(x_3) = x_2 \leq x_3 = \text{id}(x_3)$ .

Vemos así que  $X$  e  $A$  teñen o mesmo tipo de homotopía. Observemos que o que fixemos foi tomar un elemento que cubría soamente a outro elemento e envialo a este último. Así, intuímos que poderíamos facer algo parecido cos puntos  $x_0$  e  $x_1$  e preguntámonos ata que punto podemos facer isto en xeral. Introducimos así nesta sección as ideas de Robert E. Stong ([19]).

**Definición 3.2.** Sexa  $X$  un poset finito.

- $x \in X$  é un *down-beat point* se  $\exists! w \in X: w \prec x$  ou, equivalentemente, se  $\widehat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$  ten un máximo. No diagrama de Hasse dun poset, un down-beat point só ten unha aresta debaixo del, só cobre a outro elemento.
- $x \in X$  é un *up-beat point* se  $\exists! y \in X: x \prec y$  ou, equivalentemente, se  $\widehat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$  ten un mínimo. No diagrama de Hasse dun poset, un up-beat point só ten unha arista enriba del, só precede a outro elemento.
- $x \in X$  é un *beat point* se é un down-beat point ou un up-beat point.

**Observación 3.3.** Se  $x \in X$  é un beat point, logo  $\mathcal{K}(\widehat{C}_x) = \mathcal{K}(\widehat{F}_x \cup \widehat{U}_x)$  é colapsable. En efecto, supoñamos que  $x$  é un down-beat point, logo  $\widehat{U}_x$  ten un máximo  $x'$  e así  $\widehat{C}_x = \widehat{U}_{x'} \cup x' \cup \widehat{F}_x$  verifica que  $\mathcal{K}(\widehat{C}_x) = \{x'\} * \mathcal{K}(\widehat{U}_{x'} \cup \widehat{F}_x)$  é un cono simplicial e polo tanto colapsable pola Proposición 2.37. Se  $x$  é un up-beat point, o procedemento é análogo. Como  $\mathcal{K}(\widehat{C}_x) = \text{lk}(\{x\})$ , isto equivale polo Corolario 2.41 a que  $\mathcal{K}(X) \searrow \{x\}^c$ .

**Proposición 3.4.** Sexa  $X$  un poset finito e  $x \in X$  un beat point. Entón  $X \setminus \{x\} \simeq X$ . De feito,  $X \setminus \{x\}$  é un retracto por deformación forte de  $X$ .

*Demostración.* Supoñamos que  $x$  é un down-beat point, é dicir,  $\exists! w \in X: w \prec x$ , e definimos  $r: X \rightarrow X \setminus \{x\}$  tal que  $r|_{X \setminus \{x\}} = \text{id}|_{X \setminus \{x\}}$  e  $r(x) = w$ .

(Se  $x$  é un up-beat point, é dicir, se  $\exists! y \in X: x \prec y$ , o procedemento é análogo: basta definir  $r: X \rightarrow X \setminus \{x\}$  tal que  $r|_{X \setminus \{x\}} = \text{id}|_{X \setminus \{x\}}$  e  $r(x) = y$ .)

Temos a inclusión  $i: X \setminus \{x\} \rightarrow X$  continua e  $r$  continua porque preserva a orde. É claro que  $r \circ i = \text{id}|_{X \setminus \{x\}}$  e ademais,  $i \circ r \simeq \text{id}$  porque  $(i \circ r)(x) \leq \text{id}(x) \forall x \in X$ . En efecto,  $(i \circ r)(y) = y \leq y = \text{id}(y) \forall y \in X \setminus \{x\}$  e  $(i \circ r)(x) = w \leq x = \text{id}(x)$ .

Vemos así que  $X$  e  $X \setminus \{x\}$  teñen o mesmo tipo de homotopía e como  $r|_{X \setminus \{x\}} = \text{id}|_{X \setminus \{x\}}$ , concluímos que  $X \setminus \{x\}$  é un retracto por deformación forte de  $X$ .  $\square$

**Definición 3.5.** Se  $x$  é un beat point dun espazo finito  $T_0$ , dicimos que hai un *colapso elemental forte* de  $X$  a  $X \setminus \{x\}$  e escribimos  $X \xrightarrow{e} \searrow X \setminus \{x\}$ . Tamén podemos dicir que hai unha *expansión elemental forte* de  $X \setminus \{x\}$  a  $X$  e escribir  $X \setminus \{x\} \nearrow^e X$ .

**Definición 3.6.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos finitos  $T_0$ , dicimos que hai un *colapso forte* de  $X$  a  $Y$  (ou unha *expansión forte* de  $Y$  a  $X$ ) se existe unha secuencia de colapsos elementais fortes de  $X$  a  $Y$  (ou unha secuencia de expansións elementais fortes de  $Y$  a  $X$ ). Escribiremos  $X \xrightarrow{\searrow} Y$  ou  $Y \xrightarrow{\nearrow} X$ .

**Observación 3.7.** Se un espazo finito  $T_0$  é fortemente colapsable a un punto, o seu complexo simplicial asociado é colapsable. En efecto, vimos na Observación 3.3 que se  $x \in X$  é un beat point, logo  $\mathcal{K}(X) \searrow \{x\}^c$ . Repetindo esta operación para cada beat point de  $X$  e dos sucesivos espazos resultantes, chegamos a que  $\mathcal{K}(X) \searrow *$ .

**Definición 3.8.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos finitos  $T_0$ , dicimos que teñen o *mesmo tipo de homotopía forte* se existe unha sucesión de colapsos e expansións fortes de  $X$  a  $Y$ .

**Definición 3.9.** Sexa  $X$  un poset, e  $A \subseteq X$  un subespazo. O par  $(X, A)$  dise un *par minimal* se todos os beat points de  $X$  están en  $A$ . Dicimos que  $X$  é *minimal* se o par  $(X, \emptyset)$  é minimal, é dicir, se  $X$  non ten beat points. Está claro que a partir de calquera poset finito podemos chegar a un espazo minimal que é un retracto por deformación forte do mesmo sen máis que repetir un número finito de veces o feito na Proposición 3.4. Así, un *núcleo* dun espazo finito  $X$  é un subespazo de  $X$  que é un retracto por deformación forte de  $X$  e é un espazo minimal.

**Proposición 3.10.** Sexa  $(X, A)$  un par minimal e  $f: X \rightarrow X$  unha aplicación continua tal que  $f \simeq \text{id}$  rel  $A$ . Entón  $f = \text{id}$ .

*Demostración.* Se  $f \simeq \text{id}$  rel  $A$ , polo Corolario 1.47 existe unha cerca

$$f = f_0 \leq f_1 \geq \dots f_n \leq \text{id}: f_i|_A = f|_A \forall 0 \leq i \leq n.$$

Imos ver que  $f_n \leq \text{id} \Rightarrow f_n = \text{id}$  (o caso  $f_n \geq \text{id} \Rightarrow f_n = \text{id}$  sería análogo) e entón, por descenso,  $f = f_0 = f_1 = \dots = f_n = \text{id}$ .

Temos entón  $f_n \leq \text{id}$ . Como  $X$  é finito, podemos ordenar os seus elementos  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  de maneira que  $x_i \leq x_j \Rightarrow i \leq j$  e procederemos por indución:

- $f_n(x_1) = x_1$ . En efecto, como  $f_n \leq \text{id}$ ,  $x_j = f_n(x_1) \leq x_1 \Rightarrow j \leq 1 \Rightarrow j = 1$ .
- Sexa  $i > 1$  e supoñamos que  $f_n(x_j) = x_j \ \forall j < i$ . En particular,  $f|_{\hat{U}_{x_i}} = \text{id}|_{\hat{U}_{x_i}} : x \in \hat{U}_{x_i} \Rightarrow x < x_i \Rightarrow x \in \{x_1, \dots, x_{i-1}\} \Rightarrow f_n(x) = x$ . Se  $x_i \in A$ , é claro que  $f_n(x_i) = x_i$ . Supoñamos que  $x_i \notin A$  (co cal  $x_i$  non pode ser un beat point de  $X$ ) e  $f_n(x_i) \neq x_i$ , entón como  $f_n \leq \text{id}$ ,  $f_n(x_i) < x_i$ . É dicir,  $f_n(x_i) \in \hat{U}_{x_i}$ . Como  $f_n$  preserva a orde, temos que  $\forall y \in \hat{U}_{x_i}$ ,  $f(x_i) \geq f(y) = y$ , co cal  $f(x_i)$  sería un máximo de  $\hat{U}_{x_i}$ . Chegamos así a unha contradición que vén de supoñer que  $f_n(x_i) \neq x_i$ , co cal  $f_n(x_i) = x_i$ .  $\square$

**Corolario 3.11.** *Sexan  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  pares minimais,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  aplicacións continuas tales que  $g \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel} A$ ,  $f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ rel} B$ , entón  $f$  e  $g$  son homeomorfismos.*

**Corolario 3.12.** *Sexa  $X$  un espazo minimal. Entón  $f: X \rightarrow X$  é homótopa á identidade se, e só se, é a identidade.*

**Corolario 3.13** (Teorema de clasificación). *Unha equivalencia de homotopía entre espazos minimais é un homeomorfismo. En particular, como os núcleos dun poset finito son homotopicamente equivalentes, serán homeomorfos. Desta maneira, vemos que o núcleo dun poset é único salvo homeomorfismos. Polo tanto, dous espazos finitos teñen o mesmo tipo de homotopía se, e só se, teñen núcleos homeomorfos (en particular co mesmo número de elementos).*

Así, para clasificar os espazos finitos salvo homotopía, basta clasificar os seus núcleos salvo homeomorfismos.

**Exemplo 3.14.** Consideremos o conxunto  $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3, e_0, e_1, e_2, e_3, f\}$  coa seguinte preorde:  $f \geq e_0, e_1, e_2$ ;  $e_0 \geq e_1$ ;  $e_1 \geq e_0, v_0, v_1, v_2$ ;  $e_2 \geq v_0, v_1, v_2, v_3$ ;  $e_3 \geq v_2, v_3$ .

Antes de nada, fixémonos que esta orde non é antisimétrica: temos  $e_0 \geq e_1$ ,  $e_1 \geq e_0$  e  $e_0 \neq e_1$ . Para construír un espazo  $T_0$  tan só temos que identificar estes dous elementos.

Seguiremos denotando ó cociente por  $X$ , e será o poset da Figura 3.2.

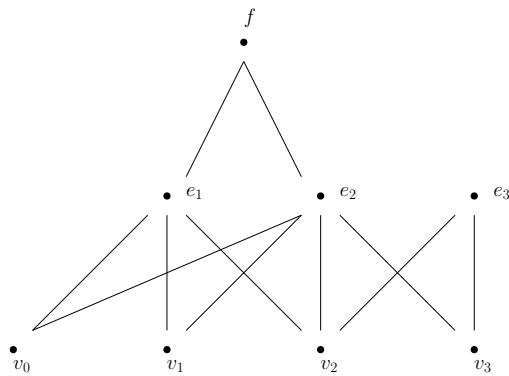


Figura 3.2

Obteñamos agora un poset minimal homotopicamente equivalente a  $X$  de dúas maneiras distintas:

- Primeiro eliminamos o up-beat point  $e_1$ , logo o up-beat point  $e_2$  e por último os up-beat points  $v_0$  e  $v_1$ , tal e como vemos na Figura 3.3.

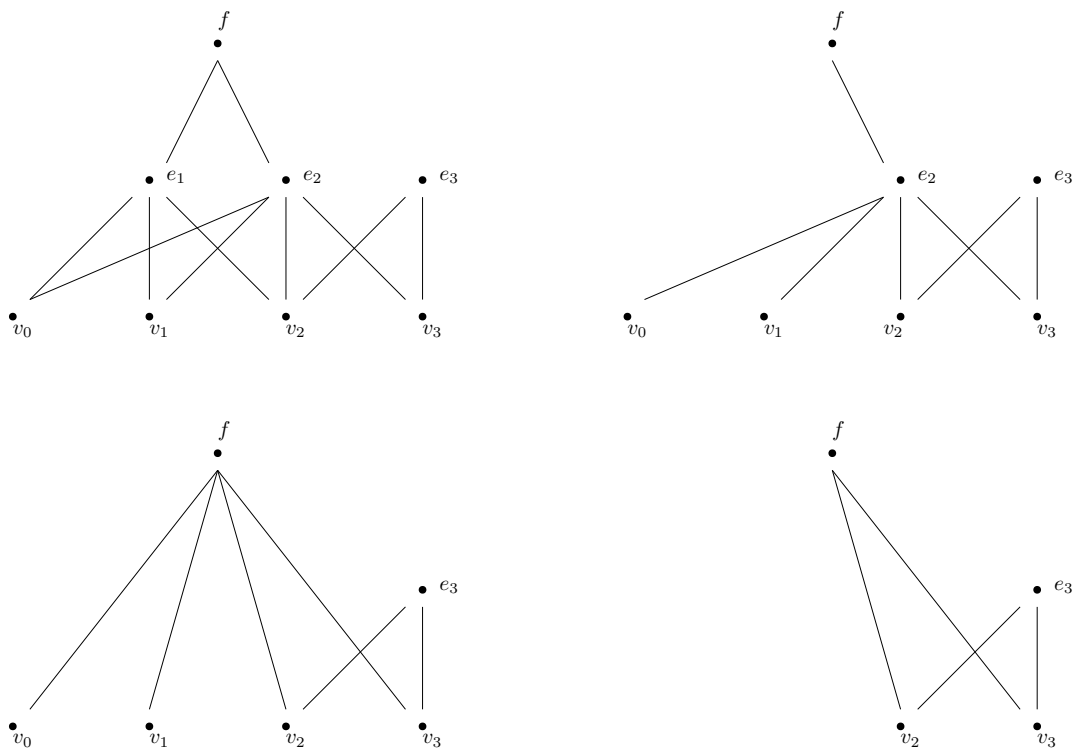


Figura 3.3

- Primeiro eliminamos o up-beat point  $e_1$ , logo o down-beat point  $f$  e por último os up-beat points  $v_0$  e  $v_1$ , como ilustra a Figura 3.4

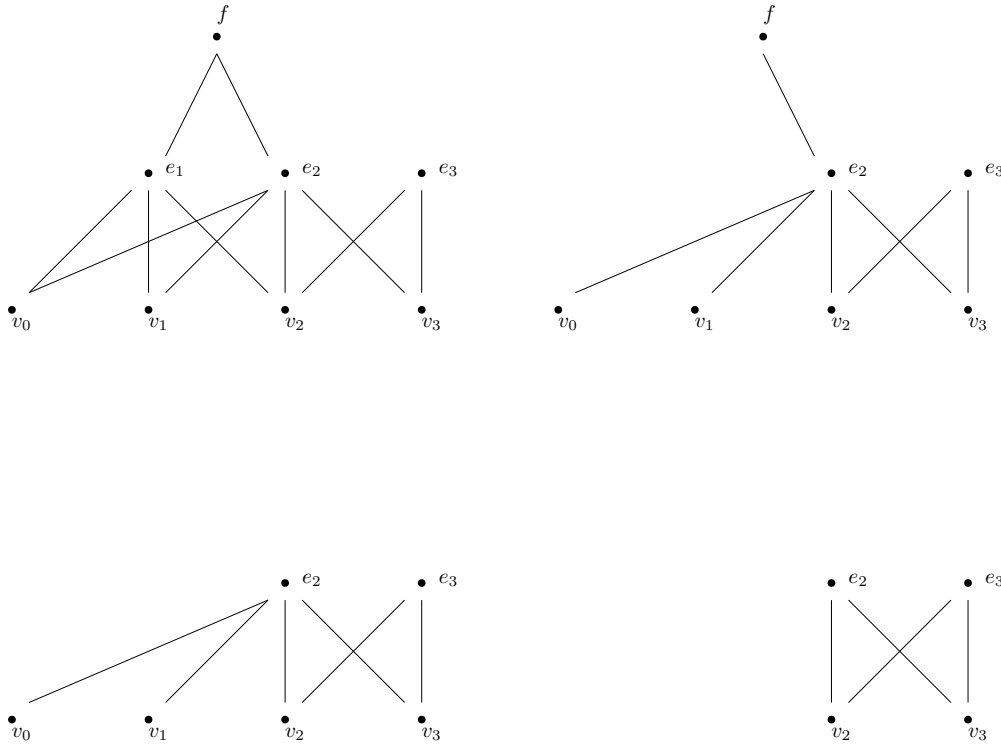


Figura 3.4

Está claro que ambos núcleos son homeomorfos.

Xa vimos que os colapsos e expansións fortes implican retraccións por deformación forte, pero agora veremos un resultado máis potente: que ambos conceptos equivalen.

**Proposición 3.15.** *Sexa  $X$  un espazo finito  $T_0$  e  $A \subseteq X$ . Verifícase que  $X \rightsquigarrow A$  se, e só se,  $A$  é un retracto por deformación forte de  $X$ .*

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Visto.

“ $\Leftarrow$ ” Supoñamos que  $A \subseteq X$  é un retracto por deformación forte de  $X$ . Realicemos colapsos fortes elementais eliminando beat points de  $X$  que non están en  $A$ . Supoñamos que chegamos a un punto  $X \rightsquigarrow Y \supseteq A$  con todos os beat points de  $Y$  en  $A$ . Entón  $(Y, A)$  é un par minimal. Como  $A$  e  $Y$  son retractos por deformación de  $X$  (entón homotopicamente equivalentes), os pares minimais  $(A, A)$  e  $(Y, A)$  están nas hipóteses do Corolario 3.11. En consecuencia,  $A$  e  $Y$  son homeomorfos e entón  $X$  colapsa a  $Y = A$ .  $\square$

### 3.2. Homotopía débil e Teorema de McCord

Introducimos antes de nada unhas nocións básicas de teoría de grupos que serán importantes ó longo desta sección.

**Definición 3.16.** Un *grupo* é un conxunto  $G$  cunha operación interna, é dicir, unha aplicación  $\cdot : (g, h) \in G \times G \mapsto g \cdot h \in G$  (*produto*), verificando:

- Asociatividade:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in G$ .
- Existencia de neutro:  $\exists 1 \in G : g \cdot 1 = g = 1 \cdot g \forall g \in G$ .
- Existencia de elemento simétrico:  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = 1 = g^{-1} \cdot g$ .

**Definición 3.17.** Sexa  $G$  un grupo e  $H \subseteq G$  un subconxunto. Dicimos que  $H$  é un *subgrupo* de  $G$  se se trata dun grupo co produto inducido, é dicir, se  $\cdot|_{H \times H}$  é unha operación interna ( $h \cdot h' \in H \forall h, h' \in H$ ), asociativa (isto sempre se cumpre), con neutro e con simétrico para cada elemento.

Dicimos que  $H$  é un *subgrupo normal* se  $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H \forall h \in H, \forall g \in G$ .

**Definición 3.18.** Sexan  $G, G'$  grupos e  $\varphi : G \rightarrow G'$  unha aplicación entre eles. Chamaremos a  $\varphi$  *homomorfismo de grupos* se é compatible co produto, é dicir, se verifica  $\varphi(g \cdot g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g') \forall g, g' \in G$ . Será un *isomorfismo de grupos* se é un homomorfismo bixectivo. Así, dicimos que dous grupos  $G$  e  $G'$  son *isomorfos*, e escribimos  $G \cong G'$ , se existe un isomorfismo de grupos entre eles.

**Definición 3.19.** Sexan  $G, G'$  grupos e  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos. Definimos o *núcleo* de  $\varphi$  como  $\ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = 1\}$ . Trátase dun subgrupo normal de  $G$ .

**Definición 3.20.** Sexa  $G$  un grupo e  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Definimos a seguinte relación de equivalencia  $\sim : g_1, g_2 \in G, g_1 \sim g_2 : \iff g_1^{-1} \cdot g_2 \in H$ . Así mesmo, definimos a seguinte operación no conxunto cociente  $G/H : [g_1] \cdot [g_2] := [g_1 \cdot g_2] \forall g_1, g_2 \in G$ . Con esta operación, o conxunto cociente é un grupo ó que chamaremos *grupo cociente*.

**Teorema 3.21** (de isomorfía). *Sexa  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos. Verifícase:*

$$G/\ker(\varphi) \cong \varphi(G)$$

Agora introduciremos uns elementos moi importantes na Topoloxía Alxébrica baixo o punto de vista de [6] e [11].

**Definición 3.22.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico, definimos  $\pi_0(X)$  como o conxunto das compoñentes conexas por camiños de  $X : \pi_0(X) := X/\sim$ , con  $\sim$  a relación de equivalencia “estar unido por un camiño”.

**Definición 3.23.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico,  $x_0 \in X$  e  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Consideramos o conxunto de aplicacións continuas do  $n$ -cubo  $I^n$  en  $X$  tales que a imaxe da fronteira  $\partial I^n$

(puntos con algunha das súas coordenadas igual a 1 ou a 0) é  $x_0$ :

$$F_n(X, x_0) = \left\{ f: I^n = [0, 1] \times \overset{(n)}{\dots} \times [0, 1] \rightarrow X: \begin{array}{l} f \text{ continua} \\ f(\partial I^n) = x_0 \end{array} \right\}.$$

Sobre este conxunto definimos a seguinte operación interna:

$$f * g: I^n \longrightarrow X$$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (f * g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Agora consideramos o conxunto cociente

$$\pi_n(X, x_0) = F_n(X, x_0) / \sim$$

con  $\sim$  relación de equivalencia “ser homótopo relativo a  $\partial I^n$ ”. Nel, definimos a seguinte operación interna:

$$[f] \circ [g] := [f * g]$$

Con ela,  $\pi_n(X, x_0)$  é un grupo denominado o *n-ésimo grupo de homotopía* de  $X$ .

**Observación 3.24.** Posto que  $I^n / \partial I^n \cong \mathbb{S}^n$ , podemos ver os elementos de  $F_n(X, x_0)$  como aplicacións continuas de  $\mathbb{S}^n$  en  $X$  tales que a imaxe de  $(0, \overset{(n-1)}{\dots}, 0, 1)$  é  $x_0$ .

**Observación 3.25.** Podemos estender esta definición para  $n = 0$  se tomamos  $I^0$  un punto e  $\partial I^0$  o conxunto baleiro.

**Proposición 3.26.** *Sexa  $X$  un espazo topolóxico conexo por camiños e  $x_0, x_1 \in X$ . Entón, para cada  $n \geq 1$ , os grupos  $\pi_n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_1)$  son isomorfos.*

**Observación 3.27.** Como consecuencia da proposición anterior, se  $X$  é un espazo topolóxico conexo por camiños, adoitamos escribir o *n-ésimo grupo de homotopía* de  $X$  como  $\pi_n(X)$ .

**Proposición 3.28.** *Se  $X$  é contráctil por unha homotopía que deixa  $x_0 \in X$  fixo, entón  $\pi_n(X, x_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .*

**Proposición 3.29.** *Sexan  $X, Y$  espazos topolóxicos e  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua. Verifícase que, para cada  $n \geq 1$  e cada  $x_0 \in X$ , a seguinte aplicación é un homomorfismo de grupos ó que denominaremos homomorfismo inducido por  $f$ . Para  $n = 0$  trátase simplemente dunha aplicación.*

$$\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

$$[g] \mapsto \pi_n(f)([g]) := [f \circ g]$$

**Proposición 3.30.** *Sexa  $f: X \rightarrow Y$  unha equivalencia de homotopía entre dous espazos topolóxicos. Temos que induce isomorfismos entre todos os grupos de homotopía:  $\pi_n(f): \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  isomorfismo  $\forall n \geq 1$ . Ademais,  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  é unha bixección.*

O recíproco da proposición anterior non se cumpre: non toda aplicación  $f$  que induce isomorfismos entre os grupos de homotopía e tal que  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  é unha bixección é unha equivalencia de homotopía (ver Exemplo 3.37). Isto motiva a seguinte definición.

**Definición 3.31.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos topolóxicos. Dicimos que unha aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  é unha *equivalencia de homotopía débil* se  $f$  induce isomorfismos entre os grupos de homotopía e  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  é unha bixección. Neste caso, diremos que  $X$  e  $Y$  teñen o *mesmo tipo de homotopía débil* e escribimos  $X \simeq_w Y$ .

Porén, existen espazos topolóxicos onde os termos de homotopía e homotopía débil son equivalentes.

**Teorema 3.32** (Whitehead). *Unha equivalencia de homotopía débil entre CW-complexos é unha equivalencia de homotopía.*

*Demostración.* Ver [11], Theorem 4.5. □

**Corolario 3.33.** *En particular, as realizacións xeométricas de dous complexos simpliciais teñen o mesmo tipo de homotopía se, e só se, teñen o mesmo tipo de homotopía débil.*

En xeral, non é fácil saber se os homomorfismos inducidos por unha aplicación continua son isomorfismos, co cal imos ver unha caracterización das equivalencias de homotopía débil máis útil.

**Definición 3.34.** Un recubrimento aberto dun espazo topolóxico  $X$  é *de tipo base* (*basis-like*) se é unha base para algunha topoloxía sobre  $X$ .

**Exemplo 3.35.** Calquera base dun espazo topolóxico é un recubrimento de tipo base do mesmo. En particular, para  $X$  un espazo finito, temos que a base minimal  $\{U_x\}_{x \in X}$  é un recubrimento aberto de tipo base de  $X$ .

**Teorema 3.36** (McCord). *Sexan  $X, Y$  espazos topolóxicos e  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua entre eles. Se existe  $\mathcal{U}$  un recubrimento de tipo base de  $Y$  tal que a restrición  $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$  é unha equivalencia de homotopía débil  $\forall U \in \mathcal{U}$ , entón  $f$  é unha equivalencia de homotopía débil.*

*Demostración.* Ver [15], Theorem 6. □

**Exemplo 3.37.** Consideremos os espazos finitos  $X$  e  $Y$  da Figura 3.5. Ambos son espazos minimais non homeomorfos (pois, para comezar, teñen distinto número de elementos), logo non poden ter o mesmo tipo de homotopía. Intentemos atopar unha equivalencia de homotopía débil entre eles.

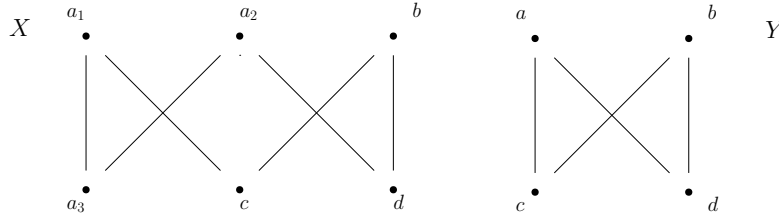


Figura 3.5

Sexa  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = a$ ,  $f(b) = b$ ,  $f(c) = c$  e  $f(d) = d$ . Trátase dunha aplicación continua porque preserva a orde; intentemos ver entón que se trata dunha equivalencia de homotopía débil utilizando o Teorema de McCord. Para isto, consideremos a base minimal de  $Y$  (a cal xa sabemos que é un recubrimento de tipo base de dito espazo)  $\{U_a, U_b, U_c, U_d\} = \{\{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{c\}, \{d\}\}$ .

En primeiro lugar, temos que  $f|_{f^{-1}(U_b)}$ ,  $f|_{f^{-1}(U_c)}$  e  $f|_{f^{-1}(U_a)}$  son homeomorfismos, polo tanto equivalencias de homotopía e en consecuencia equivalencias de homotopía débil.

Vaiamos agora con  $f|_{f^{-1}(U_a)}: \{a_1, a_2, a_3, c, d\} \rightarrow \{a, c, d\}$ . Neste caso, basta ver que ambos espazos son contráctiles, pois calquera aplicación entre espazos contráctiles é unha equivalencia de homotopía (ver [18], Section 3, Corollary 11) e polo tanto unha equivalencia de homotopía débil.

- Para  $\{a_1, a_2, a_3, c, d\}$ : primeiro eliminamos os up-beat points  $c$  e  $d$ , e logo os down-beat points  $a_1$  e  $a_2$ .
- Para  $\{a, c, d\}$ : tan só temos que eliminar os up-beat points  $c$  e  $d$ .

Podemos ver un esquema dos colapsos na Figura 3.6.

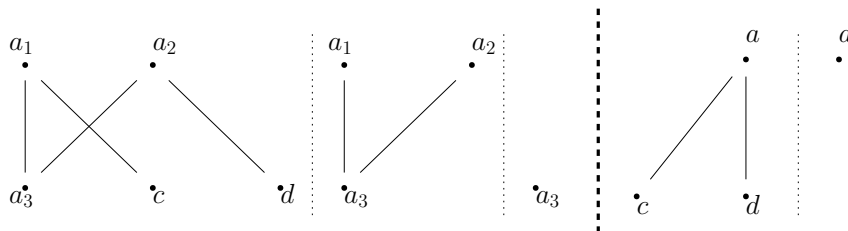


Figura 3.6

Como  $f|_U$  é unha equivalencia de homotopía débil para cada aberto  $U$  da base minimal, polo Teorema de McCord deducimos que  $f$  é unha equivalencia de homotopía débil e polo tanto inducirá isomorfismos entre os grupos de homotopía de  $X$  e  $Y$ .

Introduciremos agora dúas equivalencias de homotopía débil moi importantes para nós.

**Definición 3.38.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito, definimos a *aplicación  $\mathcal{K}$  de McCord* como:

$$\begin{aligned} \mu_X: |\mathcal{K}(X)| &\rightarrow X \\ x &\mapsto \text{mín}(\text{sop}(x)) \end{aligned}$$

**Exemplo 3.39.** Fixémonos no poset do Exemplo 2.18 e o seu complexo de orde asociado. Para o punto  $x \in |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))|$  que podemos ver na Figura 3.7, temos:

$$\mu_{\mathcal{X}(K)}(x) = \text{mín}(\text{sop}(x)) = \text{mín}\{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1, v_2\}\} = \{v_0\}.$$

Facendo o mesmo con tódolos puntos da realización xeométrica, vemos que a aplicación  $\mathcal{K}$  de McCord actúa como indica a Figura 3.7.

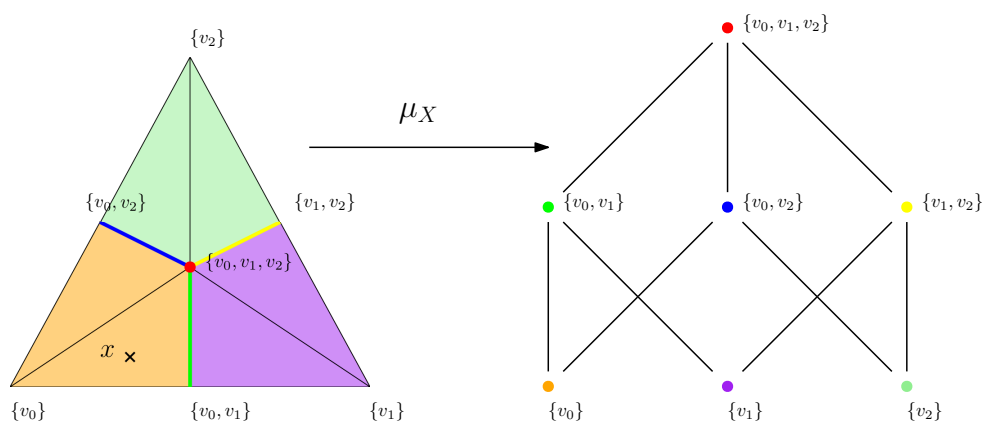


Figura 3.7

**Proposición 3.40.** A *aplicación  $\mathcal{K}$  de McCord* é unha equivalencia de homotopía débil.

*Demostración.* Ver [3], Theorem 1.4.6. □

**Definición 3.41.** Sexa  $K$  un complexo simplicial finito, definimos a *aplicación  $\mathcal{X}$  de McCord* como  $\mu_K := \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1}: |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$ , onde  $s_K: |K'| \rightarrow |K|$  é o homeomorfismo visto na Observación 2.22.

**Proposición 3.42.** A *aplicación  $\mathcal{X}$  de McCord* é unha equivalencia de homotopía débil.

*Demostración.* Trátase dunha equivalencia de homotopía débil por ser composición dunha equivalencia de homotopía débil cun homeomorfismo. □

### 3.3. Colapsos e tipo de homotopía simple

Xa temos introducido o concepto de tipo de homotopía simple para complexos simpliciais finitos e vimos que se dous complexos simpliciais teñen o mesmo tipo de homotopía simple, as súas realizacións xeométricas teñen o mesmo tipo de homotopía, ou equivalentemente, o mesmo tipo de homotopía débil.

Así mesmo, incluímos a idea de tipo de homotopía forte para espazos topolóxicos finitos e amosamos que equivalía á noción de tipo de homotopía. Porén, como tipo de homotopía e tipo de homotopía débil non equivalen neste tipo de espazos (ver Exemplo 3.37), tampouco temos a equivalencia para tipo de homotopía forte.

Tamén vimos que os colapsos fortes en posets finitos inducen colapsos nos complexos simpliciais asociados (Observación 3.3), pero, como veremos no seguinte exemplo, o recíproco non se cumpre: podemos atopar posets non contráctiles (é dicir, non colapsables fortemente) cuxo complexo de orde asociado é colapsable, o cal motiva a busca dun tipo de homotopía “menos potente” que a forte para posets finitos.

**Exemplo 3.43** (A carteira). O poset cuxo diagrama de Hasse podemos ver na Figura 3.8 non é contráctil, ó ser minimal (e por tanto non colapsable fortemente) e ter máis dun elemento. Porén, o seu complexo de orde asociado (cuxa realización xeométrica podemos ver na Figura 3.9) é colapsable.

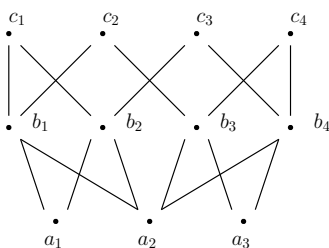


Figura 3.8

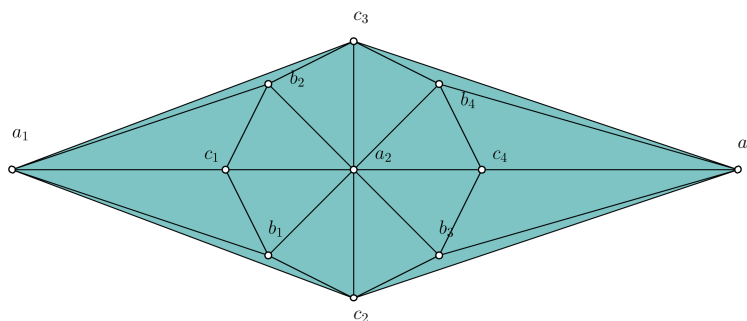


Figura 3.9

Xa vimos no Exemplo 1.48 que un poset cun máximo ou un mínimo é contráctil. En particular, se  $x \in X$  é un down-beat point (respectivamente, up-beat point),  $\widehat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$  (respectivamente,  $\widehat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$ ) ten un máximo (mínimo), e polo tanto será contráctil. Porén, tamén vimos que o recíproco non se cumpre. Isto provoca a seguinte definición.

**Definición 3.44.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$ .

- $x \in X$  é un *down-beat point débil* se  $\widehat{U}_x$  é contráctil.
- $x \in X$  é un *up-beat point débil* se  $\widehat{F}_x$  é contráctil.
- $x \in X$  é un *beat point débil* se é un up-beat point débil ou un down-beat point débil.

**Observación 3.45.** Está claro que os beat points son beat points débiles.

**Exemplo 3.46.** O elemento  $c_2$  do poset do Exemplo 3.43 é un down-beat point débil posto que  $\widehat{U}_{c_2}$  é contráctil por ser colapsable. Da mesma maneira, o elemento  $a_3$  é un up-beat point débil, pois  $\widehat{F}_{a_3}$  é colapsable (ver Figura 3.10).

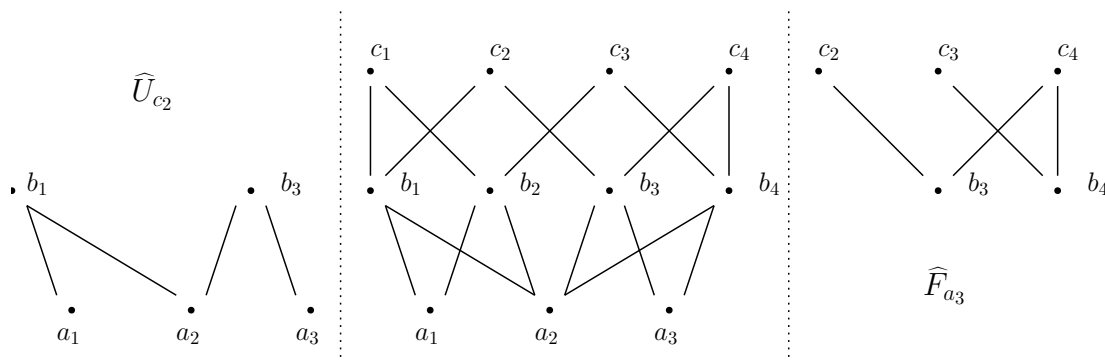


Figura 3.10

**Proposición 3.47.** Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$  e  $x \in X$ . Verifícase que  $x$  é un beat point débil se, e só se,  $\widehat{C}_x = \widehat{U}_x \cup \widehat{F}_x$  é contráctil.

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Supoñamos que  $x$  é un down-beat point débil, é dicir, que  $\widehat{U}_x$  é contráctil (o outro caso sería análogo). Entón,  $\widehat{C}_x \searrow \searrow * \cup \widehat{F}_x$ , e este último é colapsable por ter un mínimo (\*).

“ $\Leftarrow$ ” Reciprocamente, supoñamos que  $\widehat{C}_x \searrow \searrow * \in \widehat{U}_x$  (o caso  $* \in \widehat{F}_x$  sería análogo). Isto significa que imos eliminando beat points de  $\widehat{C}_x$  ata quedar só con \*, o cal implica que podemos ir suprimindo beat points de  $\widehat{U}_x$  ata quedar só con \*, é dicir, que  $\widehat{U}_x$  é contráctil e que polo tanto  $x$  é un down-beat point débil.  $\square$

**Proposición 3.48.** *Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$  e  $x \in X$  un beat point débil. Entón  $i: X \setminus \{x\} \rightarrow X$  é unha equivalencia de homotopía débil.*

*Demostración.* Supoñamos que  $x$  é un up-beat point débil. Polo Teorema de McCord (3.36), basta ver que  $\forall y \in X$ ,  $i|_{i^{-1}(U_y)}: i^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  é unha equivalencia de homotopía débil. Pero  $U_y$  ten máximo  $(y)$  e polo tanto é contráctil para todo  $y$ , e  $i^{-1}(U_y)$  ten máximo  $(y)$  e polo tanto é contráctil para  $y \neq x$  e coincide con  $\hat{U}_x$  (contráctil por definición) para  $y = x$ . En calquera caso,  $i|_{i^{-1}(U_y)}$  é unha aplicación continua entre espazos contráctiles e polo tanto unha equivalencia de homotopía (ver [18], Section 3, Corollary 11). En particular, será unha equivalencia de homotopía débil, co cal queda probado o que queríamos.  $\square$

**Definición 3.49.** Sexa  $X$  un poset finito e  $x \in X$  un beat point débil. Definimos *colapso elemental* ó paso de  $X$  a  $X \setminus \{x\}$ . Entón dicimos que  $X$  *colapsa elementalmente* a  $X \setminus \{x\}$ , e escribimos  $X \xrightarrow{e} X \setminus \{x\}$ . Da mesma maneira, chamamos *expansión elemental* ó paso de  $X \setminus \{x\}$  a  $X$ , dicimos que  $X \setminus \{x\}$  *expándese elementalmente* a  $X$ , e escribimos  $X \setminus \{x\} \xrightarrow{e} X$ .

**Definición 3.50.** Sexan  $X$  e  $Y$  posets finitos. Dicimos que  $X$  *colapsa* a  $Y$  se existe unha sucesión de colapsos elementais tales que  $X = X_0 \xrightarrow{e} X_1 \xrightarrow{e} \dots \xrightarrow{e} X_n = Y$ . Nesta situación tamén podemos dicir que  $Y$  *expándese* a  $X$ . Escribimos  $X \searrow Y$  ou  $Y \nearrow X$ .

**Definición 3.51.** Sexan  $X$  e  $Y$  posets finitos. Dicimos que  $X$  *defórmase* en  $Y$  se existe unha sucesión de posets  $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$  tales que, para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $X_i \xrightarrow{e} X_{i+1}$  ou  $X_i \xrightarrow{e} X_{i+1}$ . Estaremos falando dunha *n-deformación* se os posets asociados teñen como máximo altura  $n$ .

**Observación 3.52.** A proposición anterior vén a dicirnos que os colapsos, as expansións e as deformacións son equivalencias de homotopía débil.

**Exemplo 3.53.** Vexamos que o espazo topolóxico finito do Exemplo 3.43 é debilmente contráctil realizando nel colapsos e expansións elementais. Como vimos no Exemplo 3.46,  $c_2$  é un down-beat point débil, e de maneira análoga,  $c_3$  tamén o será, co cal podemos eliminar os dous. Ademais, vimos que  $a_3$  é un up-beat point débil do espazo inicial, e tamén será un up-beat point débil despois de eliminar os puntos  $c_2$  e  $c_3$  do poset orixinal. O mesmo pasa con  $a_1$  e así é posible suprimir ambos.  $c_1$  e  $c_4$  serán down-beat points débiles do espazo resultante, e ó quitálos vemos que  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  son down-beat points débiles. Así, ó final quedamos tan só con  $a_2$ , chegando ó que desexábamos. Podemos ver un esquema dos colapsos realizados na Figura 3.11.

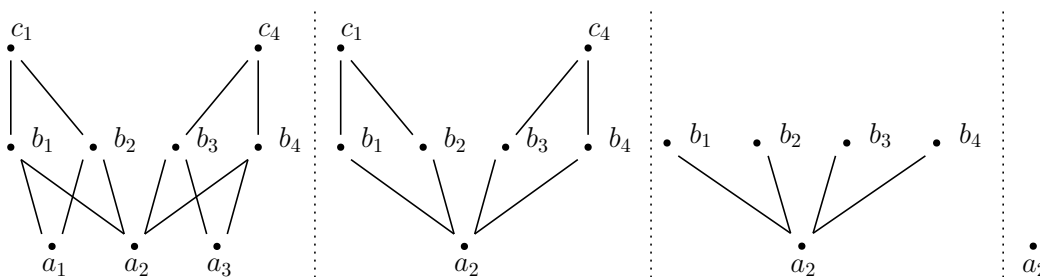


Figura 3.11

- Proposición 3.54.**
1. Sean  $X$  e  $Y$  espazos topolóxicos finitos  $T_0$ . Verifícase que  $X$  e  $Y$  teñen o mesmo tipo de homotopía débil se, e só se, as realizacións xeométricas dos seus complexos simpliciais asociados teñen o mesmo tipo de homotopía.
  2. Sean  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos. Verifícase que as súas realizacións xeométricas teñen o mesmo tipo de homotopía se, e só se, os posets asociados ós complexos simpliciais de partida teñen o mesmo tipo de homotopía débil.

*Demostración.* 1. Como a aplicación  $\mathcal{K}$  de McCord é unha equivalencia de homotopía débil (Proposición 3.40),  $X$  e  $Y$  terán, respectivamente, o mesmo tipo de homotopía débil que as realizacións xeométricas dos seus complexos simpliciais asociados. Así, que  $X$  e  $Y$  teñan o mesmo tipo de homotopía débil equivale a que  $|\mathcal{K}(X)|$  e  $|\mathcal{K}(Y)|$  teñan o mesmo tipo de homotopía débil, é dicir, o mesmo tipo de homotopía polo Corolario 3.33.

2. Como a aplicación  $\mathcal{X}$  de McCord é unha equivalencia de homotopía débil (Proposición 3.42),  $|K|$  e  $|L|$  terán, respectivamente, o mesmo tipo de homotopía débil ca os posets asociados ós complexos simpliciais de partida. Que  $|K|$  e  $|L|$  teñan o mesmo tipo de homotopía equivale a que teñan o mesmo tipo de homotopía débil polo Corolario 3.33, co cal tamén equivale a que  $\mathcal{X}(K)$  e  $\mathcal{X}(L)$  sexan debilmente homotopicamente equivalentes.  $\square$

Despois de ver esta proposición, a intuición dinos que o candidato perfecto para versión para espazos finitos da conxectura de Andrews-Curtis é a seguinte:

**Conxectura 3.55.** [*Andrews-Curtis, versión para posets*] *Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$  de altura 2. Se  $X$  é debilmente homotopicamente equivalente a un punto, entón  $X$  3-defórmase a un punto.*

### 3.4. Relación entre as conxecturas

Acabamos de enunciar unha versión da conxectura de Andrews-Curtis para espazos finitos (Conxectura 3.55), e queremos probar que é efectivamente unha versión da conxectura de Andrews-Curtis, é dicir, que é equivalente á Conxectura 2.55. Co que sabemos, podemos demostrar a equivalencia entre as hipóteses, pero para demostrar a equivalencia das teses temos que coñecer unha serie de novos resultados teóricos.

**Proposición 3.56.** *O poset asociado a un cono simplicial é contráctil.*

*Demostración.* Sexa  $K = aL$  un cono simplicial e  $\mathcal{X}(K)$  o seu poset asociado, e vexamos que este último é contráctil. Definimos a aplicación  $f: \sigma \in \mathcal{X}(K) \mapsto \sigma \cup \{a\} \in \mathcal{X}(K)$ , que preserva a orde posto que  $\sigma \subseteq \tau \Rightarrow f(\sigma) = \sigma \cup \{a\} \subseteq \tau \cup \{a\} = f(\tau)$ ; e a aplicación  $g: \sigma \in \mathcal{X}(K) \mapsto \{a\} \in \mathcal{X}(K)$ , que tamén preserva a orde por ser constante. Temos  $\sigma \subseteq \sigma \cup \{a\} \supseteq \{a\} \forall \sigma \in \mathcal{X}(K)$ , ou o que é o mesmo,  $\text{id}_{\mathcal{X}(K)}(\sigma) \subseteq f(\sigma) \supseteq g(\sigma) \forall \sigma \in \mathcal{X}(K)$ . Así, temos  $\text{id}_{\mathcal{X}(K)} \leq f \geq g$ , o cal polo Corolario 1.47 é equivalente a que  $\{a\}$  sexa un retracto por deformación forte de  $\mathcal{X}(K)$ , que era o que queríamos demostrar.  $\square$

Introducimos agora un concepto parecido ó de cilindro de aplicación, pero adaptado a espazos finitos.

**Definición 3.57.** Sexa  $f: (X, \leq_X) \rightarrow (Y, \leq_Y)$  unha aplicación que preserva a orde entre posets finitos. Definimos o *cilindro non-Hausdorff de  $f$*  como o poset  $(B(f) := X \sqcup Y, \leq_{B(f)})$  tal que:

- Se  $x, x' \in X$ ,  $x \leq_{B(f)} x' \iff x \leq_X x'$ .
- Se  $y, y' \in Y$ ,  $y \leq_{B(f)} y' \iff y \leq_Y y'$ .
- Se  $x \in X, y \in Y$ ,  $x \leq_{B(f)} y \iff f(x) \leq_Y y$ .

**Exemplo 3.58.** Para a aplicación  $f: X \rightarrow Y$  do Exemplo 3.37 teríamos  $B(f)$  o poset cuxo diagrama de Hasse podemos ver na Figura 3.12.

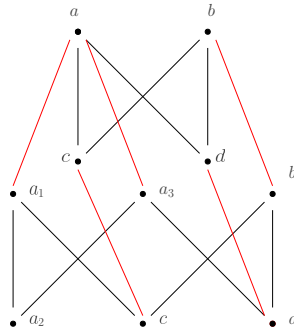


Figura 3.12

**Lema 3.59.** *Dada  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua entre dous espazos finitos,  $Y$  é un retracto por deformación forte de  $B(f)$ .*

*Demostración.* Definamos unha aplicación entre  $B(f)$  e  $Y$  e vexamos que é unha retracción que mantén fixos os elementos de  $Y$ :

$$\begin{aligned} r: B(f) &\longrightarrow Y \\ x \in X &\mapsto f(x) \\ y \in Y &\mapsto y \end{aligned}$$

- $r$  continua porque preserva a orde. Sexan  $u, u' \in B(f) = X \sqcup Y$  tales que  $u \leq_{B(f)} u'$ 
  - Se  $u, u' \in X$ , entón  $u \leq_X u'$  e  $r(u) = f(u) \leq_Y f(u') = r(u')$ , pois  $f$  preserva a orde.
  - Se  $u, u' \in Y$ , entón  $r(u) = u \leq_Y u' = r(u')$ .
  - Se  $u \in X, u' \in Y$ , entón  $r(u) = f(u) \leq_Y u' = r(u')$ .
- $r \circ i = \text{id}_Y$ .
- $i \circ r \simeq \text{id}_{B(f)}$ . Sexa  $u \in B(f)$ , temos:

$$(i \circ r)(u) = i(r(u)) = \begin{cases} i(f(u)) = f(u) \geq_{B(f)} u = \text{id}_{B(f)}(u) & \text{se } u \in X \\ i(u) = u \geq_{B(f)} u = \text{id}_{B(f)}(u) & \text{se } u \in Y \end{cases}$$

É dicir,  $i \circ r \geq \text{id}_{B(f)}$ , o cal implica  $i \circ r \simeq \text{id}_{B(f)}$  polo Corolario 1.47.  $\square$

**Corolario 3.60.** *Dada  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua entre dous espazos finitos,  $B(f) \searrow\searrow Y$  e polo tanto  $B(f) \searrow Y$ .*

**Lema 3.61.** *Sexa  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua entre espazos finitos tal que  $f^{-1}(U_y)$  é contráctil para todo  $y \in Y$ , entón  $B(f) \searrow X$ .*

*Demostración.* Ordenamos os elementos  $y_1, \dots, y_m$  de  $Y$  de tal xeito que  $y_r \leq y_s \Rightarrow r \leq s$  e para cada  $r \in \{0, 1, \dots, m\}$  definimos  $X_r = X \cup \{y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_m\} \subseteq B(f)$ . Así, temos

$$\hat{U}_{y_r}^{X_{r-1}} = \{x \in X: f(x) \leq y_r\} \cong f^{-1}(U_{y_r}^Y) = \{x \in X: f(x) \leq y_r\},$$

sendo este último contráctil por hipótese. Así,  $\hat{U}_{y_r}^{X_{r-1}}$  é contráctil e polo tanto  $y_r$  é un beat point débil en  $X_{r-1}$  e en consecuencia  $X_{r-1} \xrightarrow{e} X_{r-1} \setminus \{y_r\} = X_r$  para cada  $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ . En conclusión,  $B(f) = X_0 \xrightarrow{e} X_1 \xrightarrow{e} \dots \xrightarrow{e} X_m = X$ , é dicir,  $B(f) \searrow X$ .  $\square$

**Proposición 3.62.** *Sexa  $X$  un poset finito de altura  $n$ , verifícase que  $X$   $(n+1)$ -defórmase na súa subdivisión baricéntrica.*

*Demostración.* Definimos a aplicación  $h: C \in X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) \mapsto \text{máx}(C) \in X$ . Trátase dunha aplicación continua posto que preserva a orde:

$$C \subseteq C' \Rightarrow h(C) = \text{máx}(C) \leq \text{máx}(C') = h(C').$$

Ademais,  $h^{-1}(U_x)$  é contráctil  $\forall x \in X$ , pois

$$h^{-1}(U_x) = \{C \in X' : h(C) = \text{máx}(C) \leq x\} = \mathcal{X}(\{x\}\mathcal{K}(\hat{U}_x)),$$

e este último é contráctil pola Proposición 3.56. Así, estamos nas hipóteses do Lema 3.61 e do Corolario 3.60, co cal temos  $X' \nearrow B(h) \searrow X$ .

Ademais, trátase dunha  $n+1$ -deformación porque  $X$  e  $X'$  teñen altura  $n$  e  $B(h) = X' \sqcup X$  ten altura  $n+1$ : se  $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_k$  é unha  $k$ -cadea en  $X'$ , entón o elemento  $C_k$  é unha cadea en  $X$  con polo menos  $k+1$  elementos, co cal existen un máximo de  $n-k+1$  elementos de  $X$  maiores ou iguais ca o seu máximo, o que se traduce nunha cadea de  $k+1+n-k+1 = n+2$  elementos en  $B(h)$ . Da mesma maneira, se  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k$  é unha  $k$ -cadea en  $X$ , haberá como máximo  $n-k+1$  elementos de  $X'$  tales que o seu máximo sexa menor ou igual ca  $x_0$ , o que se traduce nunha  $(n+1)$ -cadea en  $B(h)$ .  $\square$

**Teorema 3.63.** *1. Sexan  $X$  e  $Y$  posets finitos. Verifícase  $X \searrow Y \Rightarrow \mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$ . Ademais,  $X$  e  $Y$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple se, e só se,  $\mathcal{K}(X)$  e  $\mathcal{K}(Y)$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple.*

*2. Sexan  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos. Verifícase  $K \searrow L \Rightarrow \mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$ . Ademais,  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple se, e só se,  $\mathcal{X}(K)$  e  $\mathcal{X}(L)$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple.*

*Demostración.* Supoñamos que  $X \searrow Y$ . Sexa  $x \in X$  un beat point débil, entón  $\hat{C}_x$  é contráctil (Proposición 3.47), co cal  $\text{lk}(\{x\}) = \mathcal{K}(\hat{C}_x)$  é colapsable a un punto pola Observación 3.7. Isto, polo Corolario 2.41, equivale a que  $\mathcal{K}(X) \searrow \{x\}^c$ . Repetindo esta operación para cada beat point débil que quitamos ata chegar a  $Y$ , temos que  $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$ . En xeral, se  $X$  e  $Y$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple,  $\mathcal{K}(X)$  e  $\mathcal{K}(Y)$  tamén terán o mesmo tipo de homotopía simple.

Supoñamos agora que  $K \searrow L$ . Sexa  $\sigma \in K$  unha cara libre de  $\{a\} \cup \sigma$  en  $K$ , será un up-beat point de  $\mathcal{X}(K)$ . Ademais,  $\{a\} \cup \sigma$  será un down-beat point débil de  $\mathcal{X}(K) \setminus \sigma$  posto que  $\hat{U}_{\{a\} \cup \sigma}^{\mathcal{X}(K) \setminus \sigma} = \mathcal{X}(a\dot{\sigma})$  é contráctil pola Proposición 3.56. Polo tanto,

$$\mathcal{X}(K) \xrightarrow{e} \mathcal{X}(K) \setminus \{\sigma\} \xrightarrow{e} \mathcal{X}(K) \setminus \{\sigma, \{a\} \cup \sigma\} = \mathcal{X}(K \setminus \{\sigma, \{a\} \cup \sigma\}).$$

Repetindo esta operación para cada cara libre que quitamos ata chegar a  $L$ , temos que  $\mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$ . En xeral, se  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple,  $\mathcal{X}(K)$  e

$\mathcal{X}(L)$  tamén terán o mesmo tipo de homotopía simple.

Sexan agora  $X$  e  $Y$  posets tales que  $\mathcal{K}(X)$  e  $\mathcal{K}(Y)$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple. Entón, polo que acabamos de ver,  $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$  e  $Y' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(Y))$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple, e como  $X$  e  $Y$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple que as súas respectivas subdivisións baricéntricas, concluimos que  $X$  e  $Y$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple.

Da mesma maneira, se  $K$  e  $L$  son complexos simpliciais finitos tales que  $\mathcal{X}(K)$  e  $\mathcal{X}(L)$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple, polo que acabamos de ver,  $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$  e  $Y' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(L))$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple, e como  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple que as súas respectivas subdivisións baricéntricas, concluimos que  $K$  e  $L$  teñen o mesmo tipo de homotopía simple.  $\square$

**Observación 3.64.** Como a dimensión do complexo  $\mathcal{K}(X)$  é igual á altura do poset  $X$  e a altura do poset  $\mathcal{X}(K)$  é igual á dimensión do complexo  $K$ , as  $n$ -deformacións entre espazos topolóxicos finitos  $T_0$  son equivalentes a  $n$ -deformacións entre os seus complexos de orde asociados, e as  $n$ -deformacións entre complexos simpliciais finitos son equivalentes a  $n$ -deformacións entre os seus posets de caras asociados.

O seguinte diagrama ([3]) ilustra a situación na que nos atopamos neste momento:

$$\begin{array}{ccc}
 X \simeq Y & & \mathcal{X}(K) \simeq \mathcal{X}(L) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 X \wedge Y \xrightarrow{\quad} X \simeq_w Y & & \mathcal{X}(K) \wedge \mathcal{X}(L) \xrightarrow{\quad} \mathcal{X}(K) \simeq_w \mathcal{X}(L) \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 & |\mathcal{K}(X)| \simeq_w |\mathcal{K}(Y)| & \\
 & \Updownarrow & \\
 & |\mathcal{K}(X)| \simeq |\mathcal{K}(Y)| & \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 \mathcal{K}(X) \wedge \mathcal{K}(Y) \xrightarrow{\quad} |\mathcal{K}(X)| \simeq |\mathcal{K}(Y)| & & K \wedge L \xrightarrow{\quad} |K| \simeq |L|
 \end{array}$$

Así, xa temos todos os ingredientes para probar a equivalencia entre as conxecturas.

**Teorema 3.65.** *As seguintes conxecturas son equivalentes:*

1. (2.55) *Dado un complexo simplicial finito 2-dimensional  $K$  tal que a súa realización xeométrica  $|K|$  é contráctil, entón  $K$  é 3-deformable a un punto.*
2. (3.55) *Sexa  $X$  un espazo topolóxico finito  $T_0$  de altura 2. Se  $X$  é debilmente homotopicamente equivalente a un punto, entón  $X$  3-defórmase a un punto.*

*Demostración.* “1  $\Rightarrow$  2” Sexa  $X$  nas hipóteses da segunda conxectura, e consideremos  $\mathcal{K}(X)$  o complexo simplicial asociado, que será finito, de dimensión 2 e con realización xeométrica contráctil pola Proposición 3.54. Así,  $\mathcal{K}(X)$  está nas hipóteses da primeira conxectura, que di que  $\mathcal{K}(X)$  é 3-deformable a un punto. En consecuencia, polo teorema e observación anteriores, concluimos que  $X$  3-defórmase a un punto.

“2  $\Rightarrow$  1” Sexa  $K$  nas hipóteses da primeira conxectura, e consideremos  $\mathcal{X}(K)$  o poset asociado, que será finito, de altura 2 e debilmente homotopicamente equivalente a un punto pola Proposición 3.54. Desta maneira,  $\mathcal{X}(K)$  está nas hipóteses da segunda conxectura, que di que  $\mathcal{X}(K)$  é 3-deformable a un punto. En consecuencia, polo teorema e observación anteriores, concluimos que  $K$  3-defórmase a un punto.  $\square$

Con procedementos similares ós seguidos aquí, podemos formular aínda máis conxecturas equivalentes ás nosas, cada unha en eidos distintos das Matemáticas, co cal as opcións á hora de probar ou desmentir a nosa suposición multiplícanse. Se a isto lle sumamos a capacidade computacional coa que contamos hoxe en día, podemos confiar en que máis cedo que tarde imos dar coa resposta á nosa conxectura.

# Bibliografía

- [1] Alexandroff, P. S. (1937). Diskrete Räume, *Matematicheskij Sbornik N.S.*, 3(2), 501-519.
- [2] Andrews, J. J. e Curtis, M. L. (1965). Free groups and handlebodies. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16(2), 192-195.
- [3] Barmak, J. A. (2011). *Algebraic topology of finite topological spaces and applications* (Vol. 2032). Springer.
- [4] Benedetti, B. e Lutz, F. H. (2009). *The dunce hat in a minimal non-extendably collapsible 3-ball*.  
<https://arxiv.org/abs/0912.3723>.
- [5] Bredon, G. E. (1993). *Topology and geometry* (Vol. 139). Springer.
- [6] Croom, F. H. (1978). *Basic concepts of algebraic topology*. Springer.
- [7] Fernández, X. L. (2017). *Métodos combinatorios y algoritmos en topología de dimensiones bajas y la conjetura de Andrews-Curtis* (tese doutoral, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales).
- [8] Fernández, X. L. (2019). *3-deformations of 2-complexes and Morse Theory*.  
<https://arxiv.org/abs/1912.00115>.
- [9] Ferrario, D. L. e Piccinini, R. A. (2010). *Simplicial structures in topology*. Springer.
- [10] Fox, R. H. (1945). On topologies for function spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(6. P1), 429-432.
- [11] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [12] Hog-Angeloni, C. e Metzler, W. (1993). The Andrews-Curtis Conjecture and its Generalizations. *Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*, Cambridge University Press, 365-380.

- [13] Kozlov, D. (2007). *Combinatorial algebraic topology* (Vol. 21). Springer.
- [14] May, J. P. (2003). *Finite topological spaces*. Notes for REU.
- [15] McCord, M. C. (1966). Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Mathematical Journal*, 33(3), 465-474.
- [16] Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Prentice-Hall.
- [17] Rolfsen, D. *The Poincaré conjecture and its cousins*.  
<https://www.math.unl.edu/~mbrittenham2/classwk/990s08/public/rolfsen.PCcousins.pdf>.
- [18] Spanier, E. H. (1989). *Algebraic topology*. Springer.
- [19] Stong, R. E. (1966). Finite topological spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 123(2), 325-340.
- [20] Wall, C. T. C. (1966). Formal deformations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1), 342-352.
- [21] Whitehead, J. H. (1950). Simple homotopy types. *American Journal of Mathematics*, 72(1), 1-57.
- [22] Whitehead, J. H. C. (1939). Simplicial spaces, nuclei and m-groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1), 243-327.
- [23] Wright, P. (1975). Group presentations and formal deformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 208, 161-169.
- [24] Zeeman, E. C. (1963). On the dunce hat. *Topology*, 2(4), 341-358.