



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Espacios de Sobolev y aplicaciones al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Antonio Figueroa Pardo

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Espacios de Sobolev y aplicaciones al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Antonio Figueroa Pardo

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análisis Matemático.
Título: Espacios de Sobolev y aplicaciones al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Breve descripción do contido
El presente trabajo se dedicará al estudio de los espacios de Sobolev, comenzando por su definición, y destacando sus propiedades principales mediante la aportación de resultados clásicos. Finalmente, se verá cómo se pueden utilizar dichos espacios para resolver numéricamente Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Preliminares de análisis funcional	1
1.1.1. Espacios de Banach	1
1.1.2. Espacios de Hilbert	3
1.2. Preliminares de Teoría de la Medida	6
1.2.1. Los espacios $L^p(X, \Sigma, \mu)$	6
1.2.2. Generación de medidas, los teoremas de Carathéodory y Hahn	8
1.2.3. Ejemplos de espacios de medida	9
2. Teoría de distribuciones	11
2.1. Generalidades	11
2.2. Los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$	14
2.3. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$	18
3. Espacios de Sobolev	21
3.1. Generalidades	21
3.2. Teoremas de trazas	37

4. Aplicaciones a las EDPs	43
5. El método de elementos finitos	51
5.1. Generalidades	51
5.2. Construcción del espacio de Elementos Finitos	53
5.3. Resolución numérica empleando FreeFem++	54
5.3.1. Resolución del problema de Dirichlet	54
5.3.2. Resolución numérica del problema Neumann	58
A. Códigos FreeFem desarrollados	59
A.1. Resolución numérica del problema Dirichlet	59
A.2. Resolución numérica del problema Neumann	63
Bibliografía	67

Resumen

El presente escrito estará dedicado al estudio de los Espacios de Sobolev $W^{m,p}$, desarrollados inicialmente por el matemático homónimo. Estos espacios explicitan con claridad la relación intrínseca entre la derivación y la integración, pero los resultados que aquí se presentan se escapan de las nociones clásicas. Así pues, es necesario introducir el concepto de distribución, lo que permitirá hablar de derivada débil de una función. Posteriormente, una vez establecido el contexto de trabajo, se analizará cuál es la relación existente entre los espacios $W^{m,p}$ en dependencia de las características del dominio de definición de las funciones del conjunto. Finalmente, en el ámbito de aplicaciones, se verá cómo llevar a la práctica todas las nociones teóricas que se traten, con el fin de resolver numéricamente los problema de Dirichlet y Neumann, que son casos particulares de Ecuaciones en Derivadas Parciales de tipo elíptico. Con este fin, se empleará el Método de Elementos Finitos.

Abstract

The present paper will be dedicated to the study of Sobolev spaces $W^{m,p}$, initially developed by the mathematician with the same name. These spaces explicitly state the intrinsic relation between derivation and integration, but the results presented here escape from classical notions. Therefore, it is necessary to introduce the concept of distribution, which will let us talk about the weak derivative of a function. Subsequently, once it has been established the working context, the relationship among $W^{m,p}$ spaces will be analyzed, depending on the features of the domain of definition of the functions in the set. Finally, in the field of applications, it will be shown how to put into practice all the theoretical notions that will be developed, in order to solve numerically the Dirichlet and Neumann problems, which are particular cases of Partial Differential Equations of elliptic type. For this purpose, it will be used the Finite Element Method.

Introducción

El área del *Análisis Matemático* ha contado con varios de los mejores matemáticos de los últimos tres siglos. Así pues, nombres como Laurent Schwartz, Stefan Banach o David Hilbert son recurrentes en la literatura. El primero de ellos, ganó reputación por ser considerado el principal artífice del desarrollo de la *Teoría de Distribuciones*. Sin embargo, no ha sido el único. Es más, Serguéi Sobolev ha bebido de esta teoría con frecuencia, y sus descubrimientos a raíz de ella siguen vigentes a día de hoy.

La motivación de este trabajo es, pues, facilitar una aproximación al lector a los conceptos básicos que desarrollaron los autores previamente mencionados, sin olvidar posibles aplicaciones prácticas de los mismos. Primeramente, a modo de introducción, es conveniente que el lector se familiarice con las nociones de *espacio de Banach* y *espacio de Hilbert*, en honor a sus descubridores. Estos son la base de lo que se conoce como *Análisis Funcional*. Así pues, se escribirá su definición, y se enunciarán diversos resultados que se utilizarán eventualmente conforme se avance en la lectura del texto. También se incluyen los *espacios L^p* , que tendrán un papel fundamental para la construcción de los *espacios de Sobolev*, así como dos *medidas* que resultarán particularmente útiles.

Posteriormente, el lector se introducirá en la *Teoría de Distribuciones*. En este punto, el lector podrá recapacitar acerca de lo que se conoce por *derivada* de una *distribución*. Más aún, jugará un papel fundamental lo que se conoce como *dualidad*. Todo lo anterior servirá de vehículo para introducir los *espacios de Sobolev $W^{m,p}$* . El lector podrá ver su definición, y por tanto su condición de subespacio de L^p . Adicionalmente, se observará la íntima relación que guardan tanto con los espacios de Banach, como con sí mismos en función de los parámetros m y p . Este último hecho se analizará en la sección de *embebimientos*. Se cerrará este bloque con los denominados *Teoremas de trazas*, que evidencian la íntima relación existente entre el dominio de una función y su frontera.

El segundo bloque se desarrolla como continuación del primero. Más aún, la teoría anterior servirá de apoyo para la resolución numérica de *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. En esta línea, el lector podrá revisar el conocido como *Lema de Lax-Milgram*. Además, se encontrará con

el concepto de *ecuaciones de tipo elíptico* y podrá ver ejemplos de problemas con condiciones de contorno de tipo *Dirichlet* y de tipo *Neumann*. Finalmente, se resolverán numéricamente estos últimos, empleando el *Método de Elementos Finitos*, con la ayuda de software informático.

Capítulo 1

Preliminares

Para dar comienzo a este escrito, se dedicará un capítulo a la introducción de conceptos y resultados que cimentarán las bases para los desarrollos teóricos que se llevarán a cabo en lo sucesivo. Así pues, se seguirán las referencias [2], [4] y [9].

1.1. Preliminares de análisis funcional

En esta sección se definirán los *espacios de Banach* y *espacios de Hilbert*, y se hará una breve descripción de su comportamiento. En los capítulos posteriores se trabajará con espacios de estas características, y se tomará $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ como cuerpo base en todo caso. Sin embargo, los resultados que aquí se expondrán son igualmente válidos si se trabajara con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1.1. Espacios de Banach

Sea X un conjunto arbitrario.

Definición 1.1 (Distancia). Se dice que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *distancia* sobre X si verifica las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, con $x, y \in X$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para cualesquiera $x, y \in X$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

Si el conjunto X admite una distancia d , se dirá que el par (X, d) es un *espacio métrico*.

Definición 1.2 (Sucesión convergente y sucesión de Cauchy). Sea X un espacio métrico. Una sucesión de elementos $x_n \in X$ se dice

1. *de Cauchy* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

2. *convergente* a $x_0 \in X$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Definición 1.3 (Espacio métrico completo). Se dice que (X, d) es *completo* si toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ de Cauchy es convergente.

Supóngase ahora que X es un $(\mathbb{R})$ -espacio vectorial.

Definición 1.4 (Seminorma y norma). Se dice que una aplicación $p : X \rightarrow [0, \infty]$ es una *seminorma* si verifica

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$,
2. $p(tx) = |t|p(x)$, para todo $x \in X$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Si además p verifica que $p(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, entonces se dirá que p es una *norma*, y se denotará $\|\cdot\| \equiv p(\cdot)$.

Si el espacio X admite una norma $\|\cdot\|$, se dirá que el par $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*. Además, toda norma $\|\cdot\|$ induce una distancia d , sin más que considerar $d(x, y) = \|x - y\|$, para cualesquiera $x, y \in X$.

Definición 1.5 (Espacio de Banach). Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice *de Banach* si es completo respecto de la distancia d inducida por su norma. Abusando de notación, cuando no exista ambigüedad, se identificará el espacio X con el par $(X, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 1.6. Se tiene que:

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach, donde $|\cdot|$ denota la función valor absoluto.
- Dados $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado, e $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, el conjunto

$$\mathcal{C}_B^0(X, Y) = \{u : X \rightarrow Y : u \text{ es continua y } \|u\|_\infty < \infty\}, \quad (1.1)$$

donde $\|u\|_\infty = \sup_{x \in X} \|u(x)\|_Y$, es un espacio de Banach.

Definición 1.7 (Embebimiento). Dados dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, se dice que el espacio X está *embebido* en el espacio Y , y se denotará $X \hookrightarrow Y$, si X es un subespacio de Y y existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq K\|x\|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

Definición 1.8 (Operador lineal acotado). Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre ellos. Se dice que T es *acotado* si para todo $B \subset X$ acotado en la métrica inducida por $\|\cdot\|_X$ se tiene que $T(B)$ es acotado en la métrica inducida por $\|\cdot\|_Y$.

Definición 1.9 (Norma de un operador lineal). Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios (vectoriales) normados y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre ellos. Se define la *norma* de T como el valor

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in [0, \infty].$$

La siguiente Proposición está basada en [4, Página 68, Proposition 2.1], y será de utilidad en capítulos posteriores:

Proposición 1.10. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre ellos. Equivalen:

1. T es continuo.
2. Existe $c > 0$ de modo que $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Más aún, en las condiciones anteriores se tiene que

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X, \text{ para todo } x \in X\} < \infty.$$

Definición 1.11 (Espacio topológico dual). Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado. Se define el *espacio dual* de X como

$$X' = \{T : X \longrightarrow \mathbb{R} : T \text{ es lineal y continua}\}. \quad (1.2)$$

Es evidente, en vista de la Proposición 1.10, que $\|T\| < \infty$, para todo $T \in X'$.

1.1.2. Espacios de Hilbert

Sea H un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Definición 1.12 (Producto escalar). Se dice que una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es un *producto escalar* si para todo $x, y, z \in H$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes tres propiedades:

1. Propiedad de *bilinealidad*:

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle; \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle.\end{aligned}$$

2. Propiedad de *definición*:

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \text{ si y solo si } x = 0.$$

3. Propiedad de *simetría*:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

El Teorema que se presenta a continuación aporta una desigualdad de gran aplicación en demostraciones que se realizarán con posterioridad. Su demostración se puede ver en [4, Página 3, 1.4]:

Teorema 1.13 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz). *Dados H un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en H , se verifica que*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

para cualesquiera $x, y \in H$.

Corolario 1.14. *Dados H un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en H , se tiene que la función $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ definida en H , es una norma.*

Definición 1.15 (Espacio de Hilbert). Sea H un espacio vectorial, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en H . Se dice que el par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio de Hilbert* si es un espacio de Banach (véase la Definición 1.5) con la norma $\| \cdot \|$ inducida por el producto escalar. Para simplificar la notación, de no existir ambigüedad, se identificará el espacio H con el par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Un resultado central de la teoría asociada a este tipo de espacios es el Teorema de Representación de Riesz, cuya demostración se encuentra en [4, Página 13, Theorem 3.4]:

Teorema 1.16 (Teorema de Representación de Riesz). *Sean H un espacio de Hilbert, y $\mathcal{L} : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo (luego $\|\mathcal{L}\| < \infty$). Bajo tales condiciones, existe un único elemento $h \in H$ que verifica*

$$\mathcal{L}(f) = \langle f, h \rangle, \text{ para todo } f \in H.$$

Además, se tiene que $\|\mathcal{L}\| = \|h\|$.

Los espacios de Hilbert son particularmente útiles porque su producto escalar permite desarrollar el concepto de *ortogonalidad*:

Definición 1.17. Sea H un espacio de Hilbert. Sean $f, g \in H$ dos elementos cualesquiera, y sean $U, V \subset H$ dos subconjuntos. Se dice que:

1. f es *ortogonal* a g , y se denota $f \perp g$, si $\langle f, g \rangle = 0$.
2. A es *ortogonal* a B , y se denota $A \perp B$ si $\langle f, g \rangle = 0$, para cualesquiera $f \in A, g \in B$.

Definición 1.18 (Conjunto ortogonal). Sea H un espacio de Hilbert. Dado $M \subset H$ un subconjunto, se define su *conjunto ortogonal* como:

$$M^\perp = \{h \in H : h \perp f, \text{ para todo } f \in M\}.$$

Observación 1.19. Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subconjunto arbitrario. Es evidente que $M \cap M^\perp = \{0\}$, pues si $f \in M \cap M^\perp$, entonces $\langle f, f \rangle = 0$, para todo $f \in M$. En particular, $\langle f, f \rangle = 0$, de donde $f = 0$ por la propiedad de definición del producto escalar.

Observación 1.20. Dados H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subconjunto, se tiene que $M^\perp$ es un subespacio cerrado de H . Este hecho se demuestra en [11, Página 79, 4.9].

Se presentan ahora dos resultados auxiliares, extraídos de [4, Página 10, Corollary 2.9] y [4, Página 10, Corollary 2.10] respectivamente:

Proposición 1.21. Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado. En tal caso, se sigue que $M^{\perp\perp} \equiv (M^\perp)^\perp = M$.

Proposición 1.22. Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subconjunto arbitrario. Si se denota por $\langle M \rangle$ al subespacio vectorial generado por M , esto es,

$$\langle M \rangle = \left\{ h \in H : h = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i, \text{ con } \beta_i \in \mathbb{R}, f_i \in M; n \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq i \leq n \right\},$$

entonces $M^{\perp\perp} = \text{Cl}(\langle M \rangle)$.

Se introduce ahora un Teorema que es consecuencia directa de haber dotado al espacio vectorial H de un producto escalar. Su demostración se sigue de dos resultados, que se encuentran en [4, Página 8, Theorem 2.5] y [4, Página 9, Theorem 2.6] respectivamente:

Teorema 1.23. Sea H un espacio de Hilbert. Sean además K un subespacio cerrado, convexo y no vacío de H , y $h \in H$ arbitrario. En tal caso, existe un único elemento $f_0 \in K$ verificando

$$\|h - f_0\| = d(h, K) = \inf_{k \in K} \|h - k\|,$$

donde d denota la distancia inducida por el producto escalar de H .

Más aún, si K es un subespacio vectorial cerrado de H , entonces $h - f_0 \in K^\perp$. Además, f_0 es el único elemento que cumple esta última condición.

Con los resultados anteriores, se demuestra ahora que todo espacio de Hilbert puede descomponerse como suma directa de dos espacios ortogonales entre sí:

Proposición 1.24. *Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subconjunto arbitrario. Se tiene que $H = M^\perp \oplus M^{\perp\perp}$.*

Demostración. En primer lugar, se verifica que $H = M^\perp + M^{\perp\perp}$. Ciertamente, por la Observación 1.20, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de H . Por consiguiente, en virtud del Teorema 1.23, se tiene que para $h \in H$ un elemento arbitrario, existe $f_0 \in M^\perp$ de modo que $h - f_0 \in M^{\perp\perp}$. Ahora, se sigue $h = f_0 + (h - f_0) \in M^\perp + M^{\perp\perp}$, tal y como se quería demostrar. Por otra parte, es evidente que $M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \emptyset$, lo que prueba que la suma anterior es directa, y por tanto el enunciado. $\square$

1.2. Preliminares de Teoría de la Medida

En esta sección se recuerdan algunos resultados fundamentales acerca de los *espacios L^p* , los cuales serán aludidos con asiduidad a lo largo de este texto. Se asumirá que el lector es conocedor de los conceptos de *σ -álgebra*, *medida* y *espacio de medida*, así como de la construcción de la *integral de Lebesgue* y sus propiedades, pues estos se desarrollan con profundidad en asignaturas del Grado (pueden revisarse dichos conceptos en la referencia clásica [2]). Por otra parte, se tratará la temática de *generación de medidas*, aportando así una base teórica a las diversas aplicaciones dadas a las medidas que se introducirán con posterioridad. En lo sucesivo (X, Σ, μ) , denotará un espacio de medida arbitrario, siendo $(\mathbb{R}^N, \Sigma, \mathcal{L}^N)$ el caso particular del espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ (véanse los capítulos 12 y 13 de [2]).

1.2.1. Los espacios $L^p(X, \Sigma, \mu)$

Definición 1.25 (Funciones equivalentes). Sean $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles. Se dirá que f y g son *equivalentes*, y se denotará por $f \sim g$, si existe $E \in \Sigma$ un conjunto medible tal que $\mu(E^c) = 0$, y $f(x) = g(x)$ para cualquier $x \in E$.

Definición 1.26 (Clase de equivalencia de una función). Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. La relación $\sim$ anterior induce la clase de equivalencia:

$$[f] = \{g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : g \text{ es medible y } g \sim f\}.$$

Definición 1.27 (El espacio L^p , con $1 \leq p < \infty$). Para cada $1 \leq p < \infty$, se define $L^p(X, \Sigma, \mu)$ como el espacio vectorial que tiene por elementos todas las clases de equivalencia de funciones

medibles $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tales que $|f|^p \in \mathcal{L}(X)$. Se dota ahora al espacio $L^p(X, \Sigma, \mu)$ de la norma:

$$\|[f]\|_{L^p} \equiv \|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Observación 1.28. La norma anterior no depende del representante de la clase de equivalencia escogido, por ello se identifica $\|[f]\|_{L^p(X, \Sigma, \mu)}$ con $\|f\|_{L^p(X, \Sigma, \mu)}$. Además, si $p = 1$, se tiene que $L^1(X, \Sigma, \mu) = \frac{\mathcal{L}(X)}{\sim}$.

Recordando ahora la Definición 1.5, se tiene el siguiente resultado, que se demuestra en [2, Theorem 6.14]:

Teorema 1.29 (Complejitud de los espacios L^p con $1 \leq p < \infty$). *Sea $1 \leq p < \infty$. Se tiene que $(L^p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_{L^p(X, \Sigma, \mu)})$ es un espacio de Banach.*

Definición 1.30 (El espacio L^∞). Sean $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y $N \in \Sigma$ un conjunto medible tal que $\mu(N) = 0$. Tómesese para tal N la cantidad

$$S(N) = \sup_{x \notin N} |f(x)|.$$

Se denota por *supremo esencial* de f a la cantidad

$$\inf_{N \in \Sigma, \mu(N)=0} S(N) \in [0, \infty]. \quad (1.3)$$

Así pues, se define $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ como el espacio vectorial cuyos elementos son todas las clases de equivalencia de funciones medibles $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tales que el valor dado en 1.3, que se escribirá $\|f\|_{L^\infty(X, \Sigma, \mu)}$, es finito. Suele referirse a los elementos de este espacio como *funciones esencialmente acotadas*.

Se enuncia a continuación un resultado de completitud para $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, cuya demostración se puede leer en [2, Theorem 6.16]:

Teorema 1.31 (Complejitud del espacio L^∞). *Se tiene que $\|\cdot\|_{L^\infty(X, \Sigma, \mu)}$ es una norma en $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ con la cual $(L^\infty(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_{L^\infty(X, \Sigma, \mu)})$ es un espacio de Banach.*

Se enuncia ahora la conocida como *desigualdad de Hölder*. Se demuestra su validez en [2, Página 56, 6.9]:

Proposición 1.32 (Desigualdad de Hölder). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $1 < p < \infty$. Tómesese $p' = \frac{p}{p-1}$ el exponente conjugado de Hölder. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles con valores en la recta real ampliada, de modo que $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ y $g \in L^{p'}(X, \Sigma, \mu)$. En tal caso, su producto verifica $fg \in L^1(X, \Sigma, \mu)$, y además*

$$\|fg\|_{L^1(X, \Sigma, \mu)} \leq \|f\|_{L^p(X, \Sigma, \mu)} \|g\|_{L^{p'}(X, \Sigma, \mu)}.$$

1.2.2. Generación de medidas, los teoremas de Carathéodory y Hahn

Definición 1.33 (Álgebra). Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra* en X si verifica que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. Dado cualquier $E \in \mathcal{A}$, se tiene que $E^c \in \mathcal{A}$.
3. Para cualquier subconjunto finito $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$.

Definición 1.34 (Medida). Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ un álgebra en X , y $\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función con valores en la recta real ampliada. Se dice que μ es una *medida* en $\mathcal{A}$ si verifica que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $0 \leq \mu(E) \leq \infty$, para cualquier elemento $E \in \mathcal{A}$.
3. Para una familia numerable de elementos de $\mathcal{A}$, $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (1.4)$$

Definición 1.35 (Medida exterior). Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ un álgebra en X , $\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida en $\mathcal{A}$ y $B \subset X$ un subconjunto cualquiera de X . Se define:

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) : B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n; E_n \in \mathcal{A}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\},$$

En este caso, se denomina *medida exterior* a la función μ^* .

Véase la siguiente Proposición, que se demuestra en [2, Lemma 9.5]:

Proposición 1.36. Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ un álgebra en X , $\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida en $\mathcal{A}$. Se tiene que la medida exterior μ^* cumple las condiciones dadas en la Definición 1.34, sustituyendo la propiedad (1.4) por

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

y siendo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable arbitraria de elementos de $\mathcal{P}(X)$.

Definición 1.37 (Conjunto μ^* -medible). En las condiciones expuestas a lo largo de esta sección, sean μ^* la medida exterior generada por μ , y $E \subset X$ un subconjunto arbitrario. Se dice que E es μ^* -medible si se tiene que

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c), \quad \text{para todo } M \subset X.$$

Con la notación habitual, sea $\mathcal{A}^*$ la familia de conjuntos μ^* -medibles. Véase ahora el siguiente Teorema, el cual se extrajo de [2, Theorem 9.7]:

Teorema 1.38 (Teorema de Extensión de Carathéodory). *Se tiene que $\mathcal{A}^*$ es una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{A}$. Más aún, si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces:*

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

luego μ^* es una medida en $\mathcal{A}^*$.

Puede profundizarse en dicha cuestión, imponiendo condiciones más restrictivas a la medida μ . Así pues, véase [2, Theorem 9.8]:

Teorema 1.39 (Teorema de Extensión de Hahn). *Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ un álgebra en X , y supóngase definida en $\mathcal{A}$ una medida σ -finita μ . De este modo, la extensión de μ a una medida en la σ -álgebra $\mathcal{A}^*$ es única.*

1.2.3. Ejemplos de espacios de medida

Por una parte, se introducirá la *medida de Hausdorff*. Si se denota por d a la métrica inducida por la norma usual en $\mathbb{R}^N$, se define el valor $\mathcal{H}_\delta^s$ como sigue (véase [9, Página 699, C.7]):

Definición 1.40 ($\mathcal{H}_\delta^s$). Sean $0 < \delta \leq \infty$ y $s \in \mathbb{N}_0$. Para $E \subset \mathbb{R}^N$ y $c_s > 0$, se define:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_s (\text{diam } E_n)^s : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \text{diam } E_n < \delta \right\},$$

Por cómo se ha definido 1.40, es evidente que aumentando el valor de δ se consigue una reducción en el valor de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$. Es más, tal y como se argumenta en [9, Página 699, C.7], para $E \subset \mathbb{R}^N$ fijado, se tiene que la aplicación

$$\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

es monótona decreciente, luego ha de existir $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E)$.

Definición 1.41 ($\mathcal{H}_0^s$). Se llama *medida exterior de Hausdorff s -dimensional*, y se denota $\mathcal{H}_0^s$, al límite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Más aún, siguiendo [9, Proposition C.45], $\mathcal{H}_0^s$ es una medida exterior, para cada $0 \leq s < \infty$, y su restricción a la σ -álgebra de conjuntos $\mathcal{H}_0^s$ -medibles es una medida completa, en virtud del Teorema 1.38.

Definición 1.42 ($\mathcal{H}^s$). La restricción de $\mathcal{H}_0^s$ a la σ -álgebra de conjuntos $\mathcal{H}_0^s$ -medibles se denomina *medida de Hausdorff s -dimensional*, y se escribe $\mathcal{H}^s$.

Sin embargo, el espacio de medida que se empleará habitualmente es el *espacio de medida de Lebesgue*. Puede verse en [9, Appendix C.1] la construcción de la *medida exterior de Lebesgue*, tras lo que se aplica de nuevo el Teorema 1.38.

De todos modos, son de particular interés algunas de sus propiedades. Tal y como se discute en [9, Páginas 681-682, C.1], $\mathcal{L}^N$ es una medida σ -finita, y todo subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es Lebesgue-medible. Dado que todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado y acotado en la topología usual, se sigue que $\mathcal{L}^N(K) < \infty$. Así pues, tiene sentido desarrollar el concepto de *integrabilidad local*:

Definición 1.43 (El espacio $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N, \Sigma, \mathcal{L}^N)$, con $1 \leq p \leq \infty$). Se define $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N, \Sigma, \mathcal{L}^N)$ como el espacio de funciones $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ medibles tales que $u \in L^p(\mathbb{R}^N, \Sigma, \mathcal{L}^N)$, para todo conjunto compacto $K \subset X$.

Se tiene, en virtud de [8, Théorème 1], el siguiente resultado

Proposición 1.44. *El espacio $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ es completo, para cada $1 \leq p \leq \infty$.*

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, cuando no exista ambigüedad, se denotará el espacio $L^p(\Omega, \Sigma|_{\Omega}, \mathcal{L}_{|\Omega}^N)$ por $L^p(\Omega)$.

Observación 1.45. Dado que $\mathcal{L}^N(K) < \infty$, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, por la desigualdad de Hölder, se sigue que $L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Capítulo 2

Teoría de distribuciones

A lo largo de este capítulo se realizará una breve introducción a la *Teoría de distribuciones*, mediante la aportación de diferentes definiciones y resultados, con el fin de establecer una base para el estudio de los *Espacios de Sobolev*, que se tratarán posteriormente en este documento. El esquema básico de este capítulo se basa en la referencia [9]. Asimismo, se presentarán definiciones y resultados auxiliares presentes en [1] y [13]. Un detalle importante a mencionar es el hecho de que el modo de introducción del *Espacio de distribuciones* admite caminos alternativos, y es por ello que se cita el libro [4]. Sin embargo, la construcción proporcionada por esta última referencia no es indispensable para la consecución del capítulo que se inicia a continuación.

2.1. Generalidades

Considérense $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto del espacio euclídeo n -dimensional real, y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ un elemento del mismo.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ un multiíndice, esto es, un vector tal que $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, para cada $1 \leq i \leq N$. Se define, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, el operador derivada α -ésima como

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad \text{con } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N.$$

Siguiendo la notación de [9], se entenderá por $\mathcal{C}^0(\Omega)$ el espacio vectorial de aplicaciones continuas $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y, dado $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ constituirá el espacio vectorial de funciones derivables con continuidad hasta orden m , esto es, el conjunto de aplicaciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que existe $\frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq |\alpha| \leq m$, y $\frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Cobra ahora sentido la introducción del espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$:

Definición 2.1 (El espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$). Se denotará por $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ al conjunto de aplicaciones $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables con continuidad para cualquier multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0$, esto es,

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\Omega).$$

Observación 2.2. Para facilitar la lectura se denotará el operador derivada por ∂^α , esto es, dado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$,

$$\partial^\alpha : \phi \in \mathcal{C}^N(\Omega) \rightarrow \partial^\alpha(\phi) \in \mathcal{C}^0(\Omega),$$

siendo:

$$\partial^\alpha(\phi)(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Se dará ahora una definición fundamental para construir el espacio de distribuciones:

Definición 2.3 (Soporte de una aplicación). Se define el soporte de ϕ , y se denotará por $\text{supp}(\phi)$, como la clausura lineal del conjunto $\{\mathbf{x} \in \Omega : \phi(\mathbf{x}) \neq 0\}$:

$$\text{supp}(\phi) = \text{Cl}(\{\mathbf{x} \in \Omega : \phi(\mathbf{x}) \neq 0\}),$$

donde Cl denota la clausura lineal.

Ejemplo 2.4. Considérese la función exponencial real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Es bien sabido que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $\text{supp}(f) = \text{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Recuérdese que un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Por lo tanto, como la adherencia de un conjunto es cerrada por definición, sería de interés estudiar aquellas funciones cuyo soporte fuese acotado (y por tanto compacto). Sea entonces $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto de Ω , y se denota $K \Subset \Omega$. Cobra sentido la siguiente definición:

Definición 2.5 (Espacio $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$). El espacio $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ está constituido por todas las funciones $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ cuyo soporte está contenido en K :

$$\mathcal{C}_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset K\}.$$

Como pequeña ilustración, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6. Considérese la función definida a trozos

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2-1}\right), & \text{si } \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1, \\ 0, & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq 1 \end{cases},$$

siendo $\Omega = \mathbb{R}^N$. De la no negatividad estricta de la aplicación exponencial, se sigue que $\text{supp}(\phi) \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$, que es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, por el Teorema de Heine-Borel. Además, ϕ es infinitamente derivable en Ω con continuidad.

Para el caso $N = 1$, la función ϕ tomaría la expresión

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

con soporte en $[-1, 1]$. Ahora bien, nótese que para $x \in (-1, 1)$, la expresión de ϕ es infinitamente derivable en el sentido usual, por ser composición de funciones pertenecientes al espacio $\mathcal{C}^\infty((-1-1))$ y $(-1, 1) \in \tau_u$. Además, se tiene que en dicho intervalo,

$$\phi^{(n+1)}(x) = \frac{p_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \phi(x),$$

donde p_n es un polinomio de grado $3n-2$. En efecto, puede verse que:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \phi(x),$$

donde $p_1(x) = -2x$, que es de grado $3 \cdot 1 - 2 = 1$. Calculando la segunda derivada, se sigue

$$\phi''(x) = \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4} \phi(x),$$

y $p_2(x) = 6x^4 - 2$ es de grado $3 \cdot 2 - 2 = 4$.

Procediendo por inducción, supóngase cierto para algún $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \phi^{(n+1)}(x) &= \frac{p'_n(x)(x^2-1)^{2n} - 4nxp_n(x)(x^2-1)^{2n-1}}{(x^2-1)^{4n}} \phi(x) - \phi'(x) \frac{p_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \\ &= \frac{\phi(x)}{(x^2-1)^{2(n+1)}} p_{n+1}(x), \end{aligned}$$

donde $p_{n+1}(x) = p'_n(x)(x^2-1)^2 - (4nx(x^2-1) - 2x)p_n(x)$. Véase que el primer sumando tendrá grado $(3n-3)+4 = 3n+1 = 3(n+1)-2$, igual que el segundo, pues $1+2+(3n-2) = 3(n+1)-2$.

Como $\phi^{(n+1)}(x) = 0$ para $x > 1$, calculando la derivada en los puntos $x = \{-1, 1\}$ por la definición usual y sin más que utilizando la regla de l'Hôpital de forma iterativa y de nuevo el procedimiento de inducción, se tendrá que

$$\phi^{(n+1)}(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\phi(-1+h)p_n(-1+h)}{((-1+h)^2-1)^{2n}}}{h} = 0,$$

demostrando así que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Visto el ejemplo anterior, permitiendo libertad en la elección del subconjunto compacto $K \Subset \Omega$, es pertinente la siguiente definición:

Definición 2.7 (El espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$). El espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es el conjunto de todas las aplicaciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tales que $\text{supp}(\phi)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Es evidente que el espacio $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, para todo $K \Subset \Omega$.

2.2. Los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$

La tarea siguiente es dotar a los espacios anteriores de una topología. Así pues, para cada $j \in \mathbb{N}_0^N$, se define la seminorma $\|\cdot\|_{K,j}$ como:

$$\|\phi\|_{K,j} = \sup\{|\partial^\alpha(\phi)(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \text{ con } |\alpha| \leq j\}, \quad (2.1)$$

para cada $\phi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$.

Se enunciará ahora el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse detalladamente en [9, Theorem A.27], que caracteriza una base de topología a partir de la construcción de una familia de seminormas. Con este objeto, se introducen además los conceptos de *conjunto absorbente* y *conjunto equilibrado*.

Definición 2.8 (Conjunto absorbente). Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ se dice *absorbente* si para todo $\mathbf{x} \in E$, existe un $t \in \mathbb{R}^+$ de forma que $s\mathbf{x} \in E$, para cualquier elección de $0 \leq s \leq t$.

Definición 2.9 (Conjunto equilibrado). Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ se dice *equilibrado* si para cualesquiera $\mathbf{x} \in E$ y $t \in [-1, 1]$, se tiene que $t\mathbf{x} \in E$.

Teorema 2.10. Dada una familia de seminormas $\mathcal{P}$ en un espacio vectorial X , la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V(p, n) = \left\{ \mathbf{x} \in X : p(\mathbf{x}) < \frac{1}{n} \right\}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es una base local convexa y equilibrada de 0 para una topología τ , la cual convierte a X en un espacio vectorial topológico localmente convexo, y tal que cada p es continua respecto de τ .

Es relevante, siguiendo el teorema previo, introducir el espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$:

Definición 2.11 (El espacio $\mathcal{D}_K(\Omega)$). Se define $\mathcal{D}_K(\Omega)$ como el par $(\mathcal{C}_K^\infty(\Omega), \{\|\cdot\|_{K,j}\}_j)$.

El Teorema 2.10 permite afirmar que el par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es un espacio localmente convexo, y tal y como se argumenta en [9, Página 282], una base para la topología asociada τ_K estaría constituida por los conjuntos de la forma

$$V_{K,j,l} = \left\{ \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_{K,j} < \frac{1}{l} \right\}, \quad j \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}.$$

A partir de los espacios (vectoriales) topológicos $\mathcal{D}_K(\Omega)$, el objetivo es, ahora, dotar al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ de una topología de manera que, restringida a cada subconjunto $\mathcal{D}_K(\Omega)$ se obtenga, en efecto, la topología relativa al mismo. Simultáneamente, esta ha de ser compatible con la noción de convergencia uniforme de las funciones del espacio y cualesquiera de sus derivadas parciales. Se procederá como sigue:

Sea $\mathcal{B}_0$ la colección de todos los subconjuntos equilibrados y convexos $U \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que cumplen la condición

$$U \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \tau_K$$

para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$.

El siguiente teorema, además de argumentar el carácter no vacío del conjunto $\mathcal{B}_0$, proporciona una expresión explícita de una base de la topología que se busca. Puede hallarse su demostración en [9, Theorem 10.2].

Teorema 2.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. La familia*

$$\mathcal{B} = \{ \phi + V : \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), V \in \mathcal{B}_0 \}$$

es base de una topología Hausdorff localmente convexa τ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, convirtiéndolo en un espacio vectorial topológico, que será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Observación 2.13. Pese a que la demostración hace uso de las seminormas

$$\|\phi\|_j = \sup\{|\partial^\alpha \phi(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \text{ con } |\alpha| \leq j\}, \quad (2.2)$$

que generalizan las introducidas en (2.1), estas no generarían, *per se*, una topología completa, en el sentido de que existirían sucesiones de Cauchy no convergentes en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. A modo de ejemplo, para el caso particular $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, tómese una función $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\text{supp}(\phi) \subseteq [0, 1]$ y $\phi > 0$ en $(0, 1)$, y constrúyase la sucesión

$$\phi_n(x) = \phi(x-1) + \frac{1}{2}\phi(x-2) + \cdots + \frac{1}{n}\phi(x-n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, la sucesión $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, cuyo límite no es un elemento de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. En efecto, por cómo son los elementos de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, ϕ es de la forma

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función perteneciente al espacio $\mathcal{C}^\infty((0, 1))$ y tal que $\frac{d^r f}{dx^r}$ es acotada, para todo $r \geq 0$. Además, se tendrá que

$$\phi^n(x) = \begin{cases} f^n(x), & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Paralelamente, la topología τ generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ tiene como base local en el origen a los conjuntos de la forma $V_{j,l} = \{\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) : \|\Phi\|_j < \frac{1}{l}\}$, con $j \in \mathbb{N}_\infty$, $l \in \mathbb{N}$. Sean tales j y l fijados. Ha de encontrarse un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $\bar{n} \leq n < m$, se tenga que $\phi_m - \phi_n \in V_{j,l}$. Teniendo en cuenta la definición de $\|\cdot\|_j$ y el hecho de que $\|\phi\|_j < \infty$, se sigue que, para $x \in \mathbb{R}$ fijado,

$$\begin{aligned} \|\phi_m - \phi_n\|_j &= \sup \left\{ \left| \frac{d^r(\phi_m - \phi_n)}{dx^r}(x) \right|, x \in \mathbb{R}, r \leq j \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=n+1}^m \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{1}{i} \phi(x-i) \right) (x) \right|, x \in \mathbb{R}, r \leq j \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i} \frac{d^r \phi}{dx^r}(x-i) \right|, x \in \mathbb{R}, r \leq j \right\}, \end{aligned}$$

pero como $\frac{d^r \phi}{dx^r}(x) = 0$ si $x \notin (0, 1)$, existe a lo sumo un $n+1 \leq k \leq m$ tal que $\phi(x-k) \neq 0$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \|\phi_m - \phi_n\|_j &= \sup \left\{ \frac{1}{k} \left| \frac{d^r \phi}{dx^r}(x-k) \right|, x \in \mathbb{R}, r \leq j \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{1}{k} \left| \frac{d^r \phi}{dx^r}(x) \right|, x \in \mathbb{R}, r \leq j \right\} \\ &< \frac{1}{n} \|\phi\|_j, \end{aligned}$$

luego como x es arbitrario, basta tomar $\bar{n} = \lceil \frac{\|\phi\|_j}{l} \rceil^1$, para concluir que $\phi_m - \phi_n \in V_{j,l}$, y por tanto la sucesión $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Supóngase ahora que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ es el límite de dicha sucesión. Para ver que $\text{supp}(\psi)$ no es compacto, basta ver que no es acotado. Para ello, sea $x_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ arbitrario. Es evidente que:

$$\psi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \phi(x_0 - k) \right).$$

Tomando $n' = \lfloor x_0 \rfloor^2$, se tiene que $x_0 - n' \in (0, 1)$, luego como $\phi > 0$ en $(0, 1)$,

$$\psi(x_0) \geq \frac{1}{n'} \phi(x_0 - n') > 0.$$

Por consiguiente, $x_0 \in \text{supp}(\psi)$, y por tanto $\psi \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

¹Para cada $x \in \mathbb{R}$, se define $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} : x \leq n\}$.

²Para cada $x \in \mathbb{R}$, se define $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} : x \geq n\}$.

Se introduce ahora la relación entre la topología de los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$, y la topología relativa respecto de τ . Su demostración puede verse en [9, Theorem 10.5]:

Teorema 2.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se tiene que para todo $K \Subset \Omega$, la topología τ_K coincide con la topología relativa de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ como subconjunto de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Observación 2.15. Es conveniente remarcar que existen diversas maneras de introducir una topología en el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En el Teorema 2.12 se ha construido una topología a partir de una base. Sin embargo, el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ puede ser también considerado un *límite inductivo*. A continuación se detallará brevemente esta construcción:

Definición 2.16 (Sistema inductivo). Un *sistema inductivo*, tal y como se define en [4, Página 16, Definition 5.1], es un par $(\mathcal{X}, \{\mathcal{X}_i : i \in I\})$, donde $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial, y para cada $i \in I$, $\mathcal{X}_i$ es una variedad lineal sobre $\mathcal{X}$ que está dotada de una topología τ_i , de modo que el espacio topológico $(\mathcal{X}_i, \tau_i)$ es localmente convexo y:

1. El conjunto de índices I es dirigido, y $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_j$ siempre que $i \leq j$,
2. Se tiene que para $i \leq j$ y $U_j \in \tau_j$, $U_j \cap \mathcal{X}_i \in \tau_i$,
3. $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{X}_i$.

Finalmente, se sigue que $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \{\mathcal{D}_K(\Omega), K \Subset \Omega\})$ es un sistema inductivo y coincide con lo que en este escrito se ha denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, y su topología τ se denomina *topología límite inductivo*, de modo que $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \tau)$ es el límite inductivo de $\{\mathcal{D}_K(\Omega), K \Subset \Omega\}$.

El siguiente teorema es de gran importancia en la *Teoría de distribuciones*, pues además de demostrar la completitud del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, aporta una caracterización de la convergencia de sucesiones de funciones en dicho espacio, más manejable que la definición usual de convergencia en espacios vectoriales topológicos. Su demostración puede encontrarse en [9, Theorem 10.8]:

Teorema 2.17. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. En tal caso, el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo. Paralelamente, dada una sucesión de elementos del espacio, $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, esta convergerá a una función $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si y solo si se verifica:*

1. Existe $K \Subset \Omega$ tal que el soporte de cada ϕ_n está contenido en K .
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha \phi_n = \partial^\alpha \phi$ uniformemente en K , para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Para finalizar esta sección, se aporta un resultado genérico del *Análisis funcional*, adaptado al contexto de las distribuciones. Teniendo en cuenta la Definición 1.8, se enuncia el siguiente Teorema:

Teorema 2.18. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, y sea $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ un operador lineal. Son equivalentes:

1. T es continuo.
2. T es acotado.
3. Si $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con respecto a τ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\phi_n) = T(\phi).$$

4. La restricción de T a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es continua, para todo $K \Subset \Omega$.
5. Para todo $K \Subset \Omega$, existe un entero $j \in \mathbb{N}_0$ y una constante $c_K > 0$ tal que

$$|T(\phi)| \leq c_K \|\phi\|_{K,j}, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

La demostración del resultado anterior puede encontrarse en [9, Theorem 10.10].

2.3. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$

La condición de espacio vectorial (topológico) de $\mathcal{D}(\Omega)$ convierte en pertinente la consideración de su espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : T \text{ es lineal y continuo}\}$. Paralelamente, el resultado que dio fin a la sección anterior caracteriza los funcionales de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Más aún, en esta sección se verá que $\mathcal{D}'(\Omega)$ está dotado de la *topología débil**, esto es, una sucesión de elementos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge en el sentido de las distribuciones a un operador $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si se verifica que $T_n(\phi) \longrightarrow T(\phi)$, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejemplo 2.19. Un ejemplo de distribución es la *delta de Dirac*: Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se define la delta de Dirac con masa en $\mathbf{x}_0$ como el funcional lineal $\delta_{\mathbf{x}_0}$ tal que $\delta_{\mathbf{x}_0}(\phi) = \phi(\mathbf{x}_0)$, para cualquier $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La linealidad de $\delta_{\mathbf{x}_0}$ se sigue directamente de la linealidad de la suma de funciones. Por otra parte, se tiene que $\delta_{\mathbf{x}_0}$ es continua en virtud del Teorema 2.18, ya que trivialmente

$$|\delta_{\mathbf{x}_0}(\phi)| = |\phi(\mathbf{x}_0)| \leq \|\phi\|_{K,j},$$

para todo $K \Subset \Omega$, y cualesquiera $j \in \mathbb{N}_0$ y $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Observación 2.20. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ arbitrario. Se tiene que u induce la distribución:

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} \phi u \, d\mu, \quad \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En efecto T_u es una distribución en virtud de [1, 1.58]. Además, gracias a [1, Lemma 3.31], se tiene que dadas $u_1, u_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ con $u_1 \neq u_2$, entonces $T_{u_1} \neq T_{u_2}$.

La próxima definición introduce el concepto de derivación en el sentido de las distribuciones. Se verá que existen funciones que no son derivables en el sentido usual, pero sí en este contexto:

Definición 2.21 (Derivada α -ésima de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^N$, se define la *derivada* α -ésima de T como el operador

$$\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es importante remarcar que en [9, Remark 10.15] se demuestra que $\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \equiv \partial^\alpha T$ es también una distribución, utilizando la Definición 2.21 y el Teorema 2.18. Paralelamente, se dedicará el final de este capítulo a exponer qué se entiende porque una función $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sea la *derivada débil o distribucional* de u . De la observación 2.20 se llega a la siguiente definición:

Definición 2.22 (Derivada débil α -ésima de u). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ un multiíndice. Se dice que $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es la derivada débil α -ésima de u si

$$T_{v_\alpha}(\phi) = \int_{\Omega} \phi v_\alpha \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, d\mu = \partial^\alpha T_u(\phi), \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y se denota $\partial^\alpha u = v_\alpha$.

Ejemplo 2.23. Considérese $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ la función valor absoluto. Es conocido el hecho de que f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su derivada viene dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, f no es derivable en $x = 0$. Se verá ahora que f sí es derivable en el sentido de las distribuciones y su derivada es, precisamente, la extensión g_1 de g a todo el dominio $\mathbb{R}$, de modo que $g_1(0) = 0$. Nótese, a modo de observación, que el conjunto $\{0\}$ es de medida nula, luego la elección particular del valor $g_1(0)$ no es relevante. Así pues, dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se tiene que $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)|x| \, d\mu$, luego utilizado la técnica de integración por partes,

$$\begin{aligned} \frac{dT_f}{dx}(\phi) &= (-1)T_f(\phi') \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \phi' f \, d\mu \\ &= \int_{(-\infty, 0)} x \phi'(x) \, d\mu(x) - \int_{(0, \infty)} x \phi'(x) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 x \phi'(x) \, dx - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x \phi'(x) \, dx \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left([x\phi(x)]_M^0 - \int_M^0 \phi(x) \, dx \right) - \lim_{M \rightarrow \infty} \left([x\phi(x)]_0^M - \int_0^M \phi(x) \, dx \right) \\ &= - \int_{(-\infty, 0)} \phi \, d\mu + \int_{(0, \infty)} \phi \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi g \, d\mu = T_g(\phi). \end{aligned}$$

Como $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitrario, se sigue que $\frac{dT_f}{dx} = T_g$, como se quería demostrar.

Observación 2.24. En la demostración anterior se han intercambiado las integrales de Lebesgue $\int_{(-\infty,0)} x\phi'(x) d\mu(x)$ y $\int_{(0,\infty)} x\phi'(x) d\mu(x)$ por, respectivamente, las integrales de Riemann $\lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 x\phi'(x) dx$ y $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x\phi'(x) dx$, puesto que el integrando $x\phi'$ y su valor absoluto, para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, son impropriamente Riemann integrables, luego los valores de ambas integrales han de coincidir.

Para finalizar, recuérdese que al inicio de esta sección se anticipaba que el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ estaba dotado de la topología débil*. Este hecho se recoge en el siguiente teorema, el cual se puede estudiar con más detalle en [13, Théorème XIII]:

Teorema 2.25. *(Caracterización de la convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$)* Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales lineales de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se verifica que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si y solo si

$$T_n(\phi) \rightarrow T(\phi), \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se cierra el capítulo de distribuciones con una aplicación del Teorema anterior:

Ejemplo 2.26. Supóngase que $N = 1$ y $\Omega = \mathbb{R}$. Para $\mathbf{x}_0 = 0$, se busca aproximar la Delta de Dirac δ_0 (véase el Ejemplo 2.19) mediante una sucesión de distribuciones. En [12, Teorema 2.12] se demuestra que tomando la sucesión de funciones $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ verificando las tres condiciones siguientes,

- $g_n \geq 0$ en $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\int_{\mathbb{R}} g_n d\mu = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h g_n d\mu = 0$, donde $h(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{g_n} = \delta_0$ en el espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Capítulo 3

Espacios de Sobolev

En este capítulo se introducirán los *Espacios de Sobolev*, y se hará un estudio de sus propiedades. En primer lugar, se presentan propiedades generales de dichos espacios. Posteriormente, se detallará en qué espacios normados pueden ser *embebidos*, y qué significado tiene este concepto. Finalmente, se desarrollarán los *teoremas de trazas*, las cuales serán útiles más adelante. Los resultados más generales que se incluirán en este escrito se recogen en [1] y [9]. De todas formas, se han incluido resultados auxiliares procedentes de otras referencias, como [2], [3], [4], [5], [6] y [11].

3.1. Generalidades

A lo largo de esta sección, como ya se ha hecho en la anterior, Ω denotará un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, a cuya frontera se le impondrán ciertas condiciones de regularidad. Con este motivo, se introducen ahora diversos conceptos que se utilizarán con posterioridad en el texto:

Definición 3.1 (Movimiento rígido). Un *movimiento rígido* $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función afín tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + R(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, donde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ es un vector constante y R es una rotación, esto es, $R(\mathbf{y}_1) \cdot R(\mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2$, para todo $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^N$, y además $\det(M) > 0$, donde M es su matriz asociada. Se denota por $\cdot$ al producto escalar usual en $\mathbb{R}^N$.

Definición 3.2 (Función lipschitziana). Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *lipschitziana* si se verifica que el valor

$$\sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, \quad (3.1)$$

es finito. Se denotará el valor 3.1 como $\text{Lip } f$.

Definición 3.3 (Frontera lipschitziana y de clase $\mathcal{C}^m$). Dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se dice que su frontera $\partial\Omega$ es *lipschitziana* si para todo $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ existe un movimiento rígido $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, una función lipschitziana $f : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que, para $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, se tiene

$$T(\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r)) = \{\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, r) : y_N > f(\mathbf{y}')\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, se dice que $\partial\Omega$ es de *clase $\mathcal{C}^m$* , si la función f dada por la definición es de clase $\mathcal{C}^m$.

Recuérdese que en la Definición 2.22 se exponía el concepto de derivada débil (o distribucional) de una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Paralelamente, en vista de la Observación 1.45, es directo que $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^M)$, luego cobran sentido ahora las siguientes definiciones:

Definición 3.4 (Derivada débil α -ésima en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$). Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N \setminus \{0\}$ un multiíndice, $1 \leq p \leq \infty$, y una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^M)$, se dice que u admite *derivada débil en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$* o *derivada en el sentido de las distribuciones en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$* si existe una función $v_\alpha \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ verificando

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \phi \, d\mu$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Se denotará la función v_α como $\partial^\alpha u$ o $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$. Se tiene, pues, que $\partial^\alpha T_u = T_{v_\alpha}$.

La definición 3.4 induce de manera natural los espacios de Sobolev, que se construyen como sigue:

Definición 3.5 (*Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$*). Dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m, M \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, se define el *espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$* como el espacio de funciones $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ que admiten derivadas débiles $\partial^\alpha u$ en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ verificando $1 \leq |\alpha| \leq m$. Este espacio puede dotarse con la siguiente norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)} = \|u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)}. \quad (3.2)$$

Para facilitar la lectura, en el caso particular $M = 1$, se denotará simplemente por $W^{m,p}(\Omega)$ al espacio $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$. En lo sucesivo, salvo que se especifique, se trabajará en el caso $M = 1$. Sin embargo, los resultados que aquí se enuncien, pueden trasladarse de manera natural para el caso $2 \leq M < \infty$.

Observación 3.6. Existen normas equivalentes en $W^{m,p}(\Omega)$. Podría considerarse, en primer lugar, la norma dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (3.3)$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max\{\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} : 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \quad p = \infty, \quad (3.4)$$

donde se asume que $\partial^0 u = u$.

Por otra parte, si $\nabla^k u$ denota el vector de componentes $\partial^\alpha u$, con $|\alpha| = k$, puede considerarse la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^m \|\nabla^k u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^{M_k})},$$

siendo M_k el número de multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ tales que $|\alpha| = k$.

Existen diversas formas de introducir los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. En efecto, sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$ un número entero y $1 \leq p < \infty$. Se denotará por $\hat{\mathcal{C}}^{j,p}(\Omega)$ al subespacio de funciones de $\mathcal{C}^j(\Omega)$ cuya norma 3.2 es finita. Más aún, se tendrá que en este espacio, por cómo se define la norma, una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dirá *de Cauchy* si

$$\int_{\Omega} |D^\alpha u_k - D^\alpha u_l|^p d\mu \rightarrow 0, \quad \text{siempre que } k, l \rightarrow \infty, \quad 0 \leq |\alpha| \leq j.$$

Por otra parte, se denotará por $H^{j,p}(\Omega)$ a la completación de $\hat{\mathcal{C}}^{j,p}(\Omega)$ respecto de la norma 3.2, esto es, el menor conjunto de funciones (salvo isomorfismos) que contiene a $\hat{\mathcal{C}}^{j,p}(\Omega)$ y a los límites de todas las sucesiones de Cauchy del espacio. Se llega al siguiente teorema, que se demuestra en [6, Theorem 6.3]:

Teorema 3.7. *Se tiene que $W^{j,p}(\Omega) = H^{j,p}(\Omega)$.*

Observación 3.8. Analizando detenidamente la demostración de dicho teorema, puede observarse que $W^{j,p}(\Omega)$ está contenido en la completación del espacio $\mathcal{C}^{\infty,j,p}(\Omega)$, es decir, la completación del espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ cuya norma 3.2 es finita, y se denotará $\tilde{H}^{j,p}(\Omega)$. Es directo que $\mathcal{C}^{\infty,j,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{j,p}(\Omega)$, luego se tiene la cadena de inclusiones

$$\tilde{H}^{j,p}(\Omega) \subset H^{j,p}(\Omega) = W^{j,p}(\Omega) \subset \tilde{H}^{j,p}(\Omega),$$

de donde $W^{j,p}(\Omega) = \tilde{H}^{j,p}(\Omega)$, y por tanto todo elemento de $W^{j,p}(\Omega)$ puede verse como límite de una sucesión de funciones de $\tilde{H}^{j,p}(\Omega)$.

El siguiente teorema demuestra la completitud de los espacios $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$:

Teorema 3.9. Sean $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene que:

1. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
2. El espacio $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, d\mu + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v \, d\mu. \quad (3.5)$$

Demostración. Se realizará la demostración de cada uno de los puntos por separado:

1. Para demostrar el primer apartado, considérese una sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$. Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l, n \rightarrow \infty} \|u_l - u_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \\ &= \lim_{l, n \rightarrow \infty} \left(\|u_l - u_n\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u_l - \partial^{\alpha} u_n\|_{L^p(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Dado que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, han de existir funciones $u, v_{\alpha} \in L^p(\Omega)$ verificando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial^{\alpha} u_n - v_{\alpha}\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad (3.6)$$

para cada multiíndice α , con $1 \leq |\alpha| \leq m$. Fijado un índice α en tales condiciones, es suficiente ver que $\partial^{\alpha} u = v_{\alpha}$. En efecto, sea $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ fijado. Dado que $u_n \in W^{m,p}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\int_{\Omega} \phi \partial^{\alpha} u_n \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_n \partial^{\alpha} \phi \, d\mu.$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n \partial^{\alpha} \phi \, d\mu - \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \phi \, d\mu &= \int_{\Omega} (u_n - u) \partial^{\alpha} \phi \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |(u_n - u) \partial^{\alpha} \phi| \, d\mu \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \|\partial^{\alpha} \phi\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u_n \phi \, d\mu - \int_{\Omega} v_{\alpha} \phi \, d\mu &= \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} u_n - v_{\alpha}) \phi \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |(\partial^{\alpha} u_n - v_{\alpha}) \phi| \, d\mu \\ &\leq \|\partial^{\alpha} u_n - v_{\alpha}\|_{L^p(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando límites en n , y haciendo uso de 3.6, se deduce que

$$\int_{\Omega} \phi v_{\alpha} d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \phi d\mu,$$

para cada $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, demostrando así que $\partial^{\alpha} u = v_{\alpha}$, y por tanto $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

2. Por otra parte, para probar el segundo enunciado, basta ver que la norma 3.3, para el caso particular de $H^m(\Omega)$, viene inducida por el producto escalar 3.5. Así pues, nótese que

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)} &= \int_{\Omega} u u d\mu + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} u d\mu \\ &= \int_{\Omega} u^2 d\mu + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} u)^2 d\mu \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^m(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

utilizando el hecho de que $\|w\|_{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} w^2)^{\frac{1}{2}}$, para cualquier $w \in L^2(\Omega)$, probando así el resultado.

□

La cuestión que ahora se plantea es determinar qué tipo de funciones conforman $W^{m,p}(\Omega)$. Es evidente que, por cómo está definida la norma en dicho espacio, que $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, ya que dada $u \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, basta tomar $v_{\alpha} = \partial^{\alpha} u$ en la Definición 3.4. A modo de ilustración, tómesese $N = 1$ y considérese $u \in \mathcal{C}_c^{\infty}(a, b)$, se tendrá, dada una función $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(a, b)$ y $\alpha \in \mathbb{N}$, que:

$$\begin{aligned} \int_{(a,b)} \phi u^{(\alpha)} d\mu &= (-1)^1 \int_{(a,b)} \phi^{(1)} u^{(\alpha-1)} d\mu \\ &= (-1)^2 \int_{(a,b)} \phi^{(2)} u^{(\alpha-2)} d\mu \\ &\vdots \\ &= (-1)^{\alpha} \int_{(a,b)} \phi^{(\alpha)} u d\mu \end{aligned}$$

donde se ha empleado iterativamente el método de integración por partes.

Tiene ahora sentido la siguiente definición:

Definición 3.10 (El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$). Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, se define el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura del espacio $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, con respecto de la topología de este último, inducida por la norma 3.2.

Otra cuestión natural sería estudiar, para los espacios $W^{m,p}(\Omega)$, una posible analogía con los embebimientos de los espacios $L^p(\Omega)$. Recuérdese que para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de medida finita, y $1 \leq p \leq q \leq \infty$, se tiene que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (véase [1, Theorem 2.14]).

Previo a desarrollar la Teoría de embebimientos de los espacios $W^{m,p}(\Omega)$, es indispensable introducir una serie de definiciones y notaciones que fundamentarán todos los razonamientos que se llevarán a cabo con posterioridad. Una nota importante a hacer en este punto es que en todo momento se intentará establecer una simbiosis entre el carácter analítico de los Espacios de Sobolev y las características geométricas del dominio Ω de las funciones que componen dichos espacios. Consecuentemente, se definen los siguientes conceptos:

Definición 3.11 (Cono). Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ un vector n -dimensional. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, sea $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ el ángulo que forman dichos vectores. Dados $\rho > 0$ y $0 < \kappa \leq \pi$, se denotará por *cono finito* de altura ρ , dirección axial $\mathbf{y}$ y ángulo de apertura κ con vértice en el origen al conjunto:

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ o } 0 < |\mathbf{x}| \leq \rho, \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{\kappa}{2}\}.$$

Definición 3.12 (Condición del cono). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se dice que Ω cumple la *condición del cono* si existe un cono finito C tal que todo $\mathbf{x} \in \Omega$ es vértice de un cono finito $C_{\mathbf{x}}$ contenido en Ω y congruente con C , esto es, $C_{\mathbf{x}}$ existe $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una isometría (esto es, $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$) tal que $C_{\mathbf{x}} = T(C)$ y tiene a $\mathbf{x}$ como uno de sus vértices.

Definición 3.13 (Paralelepípedo). Sean $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N \in \mathbb{R}^N$ N vectores linealmente independientes (esto es, forman una base de $\mathbb{R}^N$). Se llama *paralelepípedo con uno de sus vértices en el origen* al conjunto

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{y}_j : \lambda_j \in [0, 1], 1 \leq j \leq N \right\}.$$

Además, se define el paralelepípedo $\mathbf{x} + P = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{y} \in P\}$ como el trasladado paralelo de P con uno de sus vértices en $\mathbf{x}$.

Es asimismo necesario introducir ciertos espacios de funciones, que se utilizarán en adelante con asiduidad. Así, recuérdese el conjunto definido en 1.1. Este admite una generalización, en el contexto actual, que se formula como sigue:

Definición 3.14 (El espacio $\mathcal{C}_B^j(\Omega)$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se denotará por $\mathcal{C}_B^j(\Omega)$ al subespacio de $\mathcal{C}^j(\Omega)$, constituido por los elementos $\phi \in \mathcal{C}^j(\Omega)$ tales que $D^\alpha \phi$ está acotada en Ω , para todo $0 \leq |\alpha| \leq j$. Este espacio está dotado de la norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}_B^j(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha \phi(\mathbf{x})|.$$

Definición 3.15 (El espacio $\mathcal{C}^j(\text{Cl}(\Omega))$). El espacio $\mathcal{C}^j(\text{Cl}(\Omega))$ se constituye por todas las funciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi \in \mathcal{C}_B^j(\Omega)$ (véase la Definición 3.14) y además $D^\alpha \phi$ es uniformemente continua, para todo $0 \leq |\alpha| \leq j$, esto es, $D^\alpha \phi$ admite una (única) extensión continua y acotada de Ω a $\text{Cl}(\Omega)$. Además, $\mathcal{C}^j(\text{Cl}(\Omega))$ puede dotarse de la norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^j(\text{Cl}(\Omega))} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha \phi(\mathbf{x})|,$$

coincidente con $\|\phi\|_{\mathcal{C}_B^j(\Omega)}$.

Continuando con los preparativos para el desarrollo de la teoría mencionada, es importante recuperar la desigualdad de Hölder (véase la Proposición 1.32), pues esta puede utilizarse para desarrollar una desigualdad más general, cuya demostración puede encontrarse en [1, Theorem 2.11]:

Teorema 3.16. Sean $1 \leq p < q < r \leq \infty$ tales que

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$$

para algún $\theta \in (0, 1)$. Ahora bien, si $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, entonces $u \in L^q(\Omega)$ y además

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Teorema 3.17 (Embebimientos de los espacios $W^{m,p}$, para $mp > N$ o $m = N$, $p = 1$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto verificando la condición 3.12. Sean $1 \leq k \leq N$ y Ω_k la intersección de Ω con un plano k -dimensional de $\mathbb{R}^N$, siendo $\Omega_n = \Omega$. Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ dos números enteros y $1 \leq p < \infty$. En las condiciones del enunciado, se tiene que

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_B^j(\Omega), \quad (3.7)$$

Además, se verifica que

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \quad \text{con } p \leq q \leq \infty.$$

La demostración de este resultado requiere del siguiente resultado auxiliar, cuya prueba se omite y que se puede ver en [1, Lemma 4.15]:

Lema 3.18. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto verificando la condición 3.12, para el cono C de dimensiones ρ y κ . En tal caso, existe una constante $K \equiv K(m, N, \rho, \kappa)$ tal que para todo $u \in C^\infty(\Omega)$, todo $\mathbf{x} \in \Omega$ y todo $0 < r \leq \rho$, se tiene

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \sum_{|\alpha| \leq m-1} r^{|\alpha|-N} \int_{C_{\mathbf{x},r}} |D^\alpha u(\mathbf{y})| d\mu(\mathbf{y}) + K \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_{\mathbf{x},r}} |D^\alpha u(\mathbf{y})| |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{m-N} d\mu(\mathbf{y}), \quad (3.8)$$

donde $C_{\mathbf{x},r} = \{\mathbf{y} \in C_{\mathbf{x}} : |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq r\}$, y $C_{\mathbf{x}}$ es el cono con vértice en $\mathbf{x}$ y congruente con C .

Prueba del teorema 3.17. En primer lugar se demostrará el caso $j = 0$, esto es, la existencia del embebimiento

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega).$$

Sean, pues, $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ y $\mathbf{x} \in \Omega$ arbitrario. Por cómo se ha definido embebimiento en la Definición 1.7, ha de hallarse una constante K tal que

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad (3.9)$$

pues en tal caso $\|u\|_{C_B^0} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})| \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, por definición de supremo.

En caso de que $p = 1$ y $m = N$, basta utilizar el Lema 3.18, pues

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \sum_{|\alpha| \leq N-1} r^{|\alpha|-N} \int_{C_{\mathbf{x},r}} |D^\alpha u(\mathbf{y})| d\mu(\mathbf{y}) + K \sum_{|\alpha|=N} \int_{C_{\mathbf{x},r}} |D^\alpha u(\mathbf{y})| d\mu(\mathbf{y}),$$

luego tomando $s = \max\{1, r^{-N}\}$, y definiendo $K' = sK$, dado que $D^\alpha u \in L^1(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq N$, se sigue que

$$|u(\mathbf{x})| \leq K' \|u\|_{W^{N,1}(\Omega)},$$

demostrando así el resultado.

Supóngase ahora que $p > 1$ y que $mp > N$. Se procede con la aplicación de la desigualdad de Hölder a la expresión 3.8 para el caso $r = \rho$, de donde se sigue

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &\leq K \sum_{|\alpha| \leq m-1} c^{\frac{1}{p'}} \rho^{|\alpha| - \frac{N}{p}} \|D^\alpha u\|_{L^p(C_{\mathbf{x},\rho})} \\ &\quad + K \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(C_{\mathbf{x},\rho})} \left[\int_{C_{\mathbf{x},r}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(m-N)p'} d\mu(\mathbf{y}) \right]^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

donde c es el volumen de $C_{x,1}$ y $p' = \frac{p}{p-1}$ el exponente conjugado de Hölder de p . Note el lector que es posible acotar el volumen $V(C_{x,\rho}) \leq K\rho^N V(C_{x,1})$, donde K es ahora una constante que haga válida la desigualdad. En tal caso, abusando de notación, $V(C_{x,\rho})^{1/p'} \leq K\rho^{N/p'} V(C_{x,1})^{1/p'}$. Ahora, agrupando las potencias de ρ , se tiene que $\rho^{|\alpha|-N+N/p'} = \rho^{|\alpha|-N(1-1/p')} = \rho^{|\alpha|-N/p}$.

Nótese además que la integral $I = \left[\int_{C_{\mathbf{x},r}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(m-N)p'} d\mu(\mathbf{y}) \right]^{\frac{1}{p'}} < \infty$. En efecto, se tiene que $(m-N)p' = (m-N)\frac{p}{p-1} = \frac{mp-Np}{p-1} > \frac{N-Np}{p-1} = \frac{N(1-p)}{p-1} = -N$. Nótese que el integrando es no negativo, luego el valor de I será menor o igual, por la monotonía de la integral de funciones no negativas respecto al conjunto de integración, al de considerar la integral sobre la bola $B(\mathbf{0}, r) \supset C_{\mathbf{x},r}$. Considerando ahora el cambio de variable $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ y abusando de notación, está justificado, en virtud del Teorema [3, Teorema página 387], efectuar el cálculo efectivo de

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^m} d\mu(\mathbf{x}) < \infty,$$

para todo $m < N$. Por una parte, haciendo uso de [5, Theorem 4, Appendix C.3] se tiene que, dada una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{B(0,r)} f(x) d\mu(\mathbf{x}) = \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,t)} f d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt.$$

En particular,

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^m} d\mu(\mathbf{x}) = \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,t)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^m} d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt,$$

Es evidente que $\|\mathbf{x}\| = t$, para cada $x \in \partial B(0, t)$, luego necesariamente

$$\begin{aligned} \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,t)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^m} d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt &= \int_0^r \frac{1}{t^m} \mathcal{H}^{N-1}(\partial B(0, t)) dt \\ &= \int_0^r \frac{1}{t^m} N \omega_N t^{N-1} dt \\ &= N \omega_N \int_0^r t^{N-m-1} dt \\ &= \begin{cases} \frac{N \omega_N r^{N-m}}{N-m}, & N > m, \\ \infty, & N \leq m. \end{cases} \end{aligned}$$

donde ω_N es el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^N$.

Finalmente, se sigue

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(C_{\mathbf{x},\rho})}, \quad (3.10)$$

luego como $C_{\mathbf{x},\rho} \subset \Omega$ y $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multiíndice $0 \leq |\alpha| \leq m$ se sigue, por cómo se define la norma en $W^{m,p}(\Omega)$, que

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Por otra parte, se ha visto en el teorema 3.7 que dada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, esta es el límite de una sucesión de Cauchy de funciones continuas. Además, por la ecuación 3.9, dicha sucesión converge a una función continua en Ω , dado que el espacio $\mathcal{BC}(\Omega)$ de funciones continuas y acotadas en Ω es un espacio de Banach (véase el Ejemplo 1.6). De esta forma, u ha de ser equivalente a una función continua en Ω , probando así que $u \in C_B^0(\Omega)$, y por tanto el embebimiento 3.1.

Considérese ahora Ω_k , la intersección de Ω con un plano k -dimensional H , y sea $\Omega_{k,\rho} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : d(\mathbf{x}, \Omega_k) < \rho\}$. Para la función u fijada al comienzo de la demostración, extiéndase esta y todas sus derivadas a 0 fuera de Ω . Es directo, por cómo se ha definido $C_{x,\rho}$, que $C_{x,\rho} \subset B(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho\}$. Gracias a la ecuación 3.10 e integrando respecto de la unidad

de volumen k -dimensional (que se denota por $d\mu(\mathbf{x}')$), se tiene que, utilizando la desigualdad de Jensen (véase [11, Theorem 3.3]) y el Teorema de Tonelli (presente en [2, Theorem 10.9]),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |u(\mathbf{x})|^p d\mu(\mathbf{x}') &\leq K \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega_k} d\mu(\mathbf{x}') \int_{B(\mathbf{x}', \rho)} |D^\alpha u(\mathbf{y})|^p d\mu(\mathbf{y}) \\ &= K \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega_{k,\rho}} |D^\alpha u(\mathbf{y})|^p d\mu(\mathbf{y}) \int_{H \cap B(\mathbf{y}, \rho)} d\mu(\mathbf{x}') \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

luego se tiene que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega_k)$. Paralelamente, en virtud de 3.9, por cómo se define la norma en $L^\infty(\Omega_k)$, necesariamente $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_k)$, y gracias al teorema 3.16, se tiene el embebimiento $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k)$.

Ahora bien, para el caso general $j > 0$ basta tener en cuenta el hecho de que si $u \in W^{j+m,p}(\Omega)$, entonces $D^\alpha u \in W^{m,p}(\Omega)$, siempre que $|\alpha| \leq j$. Así, por una parte, se tendrá por el caso $j = 0$ que $D^\alpha u \in \mathcal{C}_B^0(\Omega)$. Por otro lado, también se sigue del caso $j = 0$ que $D^\alpha u \in L^q(\Omega_k) \equiv W^{0,q}(\Omega_k)$, para $1 \leq k \leq N$, luego necesariamente $u \in W^{j,q}(\Omega)$. $\square$

La siguiente tarea será cómo se pueden obtener embebimientos análogos a los derivados en el teorema 3.17, variando sus hipótesis. En primer lugar, se estudiará el caso $mp < N$, además de condiciones adicionales que se detallarán con posterioridad. Es conveniente en este punto introducir el concepto de *convolución*:

Definición 3.19 (Convolución). Sean $u, v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Se define la convolución de u y v en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, y se denotará por $u * v(\mathbf{x})$ como la integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}).$$

Nótese que el efecto de la convolución de dos funciones es suavizar las irregularidades de ambas. Será de interés, pues, la transformación de los elementos de un espacio para conseguir mejores propiedades. En esta línea, sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio de $\mathbb{R}^N$ (ergo un conjunto abierto no vacío) y $\Phi : \Omega \rightarrow G \subset \mathbb{R}^N$, donde $G \equiv \text{Im}(\Phi)$. Véase la siguiente definición:

Definición 3.20. Supóngase que $\Phi : \Omega \rightarrow G$ es biyectiva, con $\psi = \Phi^{-1}$. Se dice que Φ es m -regular si para $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$, tales que

$$y_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_N), \quad x_i = \psi_i(y_1, \dots, y_N), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N,$$

se tiene que $\Phi_j \in \mathcal{C}^m(\text{Cl}(\Omega))$, $\psi_j \in \mathcal{C}^m(\text{Cl}(G))$, para todo $j = 1, \dots, N$.

Paralelamente, sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se define la función medible $Au : G \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $Au(\mathbf{y}) = u(\psi(\mathbf{y}))$, para todo $\mathbf{y} \in G$. De este modo, permitiendo libertad en u , puede verse A como un operador.

El siguiente teorema aporta gran información respecto de cómo el operador A definido previamente transforma los espacios $W^{m,p}$. Puede verse su demostración en [1, Theorem 3.41]:

Teorema 3.21. *Sea Φ una aplicación m -regular, con $m \geq 1$. Se tiene que A es un operador que transforma $W^{m,p}(\Omega)$ en $W^{m,p}(G)$ de modo que la restricción a dichos espacios es acotada, según la definición 1.8. Además, A es invertible y su inversa es también acotada.*

Hasta este punto, se ha basado lo escrito en la teoría de los espacios $L^p(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Sin embargo, para continuar con la tarea actual es menester la introducción de los espacios L^p débiles. Para ello, sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible, y en consonancia con lo expuesto en este capítulo, sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Dado un escalar $t \geq 0$, se define

$$\Omega_{u,t} = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}.$$

Esto permite introducir la *función de distribución* δ_u , dada por $\delta_u(t) = \mu(\Omega_{u,t})$. Adicionalmente, denótese $[u]_p \equiv [u]_{p,\Omega} := \left(\sup_{t>0} t^p \delta_u(t) \right)^{\frac{1}{p}}$. Se llega a la siguiente definición:

Definición 3.22 (Espacios L^p débiles). Para $0 < p < \infty$, se define el espacio weak- $L^p(\Omega)$ como el conjunto $\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : [u]_p < \infty\}$.

Observación 3.23. Es importante recalcar que, dado un elemento $u \in L^p(\Omega)$, con $0 < p < \infty$, se cumple que:

$$\|u\|_p^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \geq \int_{\Omega_{u,t}} |u(x)|^p dx \geq t^p \mu(\Omega_{u,t}), \quad \forall t > 0.$$

En particular, se tiene la siguiente desigualdad (conocida con el nombre de *desigualdad de Chebyshev*):

$$\delta_u(t) = \mu(\Omega_{u,t}) \leq t^{-p} \|u\|_p^p. \quad (3.11)$$

De la desigualdad anterior se deduce que $[u]_{p,\Omega} \leq \|u\|_p$ y, por tanto, $L^p(\Omega) \subset \text{weak-}L^p(\Omega)$, siendo esta inclusión estricta (véase [1, Section 2.55]).

Una vez introducidos los espacios weak- $L^p(\Omega)$, cobra sentido la siguiente definición:

Definición 3.24 (Operadores sublineales de tipo fuerte y débil). Dados X, Y dos espacios vectoriales de funciones medibles, se dice que un operador $F : X \rightarrow Y$ es *sublineal* si dados $u, v \in X$ y un escalar c , se verifica que

- $|F(u+v)| \leq |F(u)| + |F(v)|$,
- $|F(cu)| = |c| |F(u)|$.

Sean ahora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\Omega' \subset \mathbb{R}^k$ sendos dominios de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, con $k, N \in \mathbb{N}$. Para $F : X \rightarrow Y$, se dirá que:

1. F es de *tipo fuerte* (p, q) , si $F : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega')$, con $1 \leq p, q \leq \infty$, y además existe K una constante de modo que

$$\|F(u)\|_{L^q(\Omega')} \leq K \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{para todo } u \in L^p(\Omega).$$

2. F es de *tipo débil* (p, q) , si $F : L^p(\Omega) \longrightarrow \text{weak-}L^q(\Omega')$, con $1 \leq p, q \leq \infty$, y además existe K una constante de modo que

$$[F(u)]_{q, \Omega'} \leq K \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{para todo } u \in L^p(\Omega).$$

Se está ya en condiciones de enunciar el siguiente teorema, que proporciona condiciones para que un operador sea de tipo fuerte. Su demostración puede verse en [1, Theorem 2.58]:

Teorema 3.25 (Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz). *Sean $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$ y $1 \leq p_2 \leq q_2 \leq \infty$ de modo que $q_1 < q_2$. Sean además p, q verificando las siguientes relaciones:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2},$$

con $\theta \in (0, 1)$. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\Omega' \subset \mathbb{R}^k$ sendos dominios de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, con $k \geq 1$. Sea $F : L^{p_1}(\Omega) + L^{p_2}(\Omega) \longrightarrow M$ un operador sublineal, donde $M = \{u : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible}\}$. Si F es de tipo débil (p_1, q_1) y también de tipo débil (p_2, q_2) , entonces es de tipo fuerte (p, q) . Matemáticamente, si

$$[F(u)]_{q_j, \Omega'} \leq K_j \|u\|_{L^{p_j}(\Omega)}, \quad \text{para } j = 1, 2,$$

entonces

$$\|F(u)\|_{L^q(\Omega')} \leq K \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

donde $K \equiv K(p, p_1, q_1, p_2, q_2, K_1, K_2)$.

Se introducirán ahora dos lemas que serán de gran importancia en lo sucesivo. Previamente, es conveniente hacer la siguiente observación, presente en [1]:

Observación 3.26. Sea χ_r la función característica de $B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| < r\}$. Para $m \geq 1$, se define la función $\omega_m(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{m-N}$. Es ahora obvio que

$$\chi_r \omega_m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{m-N}, & \text{si } \|\mathbf{x}\| < r, \\ 0, & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq r, \end{cases}$$

y además se tiene la cadena de desigualdades:

$$\chi_r(\mathbf{x}) \leq \chi_r \omega_m(\mathbf{x}) \leq \omega_m(\mathbf{x}).$$

siempre que $0 < r \leq 1$ y $m \leq N$.

Las pruebas de los siguientes resultados pueden verse en [1, Lemma 4.17] y [1, Lemma 4.18] respectivamente:

Lema 3.27. *Sean $p \geq 1$ y $1 \leq k \leq N$ de modo que $N - mp < k$. En tal caso, existe una constante K de forma que para cada $r > 0$, todo plano k -dimensional $H \subset \mathbb{R}^N$ y todo $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, se tiene que $\chi_r \omega_m * |v| \in L^p(H)$, y además*

$$\|\chi_r \omega_m * |v|\|_{L^p(H)} \leq K r^{m - \frac{n-k}{p}} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Más aún, tomando $r = 1$, se tiene la cadena de desigualdades

$$\|\chi_1 * |v|\|_{L^p(H)} \leq \|\chi_1 \omega_m * |v|\|_{L^p(H)} \leq K \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Lema 3.28. *Sean $p > 1$, $mp < N$, $n - mp < k \leq N$, y $p^* = \frac{kp}{N - mp}$. En tal caso, existe una constante K de forma que para cada plano k -dimensional $H \subset \mathbb{R}^N$ y todo $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, se tiene que $\omega_m * |v| \in L^{p^*}(H)$ y además se tiene la cadena de desigualdades*

$$\|\chi_1 * |v|\|_{L^{p^*}(H)} \leq \|\chi_1 \omega_m * |v|\|_{L^{p^*}(H)} \leq \|\omega_m * |v|\|_{L^{p^*}(H)} \leq K \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Todos los resultados anteriores permite demostrar los embebimientos el caso que ya se anticipaba, esto es, cuando se verifica que $mp < N$. Suponiendo adicionalmente que $p > 1$, se tiene:

Teorema 3.29 (Embebimientos de los espacios $W^{m,p}$, para, $mp < N$ y $N - mp < k \leq N$). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto verificando la condición 3.12. Sean $1 \leq k \leq N$ y Ω_k la intersección de Ω con un plano k -dimensional de $\mathbb{R}^N$, siendo $\Omega_n = \Omega$. Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ dos números enteros y $1 < p < \infty$, de modo que $mp < N$ y $N - mp < k \leq N$. Entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = \frac{kp}{N - mp}.$$

Tomando $j = 0$ y $k = N$, se deduce que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = \frac{Np}{N - mp}.$$

Demostración. En las condiciones del enunciado, sea $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y extiéndanse u y todas sus derivadas a 0 en el conjunto $\mathbb{R}^N - \Omega$. En primer lugar, se hará uso del lema 3.18 para el caso $r = \rho$. Paralelamente, se cambiará el cono $C_{\mathbf{x},r}$ por la bola $B(\mathbf{x}, 1)$ (que es mayor que $C_{\mathbf{x},r}$, dado

que las desigualdades de la observación 3.26 son válidas para $0 < r \leq 1$). De este modo, se llega a la siguiente acotación:

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} \chi_1 * |D^\alpha u|(\mathbf{x}) + \sum_{|\alpha|=m} \chi_1 \omega_m * |D^\alpha u|(\mathbf{x}) \right). \quad (3.12)$$

Además, como $p \leq q \leq p^*$, basta tomar $\theta \in [0, 1]$ de modo que $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$ y aplicar el Teorema 3.16 (nótese que se permite que q tome los valores extremos, luego se está ante un caso menos restrictivo), y los Lemas 3.27 (para los términos $\chi_1 * |D^\alpha u|$) y 3.28 (para los términos $\chi_1 \omega_m * |D^\alpha u|$), obteniendo

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega_k)} &\leq \|u\|_{L^p(H)}^\theta \|u\|_{L^{p^*}(H)}^{1-\theta} \\ &\leq K \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^\theta \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\theta} \leq K \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

lo que prueba el embebimiento enunciado. $\square$

Una vez demostrados los casos $mp < N$ y $mp > N$, es natural preguntarse si podrían encontrarse embebimientos análogos cuando $mp = N$. La respuesta es afirmativa. Véase el siguiente Teorema, cuya demostración está presente en [1, Página 92, 4.20]:

Teorema 3.30 (Embebimientos de los espacios $W^{m,p}$, para $mp = N$ y $p > 1$). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto verificando la condición 3.12. Sean $1 \leq k \leq N$ y Ω_k la intersección de Ω con un plano k -dimensional de $\mathbb{R}^N$, siendo $\Omega_N = \Omega$. Sean $j \geq 0$ y $m \geq 1$ dos números enteros y $1 < p < \infty$, de manera que $mp = N$. En tal caso,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \quad \text{para } p \leq q < \infty.$$

Además, tomando $j = 0$ y $k = N$, se deduce que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{para } p \leq q < \infty.$$

Nótese que en los Teoremas 3.29 y 3.30 se ha excluido el caso $p = 1$. En consecuencia, se cerrará esta sección demostrando que, en tales condiciones, dichos teoremas también son válidos. Previamente se enunciarán dos Lemas que facilitarán las demostraciones a las que se ha hecho referencia. A modo de observación, nótese que para $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto (acotado o no), la notación ∂A se referirá a la frontera (en $\mathbb{R}^N$) de A . Se tiene, pues, lo siguiente:

Lema 3.31. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio verificando la condición 3.12. En tal caso, ha de existir una familia finita de subconjuntos abiertos de Ω , $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, que recubre Ω , esto es, $\Omega = \cup_{i=1}^n \Omega_i$, y de modo que para cada $i = 1, \dots, n$ existen un conjunto $A_i \subset \Omega_i$ y un paralelepípedo P_i con uno de sus vértices en $\mathbf{0}$ (véase la Definición 3.13) tales que $\Omega_i = \cup_{\mathbf{x} \in A_i} (\mathbf{x} + P_i)$.*

Adicionalmente, si Ω es acotado, se tiene que para cada $\rho > 0$ fijado, puede escogerse A_i de forma que $\text{diam}(A_i) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial A_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho$.

La demostración del lema anterior se encuentra en [1, Lemma 4.22]. Este resultado permite demostrar el segundo lema, que versa como sigue:

Lema 3.32. *Si Ω verifica la condición 3.12, se tendrá que*

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}.$$

Observación 3.33. En las hipótesis de los Teoremas 3.17, 3.29 y 3.30 siempre se ha requerido que el abierto Ω verifique la condición 3.12. Es por ello que la demostración del Lema anterior hace uso de la descomposición dada por el Lema 3.31. Más aún, en la demostración se asume que Ω puede descomponerse en base a un único paralelepípedo, esto es, $n = 1$ y $\Omega = \Omega_1 = \cup_{\mathbf{x} \in A_1} (\mathbf{x} + P_1)$, utilizando la notación de 3.31. Además, también se argumenta que existe $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una transformación lineal que convierte a P en un cubo Q , luego un paralelepípedo cuyas aristas son de igual longitud (que se pueden suponer de longitud la unidad), y siendo éstas paralelas a los ejes coordenados. En este punto también se hace uso del Teorema 3.21, concluyendo que es suficiente redactar la demostración de 3.32 para $\Omega = \cup_{\mathbf{x} \in A_1} (\mathbf{x} + Q)$.

Recuérdese que en el Teorema 3.30, se supuso que $1 \leq N$ y $mp = N$. Por lo tanto, para $p = 1$ se tendrá que $0 = N - m < k$, siempre que $1 \leq k \leq N$. Paralelamente, en el Teorema 3.29 se tenía que $mp < N$, ergo para $p = 1$ es $m < N$. Si se añade la condición $N - m \leq k \leq N$, entonces el enunciado sigue siendo válido. Es más, se demostrarán ambos casos de forma simultánea, dividiendo la argumentación en dos partes, tal y como sigue:

Demostración de los teoremas 3.29 y 3.30 para $p = 1$ y $k > N - m$. Sea, pues, $1 \leq m < N$. Por el Lema 3.32 y los Teoremas 3.29 y 3.30 (luego $p > 1$), se sigue que

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,p}(\Omega), \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}.$$

Como $k \in \mathbb{N}$ y se está suponiendo que $k > N - m$, necesariamente $k \geq N - m + 1 > N - (m-1)p$, para cualquier $p > 1$, luego de nuevo por el Teorema 3.29 se tiene que, cambiando m por $m-1$, $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k)$, siempre que

$$1 \leq q \leq p^* = \frac{kp}{N - (m-1)p} = \frac{k \frac{N}{N-1}}{N - (m-1) \frac{N}{N-1}} = \frac{k}{N-m},$$

donde se ha acotado por $p = \frac{N}{N-1}$. Por tanto, componiendo ambos embebimientos (teniendo en cuenta que la composición de aplicaciones continuas es continua), se deduce que

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k), \quad \text{para } 1 \leq q \leq \frac{k}{N-m}.$$

Finalmente, recuérdese que la segunda parte de la demostración del Teorema 3.17 ya argumentó el caso $p = 1$ y $m = N$, luego es directo que

$$W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k), \quad \text{para } 1 \leq q \leq \infty, \quad 1 \leq k \leq N,$$

finalizando así la demostración. $\square$

Observación 3.34. Nótese que resta demostrar el caso $k = N - m$. Es evidente que el Teorema 3.30 ya ha quedado totalmente cubierto, pues si $m = N$, como $k \geq 1$, necesariamente $k > N - m = 0$. Por otra parte, si $k = N - m$, ha de demostrarse que

$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega_k), \quad \text{para } 1 \leq q \leq \frac{k}{N - m} = 1,$$

o lo que es lo mismo, $W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega_k)$.

Se procede con la demostración:

Demostración del teorema 3.29 para $p = 1$ y $k = N - m$. Por un razonamiento análogo al aportado en la Observación 3.33, se realizará la demostración para Ω un abierto unión de trasladados paralelos de un cubo con aristas de longitud uno y paralelas a los ejes coordenados. Se supondrá también (bastaría llevar a cabo una traslación en caso contrario) que $\mathbf{0} \in \Omega$ y

$$\Omega_k = \{\mathbf{y} = (\mathbf{y}', \mathbf{y}'') \in \Omega : \mathbf{y}' = \mathbf{0}\},$$

donde $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_m)$ e $\mathbf{y}'' = (y_{m+1}, \dots, y_N)$. Sea ahora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_N) \in \Omega$, y sea $\Omega_{\mathbf{x}}$ la intersección de Ω con el plano m -dimensional de variables de tipo $\mathbf{y}'$ tal que $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega_{\mathbf{x}}$. A partir de las coordenadas de $\mathbf{x}'$, puede construirse un cubo m -dimensional de lado uno $Q_{\mathbf{x}}$, totalmente contenido en $\Omega_{\mathbf{x}}$, y tal que $\mathbf{x} \in Q_{\mathbf{x}}$. Sea $u \in C^\infty(\Omega)$. Aplicando el Teorema 3.17 a u sobre $Q_{\mathbf{x}}$, se sigue que

$$|u(\mathbf{x})| \leq K \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} |D^\alpha u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')| d\mu(\mathbf{x}').$$

Integrando a ambos lados de la desigualdad anterior respecto de $\mathbf{x}''$ sobre el conjunto Ω_k , se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |u(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}'') &\leq \int_{\Omega_k} \left(K \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} |D^\alpha u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')| d\mu(\mathbf{x}') \right) d\mu(\mathbf{x}'') \\ &= K \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

luego por un razonamiento análogo al hecho en la demostración del Teorema 3.17, se sigue el enunciado. $\square$

3.2. Teoremas de trazas

El objetivo de esta sección es buscar, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, la relación que existe entre las funciones de $W^{m,p}(\Omega)$, y su restricción a la frontera de Ω , el conjunto $\partial\Omega$. Es por ello que se introducirá, en las siguientes líneas, el concepto de *operador traza*. Se ha seguido en todo momento la referencia [9].

Al restringir las funciones de $W^{m,p}(\Omega)$ a $\partial\Omega$, se lleva a cabo una reducción en la dimensión del dominio, luego tiene sentido introducir una nueva medida que tenga este último hecho en cuenta. Es por ello que toda integral en $\partial\Omega$ se considerará respecto de la medida $\mathcal{H}^{N-1}$ (véase la Definición 1.42). Paralelamente, en lo que resta de capítulo y en consonancia con [9, Chapter 18], se empleará la siguiente notación:

- $L^p(\partial\Omega) = L^p(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})$.
- $L^p_{\text{loc}}(\partial\Omega) = L^p_{\text{loc}}(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})$.
- $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})}$.

Establecida la notación, se procederá con la definición del *operador traza*. Para ello, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$, un dominio cuya frontera, $\partial\Omega$ es lipschitziana, según la Definición 3.3. Sea además $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ el vector normal unitario a $\partial\Omega$. Bajo estas condiciones, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [9, Theorem 18.1]:

Teorema 3.35. *Para cada $1 \leq p < \infty$, existe un (único) operador lineal*

$$\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p_{\text{loc}}(\partial\Omega)$$

verificando las siguientes condiciones:

1. $\text{Tr}(u) = u$, para cualquier $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\text{Cl}(\Omega))$ (véase la Definición 3.15),
2. para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y cada $\psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})^N$ (véase la Definición 2.7, sustituyendo el espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{C}^1(\Omega)$), se cumple que:

$$\int_{\Omega} u \partial_i \psi \, d\mu = - \int_{\Omega} \psi \partial_i u \, d\mu + \int_{\partial\Omega} \psi \text{Tr}(u) n_i \, d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq N,$$

3. dado cualquier $R > 0$ existen dos constantes $c \equiv c(R, p, \Omega)$, $\epsilon' \equiv \epsilon'(R, p, \Omega)$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{o}, R) \cap \partial\Omega} |\text{Tr}(u)|^p \, d\mathcal{H}^{N-1} &\leq c\epsilon^{-1} \int_{B(\mathbf{o}, R) \cap (\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} |u|^p \, d\mu \\ &\quad + c\epsilon^{p-1} \int_{B(\mathbf{o}, R) \cap (\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} \|\nabla u\|^p \, d\mu, \end{aligned}$$

para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon'$, siendo $\Omega_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

A continuación se hará, en las condiciones del teorema anterior, un estudio acerca de una propiedad concreta del operador traza, la *compacidad* (secuencial). Así pues, en virtud del Teorema 3.35, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba se omite y se puede encontrar en [9, Corollary 18.4]:

Corolario 3.36 (Compacidad del operador traza). *Para $N \geq 2$, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ es lipschitziana (según la definición 3.3). Sean además $1 < p < \infty$ y $X = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. En tal caso, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de X y una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y además $\text{Tr}(u_{n_k}) \rightarrow \text{Tr}(u)$ en $L^p(\partial\Omega)$.*

Recuérdese que en la Definición 3.10 se introdujo el espacio de Sobolev homogéneo $W_0^{1,p}(\Omega)$. Las funciones de dicho espacio cuentan con una característica muy interesante, que su traza es nula. De hecho, se tiene el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [9, Theorem 18.7]:

Teorema 3.37. *Para $N \geq 2$, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ es lipschitziana (según la definición 3.3). Dados $1 \leq p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene que*

$$\text{Tr}(u) = 0 \text{ si y solo si } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En paralelo a los resultados anteriores, se tendrá como primer objetivo el estudio de la traza de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$, con $p \geq 1$. Será de gran utilidad en esta tarea el siguiente espacio:

Definición 3.38 (El espacio $\dot{W}^{m,p}(\Omega)$). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, y sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Se define el *espacio de Sobolev homogéneo* $\dot{W}^{m,p}(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tales que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ verificando $|\alpha| = m$. Este espacio está dotado de la seminorma

$$|u|_{\dot{W}^{m,p}(\Omega)} = \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Observación 3.39. Como ya se ha argumentado previamente, se tiene la inclusión $L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Este hecho, unido a la definición dada de $\dot{W}^{m,p}(\Omega)$ (véase la Definición 3.5), induce la inclusión $W^{m,p}(\Omega) \subset \dot{W}^{m,p}(\Omega)$.

Las anotaciones anteriores sirven como punto de partida de la tarea mencionada con anterioridad. De este modo, como caso base, tómense $p = 1$ y $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > 0\}$. Si $N \geq 2$, se tiene el siguiente resultado. Se omite su prueba, la cual se puede revisar en [9, Theorem 18.9]:

Teorema 3.40. *Sea $N \geq 2$. Para todo $u \in \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+^N)$ tendiendo a cero en infinito, esto es $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$. Se tiene que*

$$\|\text{Tr}(u)(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|\partial_N u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Observación 3.41. Nótese, en primer lugar, que fijado $u \in \dot{W}^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$, se tiene que $\text{Tr}(u) : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}$. En tal caso, fijando como 0 el valor de la variable x_N , se sigue que $\text{Tr}(u)(\cdot, 0)$ es una función de $N - 1$ variables. Por otra parte, gracias a la Observación 3.39 y al Teorema 2.18, se sigue que el operador traza

$$\begin{aligned} \text{Tr} : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^N) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^{N-1}) \\ u &\longrightarrow \text{Tr}(u)(\cdot, 0) \end{aligned}$$

ha de ser continuo, ya que

$$\|\text{Tr}(u)(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|\partial_N u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^N)} = |u|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}_+^N)} < \infty,$$

utilizando sucesivamente el Teorema anterior, la Definición 3.38 y la Observación 3.39.

La observación anterior prueba la continuidad del operador $\text{Tr} : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^{N-1})$, pero puede irse un paso más allá. Véase el siguiente Teorema, que se corresponde con [9, Theorem 18.13]:

Teorema 3.42. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^{N-1})$ para $N \geq 2$. Se tiene que para cada $\delta \in (0, 1)$ existe $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+^N)$ de modo que $\text{Tr}(u) = g$, y que verifica las siguientes acotaciones:*

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq \delta \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}, \quad \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq (1 + \delta) \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Nótese que esto demuestra que dicho operador es sobreyectivo, y además aporta condiciones relativas a las preimágenes de los elementos de $L^1(\mathbb{R}^{N-1})$ por la aplicación Tr . La pregunta que el lector se puede hacer en este punto es qué ocurre si se sustituye el abierto $\mathbb{R}_+^N$ por otro dominio Ω arbitrario. Con esto en mente, se probará que bajo ciertas condiciones de regularidad de $\partial\Omega$, pueden determinarse constantes que faciliten una acotación similar a la proporcionada en el Teorema anterior. Previo a este acometido, se definen los siguientes conceptos:

Definición 3.43 (Colección localmente finita). Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{F}$ es *localmente finita* si para cualquier $x \in X$, existe U un entorno de x que interseca únicamente a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$.

Definición 3.44 (Frontera uniformemente lipschitziana). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se dice que $\partial\Omega$ es *uniformemente lipschitziana* si existen dos constantes reales $\epsilon, L > 0$, un número natural $M \in \mathbb{N}$ y una colección de conjuntos abiertos localmente finita $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que recubre $\partial\Omega$, verificando:

1. La bola $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \Omega_n$, siempre que $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, y para algún $n \in \mathbb{N}$,
2. todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ está contenido en a lo sumo M conjuntos de la forma Ω_n ,

3. para cada $n \in \mathbb{N}$ existen coordenadas locales $\mathbf{y}_n = (\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, y una función lipschitziana $f_n : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\text{Lip } f \leq L$, verificando que para V_n el conjunto dado en coordenadas locales como sigue:

$$V_n = \{(\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : y_N > f(\mathbf{y}')\}.$$

entonces $\Omega_n \cap \Omega = \Omega_n \cap V_n$.

En base a la definición previa, se enuncia sin demostración (véase [9, Theorem 18.18]) el siguiente Teorema:

Teorema 3.45. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, con $N \geq 2$, y supóngase que $\partial\Omega$ es uniformemente lipschitziana. Se tiene que*

$$\|\text{Tr}(u)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq cM\epsilon^{-1}(1+L)\|u\|_{L^1(\Omega)} + c(1+L)\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

para cualquier $u \in W^{1,1}(\Omega)$, donde $c \equiv c(N)$ es una constante real positiva no nula, y los valores $\epsilon, L > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ quedan totalmente determinados por la Definición anterior.

Una vez se ha expuesto el caso $p = 1$, se comentará cómo se adaptan los resultados anteriores a los espacios $W^{1,p}(\Omega)$, para $p > 1$. En esta línea, se tiene el siguiente Teorema, extraído de [9, Theorem 18.24]:

Teorema 3.46. *Sea $1 < p < N$. En tal caso, existe una constante real positiva no nula $c \equiv c(N, p)$ de modo que para todo $u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$ tendiendo a cero en infinito se tiene que*

$$\|\text{Tr}(u)(\cdot, 0)\|_{L^{\frac{p(N-1)}{N-p}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Observación 3.47. Nótese que el Teorema previo presenta una acotación similar a la proporcionada por el Teorema 3.40. En este caso, también se pide que la dimensión del dominio sea $N \geq 2$, y la constante de acotación c no ha de ser necesariamente igual a uno. Paralelamente, razonando de forma totalmente análoga a la Observación 3.41, se sigue que la aplicación lineal

$$\text{Tr} : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow L^{\frac{p(N-1)}{N-p}}(\mathbb{R}^{N-1})$$

es acotada, y por tanto continua.

Lo que resta de sección se incluye a modo de compleción, pues se escapa del motivo de este trabajo. Hecha esta aclaración, y para finalizar este capítulo, se prosigue con la introducción de los *Espacios de Besov* que, bajo ciertas condiciones se corresponderán, precisamente, con la imagen del operador traza. Consecuentemente, sea $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lebesgue-medible, y sean $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$. Se define el operador de diferencias progresivas

$$\Delta_{\mathbf{h}}^1 u(\mathbf{x}) \equiv \Delta_{\mathbf{h}} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x}).$$

De modo inductivo, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, se define

$$\Delta_{\mathbf{h}}^m u(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}}(\Delta_{\mathbf{h}}^{m-1} u(\mathbf{x})).$$

Ahora sean $1 \leq p < \infty$ y $s > 0$. Se definen los *Espacios de Besov* como sigue:

Definición 3.48 (El espacio $B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$). Se dice que u pertenece al *espacio de Besov* $B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ si se tiene que el valor

$$\|u\|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + |u|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \quad (3.13)$$

es finito, siendo

$$|u|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\|\Delta_{\mathbf{h}}^{\lfloor s \rfloor + 1} u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}{\|\mathbf{h}\|^{N+sp}} d\mu(\mathbf{h}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 3.49. Es importante remarcar que, por cómo se define la norma 3.13, se tiene la inclusión $B^{s,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. De este modo, pese a que en el caso $p = 1$ se veía que el operador

$$\text{Tr} : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^N) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^{N-1})$$

es sobreyectivo, no se verifica cuando $p > 1$. De hecho, se verá que la imagen del operador es, precisamente, el espacio $B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Conforme a lo expuesto en la Observación anterior, se tiene el siguiente resultado, que se encuentra en [9, Theorem 18.27]:

Teorema 3.50. Sean $1 < p < \infty$ y $N \geq 2$. Bajo estas condiciones, existe una constante real positiva no nula $c \equiv c(N, p)$ de forma que

$$|\text{Tr}(u)(\cdot, 0)|_{B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}, \quad \text{para todo } u \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^N).$$

Procediendo como en la Observación 3.41, se demuestra que para todo $u \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, $|\text{Tr}(u)(\cdot, 0)|_{B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1})} < \infty$. Por consiguiente, es directa la inclusión

$$\text{Tr}(\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)) \subset B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1}).$$

Basta, pues, ver el contenido inverso para concluir la igualdad. Se aporta, en consecuencia, el siguiente Teorema, cuya demostración se sigue de [9, Theorem 18.28]:

Teorema 3.51. Sean $1 < p < \infty$ y $n \geq 2$, y considérese $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{N-1})$ de forma que $|g|_{B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1})} < \infty$. En tal caso, ha de existir $v \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ de modo que $\text{Tr}(v)(\cdot, 0) = g$ y además

$$\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}_+^N)} \leq c |g|_{B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

siendo $c \equiv c(N, p) > 0$, luego $B^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{N-1}) \subset \text{Tr}(\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^N))$.

Capítulo 4

Aplicaciones a las EDPs

La sección a la que se da ahora comienzo estará centrada en el análisis de la resolución de *problemas elípticos*. Para ello, se establecerá un marco general suficientemente representativo, el cual se particularizará en el próximo capítulo con el objeto de obtener resultados empíricos. En líneas generales, sea V un $\mathbb{R}$ -espacio de Hilbert, y denótese por $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de V . Paralelamente, sea $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, esto es, existe $M \geq 0$ de modo que

$$a(u, v) \leq M\|u\|\|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

Finalmente, sea $\mathcal{L} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal y continua, esto es, si su norma en V' es finita.

En lo sucesivo, se denotará el espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ (véase la Definición 3.10) como $H_0^1(\Omega)$. Es conveniente, además, recordar la inclusión natural $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Más aún, se tiene el siguiente resultado, presente en [10, Théorème 1.4-1], que será de utilidad en el capítulo próximo:

Teorema 4.1. $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} \equiv 0\}$.

Es importante remarcar en este punto que para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, que se supondrá acotado en lo que resta de capítulo, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x})$, y la norma inducida $\|f\|_{L^2(\Omega)} = [(f, f)_{L^2(\Omega)}]^{\frac{1}{2}}$, para cada $f \in L^2(\Omega)$. Este hecho es consecuencia directa del Teorema 3.9. Paralelamente, una vez establecida la notación, considérese la seminorma en $H_0^1(\Omega)$ dada por

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.1)$$

El siguiente Teorema, la *desigualdad de Poincaré* (véanse Raviart Théorème 1.2-5 y Corollaire 1.2-1), demuestra que la seminorma anterior, siempre que Ω sea acotado, es en realidad una norma en $H_0^1(\Omega)$, y además es equivalente a la inducida como subespacio de $H^1(\Omega)$:

Teorema 4.2 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. En tal caso, existe una constante positiva no nula $C \equiv C(\Omega)$ de modo que se tiene la acotación*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot |v|_{1,\Omega}, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observación 4.3. Nótese que $|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. En efecto, se tiene que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 \, d\mu + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \, d\mu = \int_{\Omega} v^2 \, d\mu + |v|_{1,\Omega}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{1,\Omega}^2.$$

Esta Observación servirá de ayuda en los ejemplos que se aportarán después del desarrollo teórico que se presenta a continuación. Así pues, se establece el *problema variacional general* como sigue:

$$(\mathcal{P}) : \quad \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \mathcal{L}(v), \text{ para todo } v \in V. \quad (4.2)$$

Es de interés aportar condiciones suficientes para que el problema 4.2 admita solución (única). Véase, pues, la siguiente Definición:

Definición 4.4 (Forma bilineal V -elíptica). Se dice que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica si existe una constante $\alpha > 0$ de modo que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in V.$$

El siguiente resultado, el Lema de Lax-Milgram, tiene un carácter fundamental en lo que resta de escrito pues garantiza que bajo la condición dada por la Definición 4.4, existe (y es única) solución del problema 4.2. Así pues, se enuncia y demuestra como sigue:

Teorema 4.5 (Lema de Lax-Milgram). *Supóngase que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica. Se tiene entonces que el problema $(\mathcal{P})$ admite solución única $u \in V$. Más aún, la aplicación*

$$\begin{aligned} V' &\longrightarrow V \\ \mathcal{L} &\longrightarrow u \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Por ser V un espacio de Hilbert y $\mathcal{L} \in V'$, en virtud del Teorema de Representación de Riesz (véase el Teorema 1.16), se sigue la existencia de un único elemento $\tau\mathcal{L} \in V$ que verifica

$$\mathcal{L}(v) = \langle \tau\mathcal{L}, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in V. \quad (4.3)$$

Además, se tiene que $\|\tau\mathcal{L}\| = \|\mathcal{L}\|_*$. En consecuencia, puede establecerse un isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned}\tau : V' &\longrightarrow V \\ \mathcal{L} &\longrightarrow \tau\mathcal{L}\end{aligned}$$

Ahora bien, fijado $u \in V$, es directo que la forma lineal $v \mapsto a(u, v)$ es continua en V . Por lo tanto, aplicando de nuevo el Teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $\mathcal{A}u \in V$ tal que

$$a(u, v) = \langle \mathcal{A}u, v \rangle, \quad \text{para cualquier } v \in V. \quad (4.4)$$

Se verifica ahora que el operador

$$\begin{aligned}\mathcal{A} : V &\longrightarrow V \\ u &\longrightarrow \mathcal{A}u\end{aligned}$$

es continuo, ya que $\|\mathcal{A}u\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \leq M\|u\|$. Por consiguiente, el problema 4.2 equivale a encontrar un (único) $u \in V$ que cumpla $\mathcal{A}u = \tau L$. Basta, pues, ver que $\mathcal{A}$ es biyectiva. El carácter inyectivo se estudiará demostrando que $\ker(\mathcal{A}) = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = 0\} = \{0\}$. En efecto, por ser $a(\cdot, \cdot)$ V -elíptica, se sigue que

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq \|\mathcal{A}v\|\|v\|, \quad (4.5)$$

luego $\|\mathcal{A}v\| \geq \alpha\|v\| > 0$, para todo $v \in V$, $v \neq 0$, tal y como se anticipaba previamente. Para probar la sobreyectividad de $\mathcal{A}$, es suficiente ver que la imagen de la aplicación coincide con su clausura en V , i.e., $\text{Cl}(\mathcal{A}V) = \mathcal{A}V$, y que además $\mathcal{A}V^\perp = \{0\}$, pues en tal caso $V = \text{Cl}(\mathcal{A}V) \oplus \mathcal{A}V^\perp = \mathcal{A}V$ (véase la Proposición 1.24). Sea pues $w \in \text{Cl}(\mathcal{A}V)$, y sea $\{\mathcal{A}v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{A}V$ que converge a $w \in V$. Por 4.5, se tiene que

$$\|\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v_n\| = \|\mathcal{A}(v_m - v_n)\| \geq \alpha\|v_m - v_n\|,$$

luego $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert V . Ha de existir, pues $v \in V$ tal que $v_m \longrightarrow v$, y por la continuidad de $\mathcal{A}$ se sigue que $\mathcal{A}v_m \longrightarrow \mathcal{A}v$. Por la unicidad del límite, se sigue que $w = \mathcal{A}v \in \mathcal{A}V$, probando así que $\text{Cl}(\mathcal{A}V) = \mathcal{A}V$. Por otra parte, sea $v_0 \in (\mathcal{A}V)^\perp$. Por ser $a(\cdot, \cdot)$ V -elíptica, se sigue

$$0 \leq \alpha\|v_0\|^2 \leq a(v_0, v_0) = \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = 0,$$

luego $\alpha\|v_0\|^2 = 0$, y como $\alpha > 0$, se tiene que $\|v_0\|^2 = 0$, y por tanto $v_0 = 0$. Es por ello que $(\mathcal{A}V)^\perp = \{0\}$, demostrando así la biyectividad del operador $\mathcal{A}$. Por consiguiente, se tiene garantizada la existencia de la aplicación lineal $\mathcal{A}^{-1}$ y, de nuevo por las propiedades de $a(\cdot, \cdot)$, es

$$\|v\| = \|\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}v)\| \geq \alpha\|\mathcal{A}^{-1}v\|,$$

y por tanto $\|\mathcal{A}^{-1}v\| \leq \frac{1}{\alpha}\|v\|$, demostrando así que $\mathcal{A}^{-1}$ es continua. Finalmente, por el argumento previo, se sigue que si u es (la) solución del problema $(\mathcal{P})$, entonces

$$\|u\| = \|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}u)\| = \|\mathcal{A}^{-1}\tau\mathcal{L}\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\tau\mathcal{L}\| = \frac{1}{\alpha}\|\mathcal{L}\|,$$

finalizando así la prueba. $\square$

El Teorema anterior aporta una caracterización de la solución del problema $(\mathcal{P})$, a partir de las formas $a(\cdot, \cdot)$ y $\mathcal{L}(\cdot)$, bajo ciertas condiciones. Siendo todavía más restrictivos, puede verse $(\mathcal{P})$ como un *problema de minimización*. Se introduce, pues, el concepto de *forma bilineal simétrica*:

Definición 4.6 (Forma bilineal simétrica). Dada una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, se dice que es *simétrica* si se verifica que

$$a(u, v) = a(v, u),$$

para todo $u, v \in V$.

Si además de la V -elipticidad, se le requiere a $a(\cdot, \cdot)$ la condición de simetría, se cuenta con el siguiente enunciado:

Teorema 4.7. Para cada $v \in V$, se introduce el funcional cuadrático

$$J(v) = \frac{a(v, v)}{2} - \mathcal{L}(v), \quad (4.6)$$

y considerando el problema de minimización

$$\text{hallar } u \text{ tal que } J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

se tiene que, en las condiciones ya anunciadas, el problema de minimización anterior admite solución única, y esta coincide con la solución del problema $(\mathcal{P})$.

Demostración. Nótese que se está en condiciones del Teorema 4.5, luego se concluye que existe, y es única, solución u del problema $(\mathcal{P})$, la cual verifica que $a(u, v) - \mathcal{L}(v) = 0$, para todo $v \in V$. Basta entonces ver que $J(u) < J(v)$ para todo $v \in V$, $v \neq u$. Sea, pues, $w \in V$ arbitrario. Por la simetría de la forma bilineal, se llega a

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{a(u+w, u+w)}{2} - \mathcal{L}(u+w) \\ &= \frac{a(u, u) + a(u, w) + a(w, u) + a(w, w)}{2} - (\mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(w)) \\ &= \frac{a(u, u) + 2a(u, w) + a(w, w)}{2} - (\mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(w)) \\ &= \left(\frac{a(u, u)}{2} - \mathcal{L}(u) \right) + (a(u, w) - \mathcal{L}(w)) + \frac{a(w, w)}{2} \\ &= J(u) + \frac{a(w, w)}{2}, \end{aligned}$$

y por ser $a(\cdot, \cdot)$ V -elíptica, se tiene que

$$J(u + w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|w\|^2.$$

Así pues, si $v \neq u$, se concluye que

$$J(v) = J(u + (v - u)) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 > J(u),$$

tal y como se quería demostrar. $\square$

Se presenta ahora una ecuación que resultará fundamental en esta sección, la *fórmula de Green*. Su deducción puede verse en [10, Corollaire 1.6-1]:

Proposición 4.8 (Fórmula de Green). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ es $\mathcal{C}^1$ a trozos, y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Para todo $u \in H^2(\Omega)$ y todo $v \in H^1(\Omega)$, se tiene*

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v \, d\mu = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^N n_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota la derivada normal de u , y $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota el Laplaciano de u .

Se está ya en condiciones de introducir dos ejemplos ilustrando cómo particularizar el caso general presentado. Más aún, estos servirán de base para la última sección, donde se tratará la *Ecuación de Laplace*:

Ejemplo 4.9 (Problema de Dirichlet homogéneo). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1$ (véase la Definición 3.3) a trozos, y una función $f \in L^2(\Omega)$. El objetivo es ahora hallar una función u suficientemente regular que sea solución de

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u \equiv 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

La formulación variacional del problema anterior se deducirá de dos maneras:

Primeramente, supóngase que $u \in H^2(\Omega)$. Dado que (4.7) es cierta en Ω , se multiplica ambos lados de la igualdad por una función $v \in H_0^1(\Omega)$, y como $\mu(\Omega) > 0$ y la función $fv + (\Delta u)v$ es idénticamente nula en Ω , se sigue que $\int_{\Omega} fv + (\Delta u)v \, d\mu = 0$, de donde

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v \, d\mu = \int_{\Omega} fv \, d\mu \quad (4.9)$$

Por otra parte, como $v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que $v \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, luego $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma = 0$ y, utilizando 4.9 y la Proposición 4.8, se sigue que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\mu, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Ahora bien, como $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, haciendo uso del Teorema 3.37, se llega a que $u \in H_0^1(\Omega)$. Por tanto, si u_0 es solución de $(\mathcal{P})$, también lo será del problema $(\mathcal{V})$, consistente en hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique la ecuación 4.10.

Supóngase ahora que u_0 es solución del problema $(\mathcal{V})$. La tarea es ahora recuperar una solución del problema $(\mathcal{P})$. Nótese que por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ (por ser éste su clausura en $H^1(\Omega)$), 4.10 es equivalente a que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = \int_{\Omega} f \phi \, d\mu, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por otra parte, para cualquier $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que $\phi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. En particular, $\phi \equiv 0$ en $\partial\Omega$, luego utilizando de nuevo la Proposición 4.8, se sigue que

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) \phi \, d\mu = \int_{\Omega} f \phi \, d\mu, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

luego $-\Delta u = f$ en el sentido de las distribuciones, y por tanto $-\Delta u = f$ en $L^2(\Omega)$ μ -c.t.p de Ω , ya que $f \in L^2(\Omega)$. Finalmente, como $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene (4.8) gracias al Teorema 3.37.

La formulación variacional también puede obtenerse a partir de los resultados previos. En efecto, tómense

- $V = H_0^1(\Omega)$ y $\| \cdot \| = (\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$ (véase la ecuación 3.5).
- Como forma bilineal $a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu$.
- Como forma lineal $\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mu$.

Es ahora directo, gracias a la Observación 4.3 y al Teorema 1.13, que para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene la acotación

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

lo que prueba la actoación (y por tanto la continuidad) de $a(\cdot, \cdot)$ sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Por cómo se define la norma en espacio $H^1(\Omega)$, se tiene que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$, luego por un razonamiento análogo al anterior,

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

y por tanto la forma lineal $\mathcal{L}(\cdot)$ es continua sobre $H_0^1(\Omega)$.

Para seguir el marco general previamente planteado, resta ver que la forma bilineal es $H_0^1(\Omega)$ -elíptica y simétrica. La segunda propiedad se obtiene directamente de la conmutatividad de los elementos de $\mathbb{R}$. La primera, se deduce de la acotación del dominio Ω , pues en virtud del Teorema 4.2 y de la Observación 4.3, se sigue que para $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(1 + C^2)a(v, v) = (1 + C^2)|v|_{1,\Omega}^2 = |v|_{1,\Omega}^2 + C^2 \cdot |v|_{1,\Omega}^2 \geq |v|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

luego tomando $\alpha = \frac{1}{1+C^2}$, se verifica

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

y por tanto $a(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)$ -elíptica.

De esta manera, en virtud del Teorema 4.5, se sigue la existencia y unicidad de una función $u \in H_0^1(\Omega)$ de modo que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\mu = \mathcal{L}(v).$$

Más aún, tal función u es aquella que minimiza en $H_0^1(\Omega)$, vía el Teorema 4.7, el funcional cuadrático

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \, d\mu - \int_{\Omega} f v \, d\mu,$$

luego ambas deducciones son totalmente equivalentes, tal y como se preveía.

Ejemplo 4.10 (Problema de Neumann homogéneo). Sean de nuevo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio con $\partial\Omega$ de clase C^1 a trozos y $f \in L^2(\Omega)$ dada. El objetivo es la búsqueda de una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que sea solución del problema

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^N$ de ∇u y $\mathbf{n}$.

Para obtener la formulación variacional, supóngase que $u \in H^2(\Omega)$. Razonando de manera análoga al Ejemplo anterior, multiplicando a ambos lados de la igualdad (4.7) por una función

$v \in H^1(\Omega)$ (nótese que anteriormente se tomaba $v \in H_0^1(\Omega)$, dado que $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, pero en este caso sí se permite libertad a u en la frontera, luego es conveniente tomar $v \in H^1(\Omega)$). Se obtiene así que

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v \, d\mu + \int_{\Omega} uv \, d\mu = \int_{\Omega} fv \, d\mu. \quad (4.13)$$

Además, por (4.12), es evidente que $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma = 0$ y, en virtud de 4.13 y de nuevo la Proposición 4.8, se llega a

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu + \int_{\Omega} uv \, d\mu = \int_{\Omega} fv \, d\mu, \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega). \quad (4.14)$$

Finalmente, la formulación variacional ($\mathcal{V}$) del problema inicial se basará en encontrar $u \in H^1(\Omega)$ que verifique la ecuación 4.14.

Observación 4.11. El problema de Neumann también puede estudiarse a partir del marco teórico general, tal y como se indica en [10, Exemple 2.2-2], tomando

- $V = H^1(\Omega)$ y $\| \cdot \| = (\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$.
- Como forma bilineal $a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu + \int_{\Omega} uv \, d\mu$.
- Como forma lineal $\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} fv \, d\mu$,

y razonando de forma totalmente análoga al Ejemplo 4.9.

Para dar fin a esta sección, conviene remarcar el hecho de que existen numerosas aplicaciones de los Espacios de Sobolev para la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales. En efecto, pueden estudiarse problemas elípticos con operadores diferenciales de orden dos, que se denotan genéricamente por A , más generales que el Laplaciano, y que para una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ toman la forma

$$Au = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u,$$

siendo los coeficientes $a_0, a_{i,j}$ de la igualdad anterior funciones medibles, de modo que $a_0, a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Paralelamente, los Espacios H^m también están presentes en problemas reales de la física, como el *Sistema de la elasticidad* o el *Sistema de Stokes*. Para un estudio detallado de estas últimas aplicaciones, puede consultarse [10, Páginas 40-57].

Capítulo 5

El método de elementos finitos

El capítulo al que se da ahora comienzo tratará la implementación del *Método de elementos finitos* utilizando el lenguaje FreeFem++, con el objetivo de la aproximación numérica de la solución (única) de algunos de los ejemplos presentados a lo largo de este escrito. En particular, se introducirá la notación y herramientas necesarias para la resolución numérica del Ejemplo 4.9, cuya formulación variacional se obtuvo siguiendo dos caminos diferentes. La redacción de las secciones pertinentes toma [10] como documento base, el cual se referenciará sucesivamente a modo de completación para aquellos resultados de corte auxiliar, pero necesarios para el desarrollo de la teoría de aproximación.

5.1. Generalidades

Recuérdese que en el marco teórico general se tomaba $(V, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espacio de Hilbert (generalmente $V = H_0^1(\Omega)$ o $V = H^1(\Omega)$, que son espacios de dimensión infinita) y se establecía el problema $(\mathcal{P})$ (véase 4.2) como

Encontrar $u \in V$ tal que $a(u, v) = \mathcal{L}(v)$, para todo $v \in V$,

donde $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal V -elíptica (véase la Definición 4.4) y continua sobre $V \times V$, y $\mathcal{L}(\cdot)$ es una forma lineal continua sobre V .

Sea pues u la solución (única) del problema 4.2. Ésta es, a priori, desconocida, luego es pertinente el empleo de métodos numéricos que devuelvan aproximaciones con un error inferior a un umbral predeterminado. Es por ello determinar nuevas formulaciones variacionales, donde el espacio con el que se trabaja sea de dimensión finita, y efectuar las aproximaciones sobre el mismo.

A modo de inicio, puede suponerse adicionalmente que la forma bilineal es simétrica, según la Definición 4.6. Bajo tal condición, en virtud del Teorema 4.7, se tendrá que la función u minimiza al funcional cuadrático $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ definido en 4.6. Resulta lógico, pues, dado un subespacio $V_h \subset V$, considerar el problema de minimización

$$\min_{v \in V_h} J(v)$$

que, vía el Teorema 4.7, admite solución única $u_h \in V_h$, la cual verifica que $a(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h)$, para todo $v_h \in V_h$. Así, se toma u_h como aproximación de u .

En caso de no requerir simetría a la forma bilineal, no se puede garantizar el cumplimiento del Teorema 4.7, luego ha de procederse de un modo alternativo. Así pues, dados valores (de forma decreciente en magnitud) de un parámetro $h > 0$, considérese $V_h \subset V$ un subespacio de dimensión $I(h) < \infty$, y tal que $\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = 0$. La idea subyacente consiste en aproximar el espacio V por la sucesión de subespacios $\{V_h\}_{h>0}$, y por consiguiente de la solución u que se tiene por objetivo. Dado que u verifica la condición 4.2, resulta natural restringir dicha igualdad a cada subespacio V_h , obteniéndose así el problema $(\mathcal{P}_h)$:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h), \text{ para todo } v_h \in V_h. \quad (5.1)$$

La cuestión es ahora conocer la existencia de tal u_h y su comportamiento. Resulta entonces crucial el siguiente Teorema, cuya prueba se encuentra en [10, Théorème 3.1-1]:

Teorema 5.1. *El problema 5.1 admite solución única $u_h \in V_h$.*

Ahora bien, el hecho de conocer una aproximación de la solución original no implica que ésta sea óptima. Por consiguiente, es menester realizar un estudio del error cometido en cada paso. Primeramente, se llevará a cabo una acotación general e independiente del subespacio V_h escogido. Véase el siguiente Teorema, cuya demostración puede ser consultada en [10, Théorème 3.1-2]:

Teorema 5.2. *Sean u y u_h las soluciones de los problemas 4.2 y 5.1 respectivamente. En tal caso, existe una constante positiva no nula C , que no depende del subespacio V_h tomado, tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \cdot \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (5.2)$$

La acotación dada por el Teorema anterior puede complementarse con un resultado de convergencia bajo ciertas condiciones. En efecto, sea V un espacio de Hilbert de modo que admite un subconjunto denso, W . Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.3. *En las condiciones previas, supóngase que existe una aplicación $r_h : W \rightarrow V_h$ de modo que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0, \quad \text{para todo } v \in W.$$

En tal caso, se verifica que $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$.

5.2. Construcción del espacio de Elementos Finitos

Esta sección, en consonancia con los razonamientos expuestos hasta el momento, tratará acerca de cómo construir un subespacio vectorial de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita. Como herramienta, se hará uso del método de Elementos Finitos (véase el Capítulo 5 de [10]). La idea básica subyacente a tal método consiste en construir un mallado τ_h de $\text{Cl}(\Omega)$ compuesto por triángulos (u otra clase de polígonos) y, asociado al mismo, considerar el siguiente conjunto:

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\text{Cl}(\Omega)) : v|_T \in \mathbb{P}_n(T), \text{ para todo } T \in \tau_h\}, \quad (5.3)$$

donde $\mathbb{P}_n(T)$ denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n , definidos en el triángulo $T \in \tau_h$. En el caso a tratar, se trabajará con el espacio $\mathbb{P}_1(T) = \langle \{1, x, y\} \rangle$.

Se procederá ahora con la demostración de que el espacio V_h es un subespacio vectorial finito de $H^1(\Omega)$.

Teorema 5.4. *El conjunto V_h definido en 5.3 es un subespacio de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita.*

Demostración. Sea $T \in \tau_h$ arbitrario. Nótese que por ser $\mathcal{C}^0(\text{Cl}(\Omega))$ y $\mathbb{P}_1(T)$ espacios vectoriales con la suma de funciones y el producto por escalares (reales), se deduce que V_h es un espacio vectorial con dichas operaciones.

Resta estudiar la validez de la inclusión $V_h \subset H^1(\Omega)$. Para ello, sea $v_h \in V_h$ arbitrario. Primeramente, se tiene que $v_h \in L^2(\Omega)$. En efecto, $v_h \in \mathcal{C}^0(\text{Cl}(\Omega))$, luego como $\text{Cl}(\Omega)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, es evidente que $|v_h|^2$ está acotada sobre un dominio de medida finita, de donde se deduce el resultado.

Por otra parte, para cada $1 \leq i \leq 2$, se demuestra que existe $\frac{\partial v_h}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones y $\frac{\partial v_h}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Así pues, como $v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T)$, es evidente que $v_i|_T \equiv \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Por lo tanto, denotando $v_i = \sum_{T \in \tau_h} v_i|_T \chi_T \in L^2(\Omega)$, es suficiente ver que se verifica $v_i = \frac{\partial v_h}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones. Con tal fin, sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, y considérese

$$\int_{\Omega} v_i \phi \, d\mu = \sum_{T \in \tau_h} \int_T v_i|_T \phi|_T \, d\mu = \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \phi|_T \, d\mu.$$

Por el Teorema 4.8, y denotando por $\mathbf{n}_T = (n_T^1, n_T^2)$ al vector normal unitario exterior al triángulo T , se sigue

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \phi|_T \, d\mu = - \sum_{T \in \tau_h} \int_T v_h|_T \frac{\partial \phi|_T}{\partial x_i} \, d\mu + \sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} v_h|_T \phi|_T n_T^i \, d\sigma.$$

Dado que ∂T es un camino cerrado y v_h es continua por definición, se sigue que

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} v_h|_T \phi|_T n_T^i \, d\sigma = 0,$$

y por tanto

$$\int_{\Omega} v_i \phi \, d\mu = - \sum_{T \in \tau_h} \int_T v_h|_T \frac{\partial \phi|_T}{\partial x_i} \, d\mu = - \int_{\Omega} v_h \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu.$$

Dado que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitrario, se sigue que v_i es la derivada distribucional de v_h respecto de la variable x_i , para $1 \leq i \leq 2$.

Nótese, para finalizar, que la malla τ_h induce un conjunto finito de nodos, póngase $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{I(h)}$. Así pues, para cada $1 \leq i \leq I(h)$, considérese la aplicación $\varphi_i \in V_h$ verificando $\varphi_i(\mathbf{y}_j) = \delta_{ij}$, para todo $1 \leq j \leq I(h)$. En tal caso, el conjunto $\{\varphi_i\}_{i=1}^{I(h)}$ constituye una base (finita) de V_h , demostrando así el enunciado. $\square$

Observación 5.5. Procediendo de forma análoga, es posible construir un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$, tomando

$$V_{h,0} = \{v \in C^0(\text{Cl}(\Omega)) : v|_{\Gamma} \equiv 0; v|_T \in \mathbb{P}_n(T), \text{ para todo } T \in \tau_h\} \quad (5.4)$$

y, utilizando el Teorema 4.1 y el hecho de que $v \equiv 0$ sobre Γ para todo $v \in V_{h,0}$, se deduce que $V_{h,0} \subset H_0^1(\Omega)$.

5.3. Resolución numérica empleando FreeFem++

La sección presente, y última de este escrito, estará dedicada a la aproximación numérica efectiva de dos problemas, en los términos del capítulo anterior, aportando los cálculos pertinentes con el apoyo de la herramienta FreeFem++ (véase [7]).

5.3.1. Resolución del problema de Dirichlet

En el contexto del Ejemplo 4.9, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, y considérese el problema

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u \equiv 0, & \text{sobre } \Gamma \equiv \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Se ha estudiado con anterioridad su formulación variacional, y se concluía que este problema admite solución única $u \in H_0^1(\Omega)$, y además verifica que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\mu = \mathcal{L}(v), \quad (5.7)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

El caso particular que se resolverá está inspirado en el Ejemplo 2.6. La función $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que allí se define tiene especial interés, puesto que se tiene

1.

$$\phi(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ si } \|\mathbf{x}\| = \|(x, y)\| \geq 1, \quad (5.8)$$

2.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi \, d\mu = C < \infty. \quad (5.9)$$

A la constante C se le denomina *constante de normalización*. Por lo tanto, tomando $\psi = \frac{1}{C}\phi$, no se modifica la condición 5.8, y la condición 5.9 se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi \, d\mu = 1. \quad (5.10)$$

Las propiedades anteriores inducen la siguiente definición:

Definición 5.6 (Mollifier). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función verificando 5.8 y 5.10 (en $\mathbb{R}^N$). Para cada $\epsilon > 0$, se define la función $\psi_\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon^{-N}\psi(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, la cual cumple que

1. $\psi_\epsilon(\mathbf{x}) \geq 0$, si $\|\mathbf{x}\| \geq \epsilon$,2. $\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon \, d\mu = 1$.

A la función ψ_ϵ se le denomina *mollifier*.

Observación 5.7. Para mayor concreción respecto de la definición y las propiedades de las funciones mollifier, puede consultarse [1, Página 36, 2.28].

Regresando a la función ϕ del Ejemplo mencionado, es directo que puede ser considerada elemento de la familia de funciones del tipo

$$\phi_{\mathbf{x}_c, R}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_c\|^2 - R^2}\right), & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| < R \\ 0, & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq R \end{cases},$$

donde $\mathbf{x}_c = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $R > 0$. Esta familia de funciones, por un razonamiento análogo al hecho para ϕ , induce una familia de mollifiers. En la Figura 5.1 se han tomado, para $N = 1$, los valores $R = 1$ y $\mathbf{x}_c = 0$, y puede verse la evolución de dicha familia en función del parámetro ϵ .

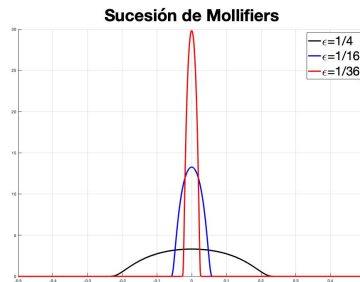


Figura 5.1: Sucesión de funciones Mollifier.

Así pues, la tarea ahora será utilizar el software FreeFem++ para resolver el problema de Dirichlet donde la solución particular es la mollifier $u = \frac{1}{C_1} \phi_{\mathbf{x}_c, R, \epsilon}$, con $\mathbf{x}_c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $R = 1$ y $\epsilon = \frac{1}{4}$, y siendo $C_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{\mathbf{x}_c, R, \epsilon} d\mu \simeq 0,466512$.

Desarrollando los cálculos, se obtiene que $f = -\Delta u$ toma la forma

$$f(x, y) = \frac{4 e^{\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)}}{C_1 \epsilon^4 \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^2} - \frac{2 e^{\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)} (2x - 2x_1)^2}{C_1 \epsilon^6 \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^3} \\ - \frac{e^{\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)} (2x - 2x_1)^2}{C_1 \epsilon^6 \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^4} - \frac{2 e^{\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)} (2y - 2x_2)^2}{C_1 \epsilon^6 \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^3} \\ - \frac{e^{\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)} (2y - 2x_2)^2}{C_1 \epsilon^6 \left(\frac{(x-x_1)^2}{\epsilon^2} + \frac{(y-x_2)^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^4}.$$

Además, como $R = 1$, es evidente que $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y $u \equiv 0$ sobre Γ .

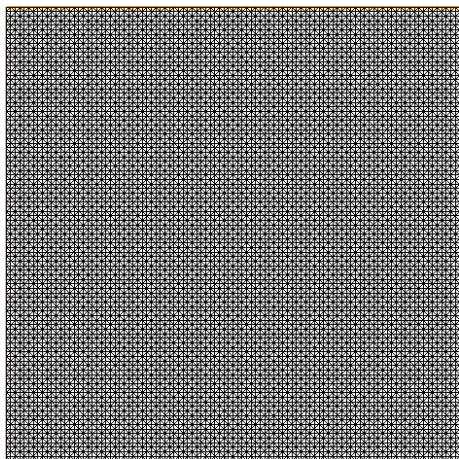
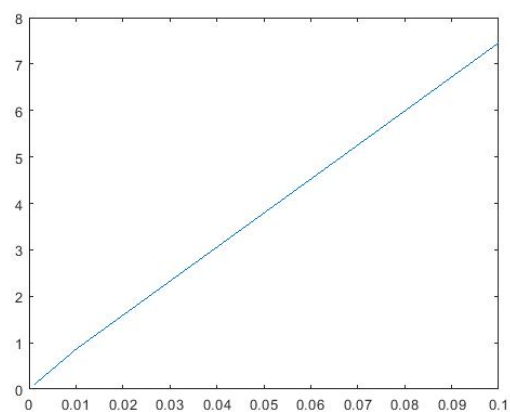
Ahora bien, el código presente en A.1 proporciona las pautas para la construcción sucesiva de 3 mallados, indicado en el parámetro *nmallas*, a partir de los cuáles, gracias al Método de Elementos Finitos, se devolverán aproximaciones u_h de la solución u . Conviene explicitar que los parámetros de entrada son:

- Las dimensiones del rectángulo $\text{Cl}(\Omega) = [0, a] \times [0, b]$, por ello $a = 1 = b$.
- El punto asociado a la mollifier, $x_c = (x_e, y_e) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- El valor de ϵ , guardado en *radio* = $\frac{1}{4}$.
- La constante de normalización, $C2D = 0,466512393181015$.
- El número de divisiones de Γ que se llevarán a cabo en la iteración $1 \leq i \leq nmallas$, $ndiv = 10^{i+1}$.

Una vez ejecutado el programa, se obtienen los siguientes datos de salida:

- Las normas en los espacios $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ del error cometido al aproximar la solución u por u_h , esto es, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$.
- El número de vértices (*Th.nv*) y de triángulos (*Th.nt*) asociados a la malla i .
- Las longitudes máxima (*Th.max*) y mínima (*Th.min*) de entre todos los segmentos que conforman los triángulos de la malla. Nótese que *Th.min* coincide con el parámetro $h = \frac{1}{ndiv}$.

Véase a continuación la Figura 5.2a, que muestra un ejemplo de mallado de $\text{Cl}(\Omega)$, para $n_{div} = .$ En paralelo, puede verse en la Figura 5.2b una evolución de los errores cometidos en norma de $H^1(\Omega)$.

(a) Mallado del dominio para $h = 0,01$.

(b) Evolución de los errores.

Figura 5.2: Mallado y evolución de errores

Finalmente se aporta, para $h = 0,01$, una gráfica de la solución aproximada u_h en 2 y 3 dimensiones (las figuras 5.3a y 5.3b respectivamente):

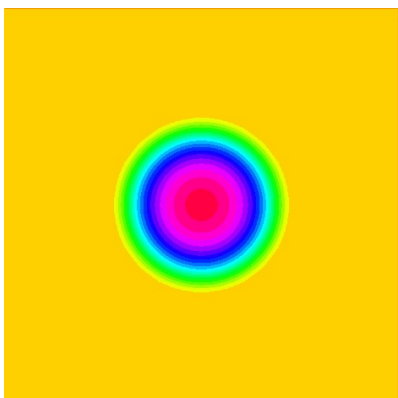
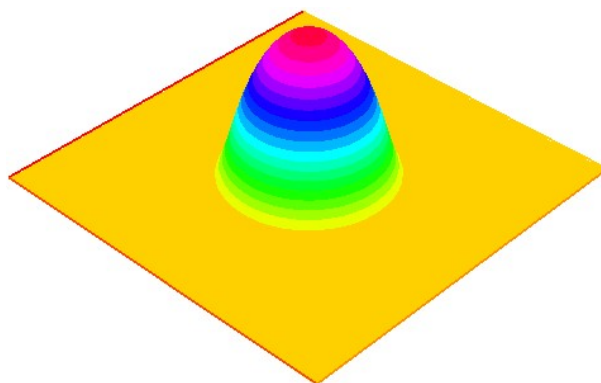
(a) Representación en 2 dimensiones de u_h .(b) Representación en 3 dimensiones de u_h .

Figura 5.3: Solución de la ecuación

5.3.2. Resolución numérica del problema Neumann

Para finalizar, se aporta otro ejemplo con condiciones tipo Neumann no homogéneas. Sea, pues, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, y considérese el problema

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv g, & \text{sobre } \Gamma \equiv \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$. Su formulación variacional viene dada por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\mu + \int_{\Omega} uv d\mu = \int_{\Omega} fv d\mu + \int_{\Gamma} gv d\mu = \mathcal{L}(v), \quad (5.13)$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Al igual que en el ejemplo anterior, se llevan a cabo 3 iteraciones del Método de Elementos Finitos, para el caso en que $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, la solución viene dada por la expresión $u = e^x \sin(x + y)$ y el término fuente es $f = 2e^x(\sin(x + y) - \cos(x + y))$. Ahora bien, es evidente que Γ se descompone en cuatro segmentos, que son $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ y $\Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$.

Sus vectores normales asociados son, respectivamente, $\mathbf{n}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{n}_3 = (0, 1)$ y $\mathbf{n}_4 = (-1, 0)$.

Finalmente, g tomará 4 expresiones diferentes en función del segmento de la frontera en que se encuentre. Así, $g|_{\Gamma_1} = -e^x \cos(x)$, $g|_{\Gamma_2} = e(\sin(1 + y) + \cos(1 + y))$, $g|_{\Gamma_3} = e^x \cos(x + 1)$ y $g|_{\Gamma_4} = -\sin(y) - \cos(y)$.

Puede verse el código utilizado en A.2. A modo de última nota, en este caso solo se tiene a los parámetros a y b como datos de entrada.

Anexo A

Códigos FreeFem desarrollados

A.1. Resolución numérica del problema Dirichlet

```
// *****  
// Test de error para la solucion de la ecuacion de Poisson  
// con condiciones Dirichlet Homogeneas  
//  
// Antonio Figueroa Pardo  
// *****  
  
verbosity=0;  
  
// Parametros asociados a la geometria del mallado  
real a=1; // Dimension eje x  
real b=1; // Dimension eje y  
real xe=1.0/2.0; // Punto asociado al termino fuente  
real ye=1.0/2.0; // Punto asociado al termino fuente  
real radio=1.0/4.0; // Radio asociado al termino fuente  
real C2D = 0.466512393181015; // Constante de normalizacion  
int nmallas=3; // Numero de mallas  
  
// Abrimos un fichero para escribir los resultados  
ofstream fileerror("./1_Resultados/fileerror_test4.sal");  
  
// Definimos la solucion del problema
```

```
func real sol(real & xc, real & yc)
{
// Inicializamos el valor de la funcion
real eval=0.0;

// Calculamos el punto para evaluar la mollifier
real xec=(xe-xc)/radio;
real yec=(ye-yc)/radio;

// Evaluamos la mollifier
if(xec*xec+yec*yec<1.0)
eval=exp(1.0/(xec*xec+yec*yec-1.0));

// Actualizamos el valor de la mollifier
eval=eval/C2D;
eval=eval/(radio*radio);
// Finalizamos la funcion eval
return eval;
}

// Definimos el termino fuente
func real f(real & xc, real & yc)
{
// Inicializamos el valor de la funcion
real eval=0.0;

// Calculamos el punto para evaluar el termino fuente
real xec=(xe-xc)/radio;
real yec=(ye-yc)/radio;

// Evaluamos el termino fuente
if(xec*xec+yec*yec<1.0)
{
eval=(1.0/(radio*radio*radio*radio)
*exp(1.0/(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(yc-ye,2.0)-1.0))
*1.0/pow(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(yc-ye,2.0)-1.0,2.0)*4.0)/C2D
```

```

-(1.0/(radio*radio*radio*radio*radio*radio)
*exp(1.0/(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0))
*pow(xc*2.0-xe*2.0,2.0)*1.0/pow(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0,3.0)*2.0)/C2D
-(1.0/(radio*radio*radio*radio*radio*radio)
*exp(1.0/(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0))
*pow(xc*2.0-xe*2.0,2.0)*1.0/pow(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0,4.0))/C2D
-(1.0/(radio*radio*radio*radio*radio*radio)
*exp(1.0/(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0))
*pow(ye*2.0-ye*2.0,2.0)*1.0/pow(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0,3.0)*2.0)/C2D
-(1.0/(radio*radio*radio*radio*radio*radio)
*exp(1.0/(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0))
*pow(ye*2.0-ye*2.0,2.0)*1.0/pow(1.0/(radio*radio)*pow(xc-xe,2.0)
+1.0/(radio*radio)*pow(ye-ye,2.0)-1.0,4.0))/C2D;
}

// Finalizamos la funcion eval
return eval;
}

// Realizamos un bucle en los tamaños de malla
for (int i=1; i<=nmallas;i++)
{
// Calculamos el numero de divisiones de las fronteras
real ndiv=pow(10,i*1.0);

// Generamos el mallado
mesh Th=square(ndiv*a,ndiv*b,[a*x,b*y],flags=1);

// Representamos graficamente el mallado
//plot(Th,wait=1,ps="./1_Resultados/mallado_test4_"+i+".ps");

```

```

// Declaramos el espacio de elementos finitos
fespace Vh(Th,P1);

// Declaramos las variables que emplearemos en la resolucio
Vh u,v,error;

// Resolvemos el problema
solve Poisson(u,v)=int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
-int2d(Th)(f(x,y)*v)+on(1,2,3,4,u=0.0);

// Representamos graficamente la solucion obtenida
plot(u,wait=1,value=1,fill=1,ps="1_Resultados/solucion2D_test4_"+i+".ps");
plot(u,dim=3,wait=1,value=1,fill=1);

// Calculamos el error
Vh solh=sol(x,y);
error=solh-u;

// Calculamos la norma en L2 del error
real normL2=int2d(Th)(error*error);
normL2=sqrt(normL2); // Norma en L2

// Calculamos la norma en H1 del error
real normH1=int2d(Th)(error*error);
normH1=normH1+int2d(Th)(dx(error)*dx(error));
normH1=normH1+int2d(Th)(dy(error)*dy(error));
normH1=sqrt(normH1); // Norma en H1

// Imprimimos informacion por pantalla
cout<<"*****"<<endl;
cout<<"Iteracion "<<i<<" "<<"h="<<1.0/ndiv<<endl;
cout<<"Numero de vertices "<<" "<<Th.nv<<endl;
cout<<"Numero de triangulos "<<" "<<Th.nt<<endl;
cout<<"Minimum edge size "<<" "<<Th.hmin<<endl;
cout<<"Maximum edge size "<<" "<<Th.hmax<<endl;
cout<<"Norma en L2 del error"<<" "<<normL2<<endl;
cout<<"Norma en H1 del error"<<" "<<normH1<<endl;

```

```
// Salvamos los errores en fichero
fileerror.scientific<<1.0/ndiv<<" "<<normL2<<" "<<normH1<<endl;
}
```

A.2. Resolución numérica del problema Neumann

```
// *****
// Test de error para la solución de la ecuación de Poisson
// con condiciones Neumann no Homogéneas
//
// Antonio Figueroa Pardo
// *****

verbosity=0;

// Parametros asociados a la geometría del malla
real a=1; // Dimension eje x
real b=1; // Dimension eje y
int nmallas=3; // Numero de mallas

// Abrimos un fichero para escribir los resultados
ofstream fileerror("./1_Resultados/fileerror_test6.sal");

// Definimos las funciones que emplearemos en el test de error
func sol=exp(x)*sin(x+y); // Solución
func f=+2.0*exp(x)*(sin(x+y)-cos(x+y)); // Término fuente
func g1=-exp(x)*cos(x); // Condiciones contorno Gamma 1
func g2=exp(a)*(sin(a+y)+cos(a+y)); // Condiciones contorno Gamma 2
func g3=exp(x)*cos(x+b); // Condiciones contorno Gamma 3
func g4=-sin(y)-cos(y); // Condiciones contorno Gamma 4

// Realizamos un bucle en los tamaños de malla
for (int i=1; i<=nmallas;i++)
{
// Calculamos el número de divisiones de las fronteras
real ndiv=pow(10,i*1.0);
```

```
// Generamos el mallado
mesh Th=square(ndiv*a,ndiv*b,[a*x,b*y],flags=1);

// Representamos graficamente el mallado
//plot(Th,wait=0,ps="./1_Resultados/mallado_test6_"+i+".ps");

// Declaramos el espacio de elementos finitos
fespace Vh(Th,P1);

// Declaramos las variables que emplearemos en la resolucio
Vh u,v,error;

// Resolvemos el problema
solve Poisson(u,v)=int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
+int2d(Th)(u*v)
-int2d(Th)(f*v)
-int1d(Th,1)(g1*v)
-int1d(Th,2)(g2*v)
-int1d(Th,3)(g3*v)
-int1d(Th,4)(g4*v);

// Representamos graficamente la solucio obtenida
//plot(u,wait=0,value=1,fill=1,ps="./1_Resultados/solucion2D_test6_"+i+".ps");
//plot(u,dim=3,wait=0,value=1,fill=1);

// Calculamos el error
Vh solh=sol(x,y);
error=solh-u;

// Calculamos la norma en L2 del error
real normL2=int2d(Th)(error*error);
normL2=sqrt(normL2); // Norma en L2

// Calculamos la norma en H1 del error
real normH1=int2d(Th)(error*error);
normH1=normH1+int2d(Th)(dx(error)*dx(error));
normH1=normH1+int2d(Th)(dy(error)*dy(error));
normH1=sqrt(normH1); // Norma en H1
```

```
// Imprimimos informacion por pantalla
cout<<"*****"<<endl;
cout<<"Iteracion "<<" "<<i<<" "<<"h="<<1.0/ndiv<<endl;
cout<<"Numero de vertices   "<<" "<<Th.nv<<endl;
cout<<"Numero de triangulos "<<" "<<Th.nt<<endl;
cout<<"Minimum edge size    "<<" "<<Th.hmin<<endl;
cout<<"Maximum edge size    "<<" "<<Th.hmax<<endl;
cout<<"Norma en L2 del error"<<" "<<normL2<<endl;
cout<<"Norma en H1 del error"<<" "<<normH1<<endl;

// Salvamos los errores en fichero
fileerror.scientific<<1.0/ndiv<<" "<<normL2<<" "<<normH1<<endl;
}
```


Bibliografía

- [1] Adams, R.A., Fournier, J.J.: Sobolev spaces. Elsevier (2003)
- [2] Bartle, R.G.: The elements of integration and Lebesgue measure. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York (1995)
- [3] Castillo, F., Abánades, F.: Análisis matemático II. Alhambra universidad. Alhambra (1980)
- [4] Conway, J.B.: A course in functional analysis, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 96, second edn. Springer-Verlag, New York (1990)
- [5] Evans, L.C.: Partial differential equations, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 19, second edn. American Mathematical Society, Providence, RI (2010). DOI 10.1090/gsm/019. URL <https://doi.org/10.1090/gsm/019>
- [6] Friedman, A.: Partial differential equations, original edn. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y. (1976)
- [7] Hecht, F.: *New development in FreeFem++*. J. Numer. Math. **20**(3-4), 251–265 (2012). DOI 10.1515/jnum-2012-0013
- [8] Horvath, J.: *Espaces de fonctions localement intégrables et de fonctions intégrables à support compact*. Operations Research **XXI**, 167–186 (1987)
- [9] Leoni, G.: A first course in Sobolev spaces, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 181, second edn. American Mathematical Society, Providence, RI (2017). DOI 10.1090/gsm/181. URL <https://doi.org/10.1090/gsm/181>
- [10] Raviart, P.A., Thomas, J.M.: Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris (1983)
- [11] Rudin, W.: Real and complex analysis, third edn. McGraw-Hill Book Co., New York (1987)

- [12] Salgado González, M.: *Os espazos $W^{k,1}(I)$* . Master's thesis, Universidade de Santiago de Compostela (2020). URL <https://minerva.usc.es/xmlui/bitstream/handle/10347/26194/Salgado%20Gonz%C3%A1lez%2C%20Mar%C3%ADa.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [13] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, IX-X. Hermann, Paris (1966). Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée