FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Módulos planos. Teorema de Lazard.

Nerea González Barral

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Módulos planos. Teorema de Lazard.

Nerea González Barral

Julio 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Módulos planos. Teorema de Lazard.

Área de Coñecemento: Álgebra	
Título: Módulos planos. Teorema de Lazard.	
Breve descrición do contido	
Estudio de los módulos planos, comenzando por el producto tensorial, requisito indispansable para la definición de tales módulos, y llegando hasta el teorema de Lazard, que afirma que los módulos planos son exactamente los límites directos de módulos libres de tipo finito.	
Recomendacións	
Outras observacións	

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es continuar el estudio de los módulos que se inició en el Grado, en la asignatura de Estructuras Algebraicas, considerando ahora módulos sobre un anillo arbitrario, no necesariamente conmutativo.

Comenzamos introduciendo algunos conceptos de álgebra categórica, que nos servirán más adelante para introducir los módulos planos. Damos ejemplos de categorías y funtores, donde la categoría de módulos y el funtor Hom tienen especial importancia. Además, definimos y estudiamos la exactitud de un funtor, así como los conceptos de límites directos e inversos.

A continuación, recordamos la definición de módulo libre y sus principales propiedades, presentamos los módulos proyectivos e inyectivos y probamos algunas caracterizaciones de estos.

Finalmente, introducimos el producto tensorial que nos conduce a la definición de módulo plano. Una vez estudiadas las principales propiedades de estos, presentamos en el último capítulo, el resultado principal del trabajo, el Teorema de Lazard, que nos proporciona una relación entre los módulos planos y los módulos libres finitamente generados.

Abstract

The main aim of this work is to go further in the study of modules, started in the subject of Algebraic Structures, taking modules over an arbitrary ring, not necessarily over a commutative one.

We start by introducing some concepts of categorical algebra, which will be of use when defining flat modules. We give examples of categories and functors, and give special attention to the category of modules and the Hom functor. Furthermore, we define and study the exactness of a functor as well as direct and inverse limits.

We then give a reminder of the definition of a free module and of its main properties, we also present projective and injective modules and we prove some characterizations for them.

Finally, we introduce the tensor product which leads us to the definition of flat modules. Once we have studied their main properties, we present, on the last chapter, the main result of this work, Lazard's Theorem, which gives us a relation between flat modules and finitely generated free modules.

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de los módulos, hasta llegar a los módulos planos y demostrar el teorema de Lazard, que proporciona una relación entre los módulos planos y los módulos libres de tipo finito.

Planteamos el estudio de los módulos desde el punto de vista categórico, introduciendo los conceptos y las herramientas del álgebra categórica y del álgebra homológica que necesitamos para conseguir nuestros objetivos.

En el primer capítulo se da la definición de categoría y funtor, seguida de varios ejemplos, entre ellos, dos que nos resultarán básicos para nuestro cometido: la categoría de módulos y el funtor Hom. Recordamos luego la definición de módulo y sus principales propiedades, vistas en la asignatura "Estructuras Algebraicas" (del tercer curso del Grado en Matemáticas), aunque expresándolas ahora en el caso de un anillo arbitrario (pues en la citada asignatura se consideró sólo el caso de un anillo conmutativo). Después de esa recapitulación de los conceptos ya conocidos, pasamos a la introducción de los nuevos, entre ellos el de sucesión exacta, sucesión exacta rota y funtor exacto, y el de sistema directo, sistema inverso, límite directo y límite inverso. En el caso particular de un sistema directo sobre un conjunto dirigido, probamos un par de resultados sobre el límite directo, que además de ser esenciales posteriormente en la demostración del teorema de Lazard, tienen ya aquí como primera consecuencia la exactitud de los límites directos sobre estos conjuntos.

En el segundo capítulo comenzamos recordando otro concepto ya conocido: el de módulo libre. Seguidamente pasamos a los conceptos nuevos. El primero es el de módulo proyectivo. Damos su definición y vemos su relación con los módulos libres y con la exactitud del funtor Hom. Seguidamente introducimos el concepto de base proyectiva y probamos que un módulo es proyectivo si y sólo sí tiene una base proyectiva. Después introducimos el concepto dual: el de módulo inyectivo. Damos la definición y distintas caracterizaciones de estos módulos, entre ellas el criterio de Baer. Seguidamente estudiamos la relación entre módulos inyectivos y módulos divisibles, y utilizamos este estudio para probar que todo módulo puede ser encajado en un módulo inyectivo. Terminamos este capítulo estudiando las extensiones esenciales y las envolventes inyectivas.

El capítulo tercero está dedicado al producto tensorial y a los módulos planos. Comenzamos definiendo el grupo abeliano producto tensorial de un módulo por la derecha y un módulo por la izquierda sobre un mismo anillo. Introducimos el concepto de bimódulo y vemos que en algunos casos el grupo abeliano producto tensorial admite estructura de módulo. Seguidamente, estudiamos las propiedades del producto tensorial, viendo entre otras cosas que el funtor producto tensorial asociado a un módulo es adjunto por la izquierda del funtor Hom, es exacto por la derecha y conserva límites directos.

Una vez que tenemos el producto tensorial, podemos introducir el concepto de módulo plano: un módulo es plano si el funtor producto tensorial asociado es un funtor exacto. Después de dar la definición, se estudian las primeras propiedades de estos módulos. Se introduce, por ejemplo, el módulo de caracteres de un módulo, y se prueba que un módulo es plano si y sólo sí el módulo de caracteres es inyectivo. Se da también el criterio de Villamayor, que caracteriza la planitud de un módulo en términos de una presentación libre. Se demuestra, por otra parte, que todo módulo proyectivo es plano, y después de introducir el concepto de módulo de presentación finita, se prueba un recíproco parcial de ese resultado: todo módulo plano de presentación finita es proyectivo.

En el capítulo cuarto y último, después de probar algunos resultados auxiliares sobre límites directos y sobre módulos proyectivos de tipo finito, podemos enunciar y demostrar finalmente el teorema de Lazard, que afirma que los módulos planos son exactamente los límites directos de sistemas directos de módulos libres de tipo finito sobre conjuntos dirigidos

Capítulo 1

La categoría de módulos

1.1. Preámbulo: Categorías y funtores

Comenzamos con una breve introducción de álgebra categórica, dando las definiciones de categoría y de funtor, que nos serán de gran utilidad, ya que nos ayudarán a comprender mejor la naturaleza de los módulos.

Definición 1.1. Una **categoría** consiste en:

(i) Una clase de objetos $Obj_{\mathfrak{C}}$.

(ii) Si $A, B \in Obj_{\mathfrak{C}}$, hay un conjunto de morfismos de A en B : $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

(iii) Si $A, B, C \in Obj_{\mathfrak{C}}$, existe una aplicación:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathfrak{C}}(B, C) \times Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) &\to Hom_{\mathfrak{C}}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

que se denomina composición de morfismos.

Además, se debe verificar:

1) $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathfrak{C}}(A', B') = \emptyset$ si $A \neq A'$ o $B \neq B'$.

2) Si $g \circ f$ y $f \circ h$ están definidas, entonces $(g \circ f) \circ h$ y $g \circ (f \circ h)$ están definidas y son iguales.

3) Para todo $B \in Obj_{\mathfrak{C}}$, existe $1_B \in Hom_{\mathfrak{C}}(B, B)$ tal que

$$1_B \circ f = f \quad y \quad g \circ 1_B = g$$

siempre que estén definidos.

Si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$, se dice que A es el dominio y B es el rango de f.

Se denota $Morf(\mathfrak{C}) = \bigcup Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$, con $A, B \in Obj_{\mathfrak{C}}$, a la clase de todos los morfismos de $\mathfrak{C}$.

Nótese que $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ es un conjunto, pero puede ser vacío. Además, para cada A, el morfismo identidad 1_A es único.

Algunos ejemplos de categorías son:

- $\mathfrak{C} = Conjuntos$. Consideramos la clase de los conjuntos, donde los morfismos son las funciones y la composición es la usual.
- $\mathfrak{C} = Top$. Consideramos ahora la clase de los espacios topológicos, los morifsmos son las aplicaciones continuas y la composición es la usual.
- $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$. Sea R un anillo, tenemos la categoría de R-módulos por la izquierda, donde los objetos son R-módulos por la izquierda y los morfismos son homomorfismos de R-módulos, con la composición usual.

  A partir de ahora escribiremos ${}_RM$ para referirnos a $M \in Obj_{{}_R\mathfrak{M}}$.

  Se tiene una categoría análoga para R-módulos por la derecha: $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_R$.
- Si $R = \mathbb{Z}$, tenemos $\mathbb{Z}$-módulos, es decir, grupos abelianos. Denotamos esta categoría por $\mathfrak{C} = Ab$.
- Consideremos un conjunto X cuasiordenado, es decir, con una relación binaria reflexiva y transitiva "$\leq$". Podemos construír X como categoría $\mathfrak{C}$ si definimos $Obj_{\mathfrak{C}} = X$ y $Hom_{\mathfrak{C}}(x, y)$ es un conjunto formado por un único elemento, i_y^x, si $x \leq y$, y es vacío en otro caso. La composición la definimos como $i_z^y i_y^x = i_z^x$ cuando $x \leq y \leq z$.

Una vez definidas las categorías, queremos estudiar cómo se relacionan entre ellas y para ello introducimos el concepto de funtor, que podemos pensar como una aplicación entre categorías.

Definición 1.2. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías. Un **funtor** (covariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una aplicación $Obj_{\mathfrak{C}} \to Obj_{\mathfrak{D}}$ y una aplicación $Morf(\mathfrak{C}) \to Morf(\mathfrak{D})$ que satisface:

(i) Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ B \arrow[r] & FB \end{tikzcd}$$

para $A, B \in Obj_{\mathfrak{C}}$ y $f \in Hom(A, B)$.

(ii) $F1_A = 1_{FA}$ para todo $A \in Obj_{\mathfrak{C}}$.

(iii) $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$.

Veamos algunos ejemplos de funtores en las categorías presentadas anteriormente:

- El funtor identidad $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ definido por $FA = A$ y $Ff = f$.
- El funtor **Hom** se define $F : \mathfrak{C} \to Conjuntos$. Dado un objeto A de $\mathfrak{C}$ fijado, definimos $FC = Hom_{\mathfrak{C}}(A, C)$ y si $f : C \to C'$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$, definimos $Ff : Hom_{\mathfrak{C}}(A, C) \to Hom_{\mathfrak{C}}(A, C')$, que lleva g a fg. Denotamos $Ff = f_*$.
- Si $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$, entonces el funtor Hom toma valores en la categoría Ab.
- Si fijamos un objeto D en la categoría $\mathfrak{D}$, definimos el funtor constante $|| : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ como $|C| = D\ \forall C \in Obj_{\mathfrak{C}}$ y $|f| = 1_D\ \forall f \in \mathfrak{C}$.

Se tiene también el concepto de funtor contravariante.

Definición 1.3. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías. Un **funtor contravariante** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una aplicación $Obj_{\mathfrak{C}} \to Obj_{\mathfrak{D}}$ y una aplicación $Morf(\mathfrak{C}) \to Morf(\mathfrak{D})$ que satisface:

(i) Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & FA \\ B \arrow[r] & FB \arrow[u, "Ff"'] \end{tikzcd}$$

para todo $A, B \in Obj_{\mathfrak{C}}$ y todo $f \in Hom(A, B)$.

(ii) $F1_A = 1_{FA}$ para todo $A \in Obj_{\mathfrak{C}}$.

(iii) $T(f \circ g) = (Tg) \circ (Tf)$.

Para funtores contravariantes, tenemos ejemplos análogos a los dados anteriormente:

- Fijado un objeto B en $\mathfrak{C}$, definimos $F : \mathfrak{C} \to Conjuntos$ como $FA = Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y para $f : A \to A'$ morfismo en $\mathfrak{C}$, definimos $Ff : Hom_{\mathfrak{C}}(A', B) \to Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$, que lleva g en gf y que denotamos por f^*. Este es el funtor **Hom contravariante**.
- Si $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$, entonces $F = Hom_R(-, B)$ toma valores en Ab. También se tiene para $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_R$.

Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathfrak{C}$ se llama **isomorfismo** si existe un morfismo $g : B \to A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$.

Definición 1.4. Una categoría $\mathfrak{C}$ se dice **aditiva** si cada $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano (aditivo) que cumple la ley distributiva de la suma respecto la composición, esto es, cuando tenga sentido,

$$f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h) \quad y \quad (f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h).$$

La propiedad distributiva relaciona la suma de morfismos con la composición dada en $\mathfrak{C}$. Como todo conjunto no vacío admite estructura de grupo abeliano, demandamos la propiedad distributiva en la definición.

Así, ${}_R\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_R$ son categorías aditivas. Si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son aditivas, decimos que un **funtor** (covariante o contravariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es **aditivo** si $F(f + g) = F(f) + F(g)$ para cada par de morfismos f, g en $\mathfrak{C}$ definidos en el mismo grupo.

La función $Hom_{\mathfrak{C}}(C, C') \to Hom_{\mathfrak{D}}(FC, FC')$ dada por $f \mapsto Ff$ es entonces un homomorfismo de grupos.

1.2. Módulos

Recordaremos a continuación la definición y algunos resultados de módulos ya conocidos de las asignaturas del Grado. Allí se trabajó siempre con módulos sobre un anillo conmutativo, pero la mayor parte de los resultados son válidos, con idénticas demostraciones, para módulos sobre anillos arbitrarios.

Definición 1.5. Sea R un anillo. Un **R-modulo** (por la izquierda) es un grupo abeliano M con una operación externa $A \times M \to M$; $(a, x) \mapsto ax$, verificando:

(i) $(a + b)x = ax + bx$, $\forall a, b \in R, \forall x \in M$.

(ii) $a(x + y) = ax + ay$, $\forall a \in R, \forall x, y \in M$.

(iii) $a(bx) = (ab)x$, $\forall a, b \in R, \forall x \in M$.

(iv) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in M$.

Definición 1.6. Sea M un R-módulo, $N \subset M$. Se dice que N es un **R-submódulo** de M si N es un R-módulo con las operaciones de M. Esto equivale a que N sea subgrupo de M y $a \in R, x \in N \Rightarrow ax \in N$.

Definición 1.7. Sea X un subconjunto de un módulo M. El **submódulo de M generado por X** se define como la intersección de todos los submódulos de M que contienen a X. Lo denotamos por $\langle X \rangle$.

Teorema 1.8. *Sea X un subconjunto de M. Si $X = \emptyset$, $\langle X \rangle = 0$, si $X \neq \emptyset$, entonces $X = \{\Sigma r_i x_i; r_i \in R, x_i \in X\}$.*

Definición 1.9. Un módulo M se dice **finitamente generado** o de tipo finito si existe un subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de M de forma que $\langle x_1, ..., x_n \rangle = M$. Un módulo M se dice **cíclico** si existe un elemento $x \in M$ de forma que $\langle x \rangle = M$.

Definición 1.10. Una sucesión de homomorfismos, no necesariamente finita,

$$\cdots M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \cdots$$

se dice **exacta** si para cada n se tiene $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$.

Una sucesión exacta de la forma $0 \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to 0$ se denomina **sucesión exacta corta**.

Definición 1.11. Sea $\{A_j : j \in J\}$ una familia de R-módulos. Definimos su **producto directo** como

$$\prod_{j \in J} A_j := \{(a_j)_{j \in J} : a_j \in A_j\},$$

con la estructura de módulo dada por $(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J} = (x_j + y_j)_{j\in J}$ y $r(a_j)_{j\in J} = (ra_j)_{j\in J}$, con $r \in R$.

El subconjunto del producto directo definido por

$$\bigoplus_{j\in J} A_j = \{(a_j)_{j\in J} : a_j \in A_j \text{ con } a_j = 0 \text{ para casi todo } j \in J\}$$

es un submódulo llamado **suma directa** de la familia $\{A_j : j \in J\}$.

Nótese que si el conjunto J es finito, la suma y el producto coinciden, en otro caso, la suma directa es un submódulo propio del módulo producto.

Definimos la **i-ésima proyección** $p_i : \prod_{j\in J} A_j \to A_i$ como $p_i((a_j)_{j\in J}) = a_i$ y la **i-ésima inyección** como $\lambda_i : A_i \to \bigoplus_{j\in J} A_j$ como $\lambda_i(a) = (a_j)_{j\in J}$, donde $a_j = 0$ $\forall j \neq i$ y $a_i = a$.

Teorema 1.12 (Propiedad universal de la suma directa)**.** *Sean A y $\{A_j : j \in J\}$ R-módulos. Se tiene que $A \cong \oplus_{j\in J} A_j$ si y solo si existen homomorfismos $\lambda_j : A_j \to A$ de forma que dado cualquier módulo X y cualquier familia de homomorfismos $f_j : A_j \to X$, existe un único homomorfismo $\varphi : A \to X$ con $\varphi\lambda_j = f_j$ para todo $j \in J$.*

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "\lambda_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $A = \oplus_{j\in J} A_j$ y sean $\{p_j : j \in J\}$ las proyecciones. Definimos ahora $\varphi : A \to X$ como $\varphi(a) = \sum f_j p_j(a)$. Nótese que esta es una suma finita pues $a \in \oplus A_j = A$. Este homomorfismo hace que el diagrama conmute, pues $\varphi\lambda_j = \sum f_j p_j \lambda_j(a) = f_j(a)$, ya que $p_i\lambda_j = 0$ si $i \neq j$.

Veamos ahora que es único. Supongamos que existe un homomorfismo $\psi : A \to X$ en las mismas condiciones. Entonces $\psi(a) = \sum \psi\lambda_j p_j(a) = \sum f_j p_j(a) = \phi(a)$.

Asumamos ahora que existe φ en las condiciones del teorema. Consideremos los diagramas:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & \oplus A_j & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\alpha_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & \oplus A_j \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

donde α_j es la j-ésima inyección. La existencia de ψ está garantizada por la implicación que acabamos de probar. Al componer, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[ddr, "\lambda_j"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ & \oplus A_j \arrow[d, "\psi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Usamos ahora la hipótesis para $X = A$, por lo que $\psi\varphi$ es el único homomorfismo que hace el diagrama conmutativo, pero 1_A también hace el diagrama conmutativo, por tanto $\psi\varphi = 1_A$.

Considerando ahora la otra composición:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & \oplus A_j \arrow[d, "\psi"] \\ & A \arrow[d, "\varphi"] \\ & \oplus A_j \end{tikzcd}$$

obtenemos $\varphi\psi = 1_{\oplus A_j}$, y así $A \cong \oplus A_j$.

$\square$

Teorema 1.13. *Si λ_j es la j-ésima inyección $A_j \xrightarrow{\lambda_j} \bigoplus_{j\in J} A_j$ y B es un módulo, entonces el homomorfismo*

$$\theta : Hom(\bigoplus_{j\in J} A_j, B) \to \prod_{j\in J} Hom(A_j, B)$$
$$\varphi \mapsto (\varphi\lambda_j)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Es claro que θ es un homomorfismo de grupos abelianos. Veamos que θ es epimorfismo: si $(f_j) \in \prod Hom(A_j, B)$, entonces $f_j : A_j \to B$ para todo $j \in J$. En virtud del teorema anterior, existe un único homomorfismo $\varphi : \oplus A_j \to B$ de forma que $\varphi\lambda_j = f_j$ para todo $j \in J$. Por tanto, $\theta(\varphi) = (f_j)$. Resta ver que θ es inyectiva. Sea $\varphi \in \ker\theta$, $\varphi\lambda_j = 0$ para todo $j \in J$. Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[dr, "0"'] & \oplus A_j \arrow[d, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

φ hace el diagrama conmutativo. El homomorfismo 0 también hace el diagrama conmutativo y por el teorema anterior tenemos que $\varphi = 0$.

$\square$

Observación 1.14. En términos de funtores, acabamos de ver que $Hom(-, B)$ convierte las sumas en productos. En particular conserva la suma directa finita.

Estudiemos ahora el comportamiento del funtor $Hom(B, -)$ respecto al producto de módulos.

Teorema 1.15 (Propiedad universal del producto directo)**.** *Sean A y $\{A_j : j \in J\}$ R-módulos. Se tiene que $A \cong \prod_{j\in J} A_j$ si y solo si existen homomorfismos $p_j : A \to A_j$ de forma que dado cualquier módulo X y cualquier familia de homomorfismos $f_j : X \to A_j$, existe un único homomorfismo $\varphi : X \to A$ con $p_j\varphi = f_j$ para todo $j \in J$.*

$$\begin{tikzcd} A_j & & A \arrow[ll, "p_j"'] \\ & X \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Si $A = \prod_{j\in J} A_j$, basta considerar las proyecciones. Tenemos entonces que $\varphi = (f_j)_{j\in J}$ es el único homomorfismo que hace conmutativo el diagrama.

Supongamos ahora que existen $\{p_j : j \in J\}$ en las condiciones del teorema. Veamos que entonces $A \cong \prod A_j$. Por lo probado en la primera implicación, tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p_j"] & & A_j \\ & \prod A_j \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\beta_j"'] & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \prod A_j \arrow[rr, "\beta_j"] & & A_j \\ & A \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

donde β_j son las respectivas proyecciones.

Componemos las aplicaciones para obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_j"'] \arrow[d, "\psi"] & A_j \\ \prod A_j \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[uur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

Utilizando ahora la hipótesis sobre X=A, obtenemos que $\varphi\psi$ es el único homomorfismo que hace el diagrama conmutativo, pero 1_A también lo hace, por lo que concluimos que $\varphi\psi = 1_A$.

Al componer en el otro sentido, se tiene:

$$\begin{tikzcd} \prod A_j \arrow[r, "\beta_j"'] \arrow[d, "\varphi"] & A_j \\ A \arrow[d, "\psi"] & \\ \prod A_j \arrow[uur, "\beta_j"'] & \end{tikzcd}$$

y con un razonamiento análogo, concluimos que $\psi\varphi = 1_{\prod A_j}$, por lo que $A \cong \prod A_j$.

□

Teorema 1.16. *Si* $p_j : \prod_{j \in J} A_j \to A_j$ *es la j-ésima proyección y* B *es un módulo, entonces:*

$$\theta : Hom(B, \prod A_j) \to \prod Hom(B, A_j)$$

$$\varphi \mapsto (p_j\varphi)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Análogo al Teorema 1.13.

□

Observación 1.17. Acabamos de ver que el funtor $Hom(B,-)$ conserva los productos y, en particular, las sumas finitas.

En los Teoremas 1.12 y 1.15, hemos definido la suma directa y el producto de módulos como soluciones a problemas universales, que nos permiten definir una estructura según su comportamiento de forma única salvo isomorfismos.

El problema universal que nos da la definición del producto invierte las flechas del que define la suma directa. Decimos así que son duales. Vamos a dar una definición más formal de esto.

Si $\mathfrak{U}$ es una categoría, decimos que S es una afirmación sobre $\mathfrak{U}$ si las variables de S se interpretan como objetos o morfismos de $\mathfrak{U}$.

Definición 1.18. Si S es una afirmación sobre $\mathfrak{U}$, entonces su **dual S*** es una afirmación sobre $\mathfrak{U}$ obtenida invirtiendo el sentido de las flechas, es decir, la dirección de cada morfismo, intercambiando el dominio con el codominio y la composición $\alpha\beta$ por $\beta\alpha$. La noción de dual se extiende a los diagramas.

Mostremos algunos ejemplos de conceptos con su dual.

- Identidad, isomorfismo y exactitud son conceptos autoduales.
- Núcleo (ker) y conúcleo (coker) son duales.
- Monomorfismo y epimorfismo también son conceptos duales.

Teorema 1.19. *Dados dos módulos A y B, con $i : A \to B$ monomorfismo, A es sumando directo de B (i.e., $B = iA \oplus C$, para algún submódulo C de B) si y solo si existe un homomorfismo $p : B \to A$ tal que $pi = 1_A$.*

Demostración. Si A es un sumando directo de B, definimos $p : B \to A$ como la proyección en A, por lo que $\ker p = C$. Recíprocamente, dado $p : B \to A$ tal que $pi = 1_A$, definimos C como $\ker p = C$ y así $B = iA \oplus C$. En efecto, pues dado $b \in B$, tenemos que $b = ip(b) + (b - ip(b))$, con $ip(b) \in iA$ y $(b - ip(b)) \in C$, ya que

$$p(b - ipb) = p(b) - pip(b) = p(b) - p(b) = 0.$$

Además se tiene que $iA \cap C = 0$, con lo que tenemos el resultado.

□

Definición 1.20. Decimos que una sucesión exacta corta $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ **escinde** o que es una sucesión exacta rota si existe $j : C \to B$ tal que $pj = 1_C$.

Teorema 1.21. *Una sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

escinde si, y solo si, existe $k : B \to A$ tal que $ki = 1_A$.

Demostración. Supongamos primero que la sucesión escinde. Dado $b \in B$, tenemos que $p(b - jp(b)) = 0$, por tanto $b - jp(b) \in \ker p = \operatorname{im} i$. Como i es monomorfismo, existe un único $a \in A$ tal que $i(a) = b - jp(b)$. Definimos $k(b) = a$. Veamos ahora que k es homomorfismo. Para $\lambda b + \mu b' \in B$, sea $a = k(b)$ y $a' = k(b')$, es claro que $\lambda b + \mu b' - jp(\lambda b + \mu b') = i(\lambda a + \mu a')$, luego $k(\lambda b + \mu b') = \lambda k(b) + \mu k(b')$. Sólo resta ver que $ki = 1_A$. En efecto, pues $k(i(a)) = k(i(a) - jp(i(a))) = a$, por definición de k, pues $i(a) = i(a) - jp(i(a))$.

Para el recíproco, supongamos que tenemos $k : B \to A$ tal que $ki = 1_A$. Sea $c \in C$, p es sobre, luego existe b tal que $p(b) = c$. Definimos ahora $j(c) = b - ik(b)$. Veamos que j está bien definida. Si $b' \in B$ es tal que $p(b') = c$, entonces $b - b' \in \ker p = \operatorname{im} i$ y así, $b - b' = i(a)$ para un $a \in A$. Así,

$$b - ik(b) - b' + ik(b') = b - b' - ik(b - b') = i(a) - ik(i(a)) = i(a) - i(a) = 0.$$

Por tanto j está bien definida. Además, es claro que es homomorfismo por cómo está definido. Por último, falta ver que $pj = 1_C$. Sea $c \in C$, $pj(c) = p(b - ik(b)) = p(b) - pi(k(b)) = p(b)$, pues la $pi = 0$.

□

1.3. Exactitud

Hemos definido el concepto de sucesión exacta, y ahora daremos algunas definiciones y probaremos un resultado sobre funtores que conservan este tipo de sucesiones.

Definición 1.22. Un funtor F se dice **exacto por la izquierda** si la exactitud de

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

implica la exactitud de

$$0 \to FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC.$$

F se dice **exacto por la derecha** si la exactitud de

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \to 0.$$

Nótese que si F es exacto por la izquierda, entonces $F\alpha : FA \to FB$ es monomorfismo y $\operatorname{im} F\alpha = \ker F\beta$, por lo que F conserva monomorfismos y núcleos, en el sentido de que $\ker F\beta = F(\ker \beta)$. Análogamente, si F es exacto por la derecha entonces conserva epimorfismos y conúcleos, es decir, $FC \cong FB/(\operatorname{im} F\alpha)$.

Se tiene una definición análoga para funtores contravariantes.

Definición 1.23. Un funtor contravariante F se dice **exacto por la izquierda** si la exactitud de

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$0 \to FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA.$$

F se dice **exacto por la derecha** si la exactitud de

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

implica la exactitud de

$$FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA \to 0.$$

Así, un funtor contravariante es exacto por la izquierda si y solo si $F(\text{coker } \alpha) \cong \ker F\alpha$ vía $F\beta$, y es exacto por la derecha si y solo si $F(\ker \beta) \cong \text{coker} F\beta$ vía $F\alpha$.

Definición 1.24. Un funtor es **exacto** si es exacto por la derecha y exacto por la izquierda.

Observación 1.25. Un funtor exacto por la izquierda que conserva epimorfismos es un funtor exacto. También lo es uno exacto por la derecha que conserve monomorfismos.

Teorema 1.26. *$Hom(M, -)$ es un funtor exacto por la izquierda y $Hom(-, M)$ es un funtor contravariante exacto por la izquierda, para todo módulo M.*

Demostración. Veamos que $F = Hom(M, -)$ es exacto por la izquierda. Si

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

es exacta, debemos ver la exactitud de $0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{F\alpha} Hom(M, B) \xrightarrow{F\beta} Hom(M, C)$, donde recordemos que $F\alpha(f) = \alpha f$ y $F\beta(g) = \beta g$.

Primero, veamos que $F\alpha$ es inyectivo. Si $F\alpha(f) = 0$, entonces $\alpha f = 0$ y $\alpha f(m) = \alpha(f(m)) = 0\ \forall m \in M$, como α es inyectivo por hipótesis, $f(m) = 0\ \forall m \in M$, es decir, $f = 0$.

Veamos ahora que $\operatorname{im} F\alpha \subset \ker F\beta$. Supongamos $g \in \operatorname{im} F\alpha$, $g = \alpha f$ para algún f en $Hom(M, A)$. Por tanto, $F\beta(g) = \beta g = \beta\alpha f = 0$, pues $\beta\alpha = 0$.

Solo resta ver que $\ker F\beta \subset \operatorname{im} F\alpha$. Tomamos $g \in \ker F\beta$, tenemos que $\beta g = 0$. Si $m \in M$, $\beta g(m) = \beta(g(m)) = 0$, de donde $g(m) \in \ker \beta$, por la exactitud de la sucesión original, se tiene $g(m) \in \operatorname{im} \alpha$ y existe un único $a \in A$ de forma que $\alpha(a) = g(m)$. Definimos $f(m) = \alpha^{-1}(g(m))$ y así $g = \alpha f$.

□

1.4. Límites directos

Hasta ahora, hemos estudiado el funtor Hom. En esta sección presentaremos un nuevo funtor que nos resultará de gran utilidad en el futuro.

Recordemos que podemos considerar un conjunto cuasiordenado I como una categoría tal y como hicimos al principio del capítulo.

Definición 1.27. Sea I un conjunto cuasiordenado y $\mathfrak{C}$ una categoría. Llamamos entonces un **sistema directo en $\mathfrak{C}$ con conjunto de índices** I a un funtor $F : I \to \mathfrak{C}$.

Equivalentemente, un sistema directo en $\mathfrak{C}$ con conjunto de índices I es una familia de objetos $\{F_i\}_{i \in I}$ y una familia de morfismos $\{\varphi_i^j : i \leq j\}$ de forma que:

(i) $\varphi_i^i : F_i \to F_i$ es la identidad en F_i.

(ii) Si $i \leq j \leq k$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "\varphi_k^i"] \arrow[dr, "\varphi_j^i"'] & & F_k \\ & F_j \arrow[ur, "\varphi_k^j"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos algunos ejemplos de sistemas directos :

- Para cualquier I, fijamos un módulo A y $A_i = A \; \forall i \in I$, $\varphi_j^i = 1_A \; \forall i \leq j$. Este es el **sistema directo constante con índices** I y lo denotamos por $|A|$.

- Consideramos I con el cuasiorden trivial : $i \leq j \iff i = j$. Un sistema directo con conjunto de índices I es una familia de módulos $\{A_i : i \in I\}$.

- Si $I = \{1, 2, 3\}$, con cuasiorden $1 < 2$ y $1 < 3$. Un sistema directo con índices I es un diagrama

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_3 \\ F_2 & \end{tikzcd}$$

- Sea $I = \mathbb{N}$ con el orden usual. Un sistema directo es una sucesión:

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to \cdots$$

- Si A es un módulo, entonces la familia de los submódulos finitamente generados de A es cuasiordenada para la inclusión. Esta familia con todo posible homomorfismo de inclusión es un sistema directo sobre sí mismo.

Definición 1.28. Sea $F = \{F_i, \varphi_j^i\}$ un sistema directo en $\mathfrak{C}$. El **límite directo** sobre este sistema se denota por $\varinjlim F_i$, es un objeto y una familia de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$, con $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$ cuando $i \leq j$, satisfaciendo la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Para cada objeto X y cada familia de morfismos $\{f_i : F_i \to X\}$ con $f_i = f_j \varphi_j^i$ para $i \leq j$, existe un único homomorfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ que hace que el diagrama conmute.

Si existe el límite directo, entonces es único salvo isomorfismos.

La unicidad del límite directo es consecuencia de su definición como solución de un problema universal.

Teorema 1.29. *El límite directo de un sistema directo de módulos $\{F_i, \varphi_j^i\}$ existe.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $\lambda_i : F_i \to \oplus F_i$ la i-ésima inyección en la suma. Definimos

$$\varinjlim F_i = (\bigoplus_{i \in I} F_i)/S$$

donde S es el submódulo generado por todos los elementos $\lambda_j \varphi_j^i a_i - \lambda_i a_i$, con $a_i \in F_i$ y $i \leq j$. Si uno define $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ como $a_i \mapsto \lambda_i a_i + S$, entonces $\{(\bigoplus_{i \in I} F_i)/S, \alpha_i\}$ es solución al problema universal. Pues para

$$
\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{i\in I} F_i)/S \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

basta definir $\beta((a_i)) = (f_i(a_i))$.

$\square$

Calculemos ahora los límites de los ejemplos de los sistemas directos dados anteriormente:

- El límite directo del sistema directo constante $|A|$ es A.
- Si I es el cuasiorden trivial, entonces $\underrightarrow{lim} F_i = \bigoplus F_i$. Esto puede verse de dos modos. Como no hay φ_j^i para $i \neq j$, lo tenemos por la definición de suma como solución a un problema universal. Alternativamente, el submódulo S es 0, pues $\varphi_i^i = 1_{F_i}$.
- Si I es el cuasiorden de tres elementos dado anteriormente, entonces el sistema directo se conoce como **pushout**.

Veamos este último ejemplo con más detalle. Dado un sistema directo de módulos con conjunto de índices I, donde I es el cuasiorden de tres elementos, podemos construír su pushout del siguiente modo, distinto al visto en el teorema anterior. Consideramos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "g'"] \\
B \arrow[r, "f'"'] & D
\end{tikzcd}
$$

donde $D = (C \oplus B)/W$, con $W = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$, $f'(b) = (0, b) + W$ y $g'(c) = (c, 0) + W$. Comprobemos que, en efecto, es límite directo. Claramente conmuta, pues

$f'(g(a)) = (0, g(a)) + W = (f(a), 0) + W = g'(f(a))$. Si tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "g'"'] \arrow[ddr, "g''"] & \\
B \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, "f''"'] & D \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

basta definir $\gamma : D \to X$ como $\gamma(c, b) = g''(c) + f''(b)$. Así, el diagrama conmuta. Resta ver que γ es único. Supongamos que existe otro homomorfismo $h : D \to X$ que hace el diagrama conmutativo, entonces $(h \circ g')(c) = h(c, 0) = g''(c)$ y $(h \circ f')(b) = h(0, b) = f''(b)$. Por tanto $h(c, b) = h(c, 0) + h(0, b) = g''(c) + f''(c)$ y así, $h = \gamma$.

Concluimos entonces que D con f' y g' es límite directo.

Además, se tiene que si f es inyectiva, entonces f' también lo es. En efecto, pues por ser f inyectiva, podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "g'"'] \arrow[ddr, "\tau"] & \\
B \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, "1_B"'] & D \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

donde $\tau : C \to B$ se define como $\tau(x) = g(f^{-1}(x))$ para $x \in f(A)$ y $\tau(x) = 0$ en otro caso. Nótese que τ está bien definida por ser f inyectiva y hace que el diagrama conmute, luego usando la propiedad universal del límite directo, tenemos que existe un único morfismo $\gamma : D \to B$ que hace conmutativo el diagrama. Ahora, $1_B = \gamma \circ f'$, por tanto, f' es inyectiva.

Definición 1.30. Sean $E : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ y $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ funtores. Una **transformación natural** $t : E \to F$ es una clase de morfismos $t_A : EA \to FA$, uno por cada objeto A de $\mathfrak{U}$, que da la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "Ef"] \arrow[d, "t_A"'] & EA' \arrow[d, "t_{A'}"] \\
FA \arrow[r, "Ff"] & FA'
\end{tikzcd}$$

para todo morfismo $f : A \to A'$ en $\mathfrak{U}$.

Se tiene una definición similar si E y F son contravariantes.

Observación 1.31. Los funtores $\mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ forman una categoría si definimos

$$Hom(F, G) = \{\text{todas las transformaciones naturales } F \to G\}.$$

Normalmente, asumimos que $\mathfrak{U}$ es una “categoría pequeña”, i.e., la clase de todos los morfismos es un conjunto.

Como I es una categoría pequeña, los sistemas directos forman una categoría, que denotaremos como $Dir(I)$. Así, $\varinjlim F_i : Dir(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ es un funtor. Recordamos que $\varinjlim F_i = (\oplus F_i)/S$.

Si $t : \{F_i, \varphi^i_j\} \to \{G_i, \psi^i_j\}$ es una transformación natural y si $\varinjlim G_i = (\oplus G_i)/S'$, definimos $\overrightarrow{t} : \varinjlim F_i \to \varinjlim G_i$ como $\sum \lambda_i a_i \mapsto \sum \lambda'_i t_i a_i + S'$, donde λ_i, λ'_i son las respectivas inyecciones en la suma.

Definición 1.32. Un conjunto cuasiordenado I es **dirigido** si para cada $i, j \in J$, existe $k \in J$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Teorema 1.33. *Sea $\{A_i, \varphi^i_j\}$ un sistema directo con conjunto de índices dirigido, sea λ_i la i-ésima inyección en la suma y sea $\varinjlim A_i = (\oplus A_i)/S$. Se tiene:*

(i) $\varinjlim A_i$ consiste en todos los $\lambda_i a_i + S$;

(ii) $\lambda_i a_i + S = 0 \iff \varphi^i_t a_i = 0$, para algún $t \geq i$.

Demostración. $\varinjlim A_i$ está formado por los elementos de la forma $x = \sum \lambda_i a_i + S$. Como I es dirigido, existe un índice $j \geq i$, para todo i en la suma de x. Para cada i, definimos $b^i = \varphi^i_j a_i \in A_j$, de forma que $b = \sum b^i \in A_j$.

Entonces $\sum \lambda_i ai - \lambda_j b = \sum (\lambda_i a_i - \lambda_j b^i) = \sum (\lambda_i a_i - \lambda_j \varphi^i_j a_i) \in S$, lo que prueba (i).

Si $\varphi^i_t a_i = 0$, entonces $\lambda_i a_i = \lambda_i a_i - \lambda_t \varphi^i_t a_i \in S$ y así, $\lambda_i a_i + S = 0$. Recíprocamente, si $\lambda_i a_i + S = 0$, i.e., $\lambda_i a_i \in S$, como cualquier escalar múltiplo de un elemento de S, $\lambda_k \varphi^j_k a_j - \lambda_j a_j$, es de la misma forma, tenemos la expresión:

$$\lambda_i a_i = \sum_j (\lambda_k \varphi^j_k a_j - \lambda_j a_j) \in S.$$

Tomamos un índice $t \in I$ mayor que todos los índices de la expresión anterior.

$$\lambda_t \varphi^i_t a_i = (\lambda_t \varphi^i_t a_i - \lambda_i a_i) + \lambda_i a_i = (\lambda_t \varphi^i_t a_i - \lambda_i a_i) + \sum_j (\lambda_k \varphi^j_k a_j - \lambda_j a_j)$$

Podemos reescribir los términos de la suma como:

$$\lambda_k \varphi^i_k a_j - \lambda_j a_j = (\lambda_t \varphi^j_t a_j - \lambda_j a_j) + [\lambda_t \varphi^k_t (-\varphi^j_k a_j) - \lambda_k (\varphi^j_k a_j)],$$

pues $\varphi^k_t \varphi^j_k = \varphi^j_t$ por la definición de sistema directo. Y así:

$$\lambda_t \varphi^i_t a_i = \sum_j (\lambda_t \varphi^j_t a_j - \lambda_j a_j).$$

Con un cambio de notación, podemos asumir que hemos combinado los términos obteniendo el mismo índice superior para todo j. Concluimos que si $j \neq t$, entonces $\lambda_j a_j = 0$, luego $a_j = 0$, pues el elemento $\lambda_j \varphi_t^i a_i$ tiene coordenada j-ésima 0; si $t = j$, entonces $\lambda_t \varphi_t^j a_j - \lambda_j a_j = 0$, pues $\varphi_t^j = \varphi_t^t = id$. Por tanto, cada término de la derecha es cero y $\lambda_t \varphi_t^i a_i = 0$, por lo que concluimos que $\varphi_t^i a_i = 0$.

□

Consideramos la construcción usual de la unión disjunta $\sqcup A_i$.

Definición 1.34. Sea I un conjunto de índices dirigido y sea $\{A_i, \varphi_j^i\}$ un sistema directo sobre I. Si $X = \sqcup A_i$, definimos una relación de equivalencia en X:

$$a_i \sim a_j, a_i \in A_i, a_j \in A_j \quad \text{si existe} \quad k \geq i, j \quad \text{con} \quad \varphi_k^i a_i = \varphi_k^j a_j.$$

Denotamos la clase de a_i por $[a_i]$.

Si $\{A_i, \varphi_j^i\}$ es un sistema directo sobre un conjunto de índices dirigido, consideramos L el conjunto cociente con la relación de equivalencia que acabamos de definir. L tiene estructura de R-módulo con las siguientes operaciones:

$$r[a_i] = [ra_i] \text{ si } r \in R$$

$$[a_i] + [a'_j] = [a_k + a'_k], \text{ donde } k \geq i, j \text{ y } a_k = \varphi_k^i a_i, a'_k = \varphi_k^j a_j.$$

Así, el homomorfismo $\varinjlim A_i \to L$ definido por $\lambda_i a_i + S \mapsto [a_i]$ es un isomorfismo.

Teorema 1.35. *Sea I un conjunto cuasiordenado dirigido. Supongamos que existen morfismos de sistemas directos sobre I:*

$$\{A_i, \varphi_j^i\} \xrightarrow{t} \{B_i, \psi_j^i\} \xrightarrow{s} \{C_i, \theta_j^i\}$$

tal que :

$$0 \to A_i \xrightarrow{t_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \to 0$$

es exacta para todo $i \in I$. Entonces la siguiente sucesión de módulos

$$0 \to \varinjlim A_i \xrightarrow{\vec{t}} \varinjlim B_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim C_i \to 0$$

es exacta.

Demostración. Es claro que $\vec{s}$ es sobreyectiva, pues todo elemento de $C = (\oplus C_i)/W$ es de la forma $\gamma_i c_i + W$, donde $\gamma_i : C_i \to \oplus C_i$ es inyección en la suma, y todas las s_i son sobreyectivas.

Veamos que $\overrightarrow{t}$ es inyectiva. Asumamos que $x \in \underrightarrow{lim} A_i$ y $\overrightarrow{t}x = 0$ en $\underrightarrow{lim} B_i$. Tomamos $\underrightarrow{lim} A_i = (\oplus A_i)/S$ y fijamos $\lambda_i : A_i \to \oplus A_i$ la i-ésima inyección. Por tanto, $x = \lambda a_i + S$. Tomamos $\underrightarrow{lim} B_i = (\oplus B_i)/T$ y $\mu_i : B_i \to \oplus B_i$ la i-ésima inyección. Así, $\overrightarrow{t}x = \mu_i t_i a_i + T$. Como $\overrightarrow{t}x = 0$, existe $j \geq i$ con $\psi^i_j t_i a_i = 0$. Como t es un morfismo entre sistemas directos, tenemos $t_j \varphi^i_j a_i = 0$. Pero t_j es inyectiva, luego $\varphi^i_j a_i = 0$ y por tanto $x = \lambda_i a_i + S = 0$.

Es inmediato que im $\overrightarrow{t} \subset \ker \overrightarrow{s}$. Solo resta ver que $\ker \overrightarrow{s} \subset$ im $\overrightarrow{t}$. Si $x \in \ker \overrightarrow{s}$, x es de la forma $x = \mu_i x_i + T$, por lo que $\overrightarrow{s}(x) = \gamma_i s_i x_i + W = 0$. Es decir, $\gamma_i s_i x_i \in W$, pero esto significa que $\theta^i_j s_i x_i = 0$ para algún $j \in I$ tal que $i \leq j$. Ahora, por ser transformación natural, tenemos $\theta^i_j s_i x_i = s_j \psi^i_j x_i = 0$, por lo que $\psi^i_j x_i \in \ker s_j = \operatorname{im} t_j$ y así $\psi^i_j x_i = t_j a$ para algún $a \in A_j$. Concluimos entonces que $\mu_i x_i + T = \mu_j \psi^i_j x_i + T \in$ im $\overrightarrow{t}$.

□

1.5. Límites inversos

Como hemos visto antes, a veces resulta interesante considerar conceptos duales. En este caso, el dual del límite directo es el límite inverso, que, al invertir el sentido de las flechas, como es natural, resultará un funtor contravariante. Definámoslo formalmente.

Definición 1.36. Sea I un conjunto cuasiordenado y $\mathfrak{C}$ una categoría. Un **sistema inverso en $\mathfrak{C}$ con conjunto de índices** I es un funtor contravariante $F : I \to \mathfrak{C}$.

Equivalentemente, un sistema inverso en $\mathfrak{C}$ con conjunto de índices I es una familia de objetos $\{F_i\}_{i\in I}$ y una familia de morfismos $\{\psi^i_j : i \leq j\}$ de forma que:

(i) $\psi^i_i : F_i \to F_i$ es la identidad en Fi.

(ii) Si $i \leq j \leq k$, tememos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F_k \arrow[rr, "\psi^k_i"] \arrow[dr, "\psi^k_j"'] & & F_i \\
& F_j \arrow[ur, "\psi^j_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Tenemos ejemplos duales a los dados anteriormente para sistemas directos:

- Para un conjunto cuasiordenado I, el sistema directo constante $|A|$ con índices I también es un sistema inverso con conjunto de índices I.

- Si I es el cuasiorden trivial, entonces una familia de módulos $\{A_i : i \in I\}$ es un sistema inverso con conjunto de índices I.

- Si I es el conjunto cuasiordenado de tres elemento de antes, un sistema directo con conjunto de índices I es un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F_2 \arrow[d] \\ F_3 \arrow[r] & F_1 \end{tikzcd}$$

- Si $I = \mathbb{N}$ con el orden usual, entonces un sistema inverso con conjunto de índices I es una sucesión:

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow A_4 \leftarrow A_5 \leftarrow \cdots$$

Igual que hicimos antes, podemos definir el límite de un sistema inverso.

Definición 1.37. Sea $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ un sistema directo en $\mathfrak{C}$. El **límite inverso** de este sistema, denotado $\varprojlim F_i$, es un objeto y una familia de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ con $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ cuando $i \leq j$ satisfaciendo la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\ & F_i & \\ & F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] & \end{tikzcd}$$

Para cada objeto X y cada familia de morfismos $f_i : X \to F_i$, con $f_i = \psi_i^j f_j$, existe un único $\beta : X \to \varprojlim F_i$ haciendo que el diagrama conmute.

Tenemos también que $\varprojlim F_i$ es único salvo isomorfismos.

Teorema 1.38. *El límite inverso de un sistema inverso de módulos* $\{F_i, \psi_i^j\}$ *existe.*

Demostración. Como el límite directo es un cociente de la suma, su dual, el límite inverso debiera ser un submódulo del producto. En efecto, para cada $i \in I$, sea p_i la i-ésima proyección $p_i : \prod F_i \to F_i$. Definimos:

$$\varprojlim F_i = \{(a_i) \in \prod F_i : a_i = \psi_i^j a_j \text{ cuando } i \leq j\}$$

Si uno define $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ como la restricción $p_{i|\varprojlim F_i}$, hemos resuelto el problema.

En efecto, si tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

con los α_i definidos arriba, basta definir $\beta : X \to \varprojlim F_i$ como $\beta(x) = (f_i(x))$. Así, claramente, el diagrama conmuta. □

Calculemos ahora los límites inversos de los sistemas inversos dados anteriormente:

- El límite inverso del sistema inverso constante $|A|$ es A.
- Si I tiene el cuasiorden trivial, el límite inverso del sistema inverso con conjunto de índices I es, como era de esperar, el producto $\varprojlim F_i = \prod F_i$.
- Si I es el cuasiorden de tres elementos considerado previamente, el límite inverso se conoce como **pullback o producto fibrado**.

Como comentamos anteriormente, dados dos funtores contravariantes, tenemos una definición de transformación natural entre ellos, análoga a la definición de transformación natural entre funtores covariantes. Veamos el caso particular de sistemas inversos.

Definición 1.39. Si I es un conjunto cuasiordenado, un morfismo $t : \{F_i, \varphi_i^j\} \to \{G_i, \psi_i^j\}$ entre sistemas inversos con conjunto de índices I es una familia de aplicaciones haciendo que los siguientes diagramas conmuten si $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd}
F_j \arrow[r, "t_j"] \arrow[d, "\varphi_i^j"'] & G_j \arrow[d, "\varphi_i^j"] \\
F_i \arrow[r, "t_i"] & G_i
\end{tikzcd}$$

Igual que lo hacían los sistemas directos, todos los sistemas inversos con sus morfismos forman una categoría $Inv(I)$. Ahora, $\varprojlim : Inv(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ es un funtor.

Resta definir $\overleftarrow{t} : \varprojlim F_i \to \varprojlim G_i$ para una transformación $t : \{F_i, \varphi_i^j\} \to \{G_i, \psi_i^j\}$, y se define:

$$\overleftarrow{t} : (a_i) \mapsto (t_i a_i).$$

Capítulo 2

Módulos proyectivos e inyectivos

En este capítulo estudiaremos distintos tipos de módulos. Distinguiremos además su comportamiento respecto al funtor Hom, que recordemos era exacto por la izquierda.

2.1. Módulos libres

Recordemos primero la definición de módulo libre.

Definición 2.1. Un R-módulo A se dice **libre** si tiene una base, esto es, una familia de generadores linealmente independientes.

Dada una base $\{a_i : i \in I\}$, cada $a \in A$ se expresa de forma única como combinación R-lineal de los elementos de la base:

$$a = \sum r_i a_i,$$

donde $r_i \in R$ y $r_i = 0$ para casi todo $i \in I$.

Recordemos que un R-módulo es libre si y solo si es isomorfo a una suma directa de copias del anillo R.

Recordamos ahora tres resultados importantes ya vistos para módulos libres.

Teorema 2.2. *Sea $X = \{a_i : i \in I\}$ una base de un módulo libre A. Dado un módulo B y una función $f : X \to B$, existe un único homomorfismo $\tilde{f} : A \to B$ extendiendo f.*

Teorema 2.3. *Si X es un conjunto, existe un módulo libre A que tiene a X como base.*

Teorema 2.4. *Todo módulo M es cociente de un módulo libre.*

Este teorema nos dice que podemos hablar de M en términos de generadores y relaciones. Si A es libre con base X y $f : X \to M$ es sobreyectiva, entonces llamamos a los elementos de X **generadores** de M y $\ker f$ se conoce como **submódulo de relaciones**.

Definición 2.5. Una **resolución libre** de un módulo M es una sucesión exacta

$$\cdots F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

en la que cada F_n es un módulo libre.

Teorema 2.6. *Todo módulo M admite una resolución libre.*

Demostración. Como todo módulo es cociente de un módulo libre, existe un módulo F_0 y una sucesión exacta corta

$$0 \to S_0 \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

Ahora, lo mismo le pasa a S_0, por tanto tenemos

$$0 \to S_1 \to F_1 \to S_0 \to 0$$

y por inducción obtenemos

$$0 \to S_n \to F_n \to S_{n-1} \to 0.$$

Conectamos todas las sucesiones para obtener el siguiente diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots F_3 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[rr, "\varepsilon"] & & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
\cdots 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos d_n son las composiciones indicadas en el diagrama. Para todo n, $\ker d_n = S_n$ y $\operatorname{im} d_n = S_{n-1}$. Por tanto $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ y la fila de arriba es exacta.

□

Teorema 2.7. *Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión inferior es exacta. Si F es libre y $\alpha : F \to C$ es un homomorfismo, entonces existe $\gamma : F \to C$ de forma que $\alpha = \beta\gamma$.

Demostración. Sea $X = \{x_i : i \in I\}$ una base F. Como β es sobreyectiva, cada αx_i puede levantarse, es decir, existe un elemento $b_i \in B$ con $\beta b_i = \alpha x_i$. El axioma de elección nos da una función $\varphi : x \to B$ con $\varphi x_i = b_i$, para todo $i \in I$. Ahora, existe un homomorfismo $\gamma : F \to B$ con $\gamma x_i = \varphi x_i$ para todo $i \in I$. Como $\beta\gamma x_i = \beta\varphi x_i = \beta b_i = \alpha x_i$ para todo $i \in I$, tenemos que $\alpha = \beta\gamma$.

□

Corolario 2.8. *Si F es un módulo libre, entonces el funtor Hom(F,-) es exacto.*

Demostración. Como Hom(F,-) es exacto por la izquierda, basta ver que preserva los epimorfismos. Si $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es exacta, veamos que $\mathrm{Hom}(F, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(F, C) \to 0$ es exacta, esto es, si $f \in \mathrm{Hom}(F, C)$, entonces $f = \beta_*(g) = \beta g$ para algún $g \in \mathrm{Hom}(F, B)$. Pero por lo que acabamos de ver, tenemos

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

2.2. Módulos proyectivos

Definición 2.9. Decimos que P es un **módulo proyectivo** si, dado un diagrama de homomorfismos de módulos con filas exactas

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe $\gamma : F \to B$ haciendo el diagrama conmutativo.

Observación 2.10. Nótese que, con esta definición, **todo módulo libre es proyectivo**.

Teorema 2.11. *Un módulo P es proyectivo si y solo si $Hom(P, -)$ es exacto.*

Demostración. Lo visto para módulos libres prueba que si P es proyectivo, $Hom(P, -)$ es exacto. Supongamos ahora que si $Hom(P, -)$ es exacto. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\beta_* : Hom(P,B) \to Hom(P,C)$ es sobreyectiva, existe $g \in Hom(P,B)$ con $f = \beta_*(g) = \beta g$; lo que demuestra que P es proyectivo. $\square$

Ya hemos visto que todo módulo libre es proyectivo. Es razonable preguntarse si todo módulo proyectivo es libre. Veamos que la respuesta es negativa.

Teorema 2.12. *Si P es proyectivo y $\beta : B \to P$ es sobreyectiva, entonces $B = \ker\beta \oplus P'$, donde $P' \cong P$.*

Demostración. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[ld, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe un $\gamma : P \to B$ con $\beta\gamma = 1_P$. Ahora, γ es necesariamente inyectiva y por el Teorema 1.19, tenemos el resultado.

$\square$

Corolario 2.13. *Si A es un submódulo de B con B/A proyectivo, entonces A es un sumando directo de B. Toda sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to P \to 0$, con P proyectivo, escinde.*

Teorema 2.14. *Un módulo P es proyectivo si y solo si es un sumando directo de un módulo libre. Además, todo sumando directo de un módulo proyectivo es proyectivo.*

Demostración. Por el Teorema 2.4, existe un módulo libre F y un epimorfismo $F \to P$. Ahora, por el Teorema 2.12, P es isomorfo a un sumando directo de F.

Veamos el recíproco. Existen homomorfismos $i : P \to F$ y $p : F \to P$ con $pi = 1_P$. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & P \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como F es proyectivo, existe un homomorfismo $\gamma : F \to B$ con $\beta\gamma = fp$. Definimos $g : P \to P$ como $g = \gamma i$. Como $\beta g = \beta\gamma i = fpi = f$, tenemos que P es proyectivo.

$\square$

Podemos dar un ejemplo de un anillo, cuyos sumandos no son libres. Si $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es proyectivo, pero no es un R-módulo libre.

Teorema 2.15 (Base proyectiva)**.** *Un módulo A es proyectivo si y solo si existen elementos $\{a_k : k \in K\} \subset A$ y R-homomorfismos $\{\varphi_k : A \to R : k \in K\}$ tal que*

(i) si $x \in A$, entonces $\varphi_k x = 0$ para casi todo $k \in K$;

(ii) si $x \in A$, entonces $x = \sum_{k \in K} \varphi_k(x) a_k$.

Además, A está generado por $\{a_k : k \in K\}$.

Demostración. Supongamos que A es proyectivo y sea $\psi : F \to A$ un epimorfismo de algún módulo libre F. Por el Teorema 2.12, existe un homomorfismo $\varphi : A \to F$ con $\psi\varphi = 1_A$. Sea $\{e_k : k \in K\}$ una base de F. Si $x \in A$, φx tiene una expresión única,

$$\varphi x = \sum r_k e_k,$$

donde $r_k \in R$ y $r_k = 0$ para casi todo $k \in K$. Definimos $\varphi_k : A \to R$ como $\varphi_k x = r_k$. Así, $\varphi_k x = 0$ para casi todo $k \in K$. Si definimos $a_k = \psi e_k$, entonces, como ψ es sobreyectiva, $\{a_k : k \in K\}$ genera A. Además, si $x \in A$, tenemos

$$x = \psi\varphi x = \psi(\sum r_k e_k) = \sum(\varphi_k x)\psi e_k = \sum(\varphi_k x) a_k.$$

Recíprocamente, supongamos que existen $\{a_k : k \in K\}$ y $\{\varphi_k : A \to R : k \in K\}$. Sea F un módulo libre con base $\{e_k : k \in K\}$ y definamos un homomorfismo $\psi : F \to A$ que lleve $e_k \mapsto a_k$. Basta proporcionar un homomorfismo $\varphi : A \to F$ con $\psi\varphi = 1_A$. Definimos $\varphi : A \to F$ como $x \mapsto \sum(\varphi_k x)e_k$; esta suma es finita en virtud de (i), por tanto φ está bien definido. Además, por la condición (ii),

$$\psi\varphi x = \psi \sum(\varphi_k x)e_k = \sum(\varphi_k x)\psi e_k = \sum(\varphi_k x)a_k = x.$$

Por lo que concluimos, $\psi\varphi = 1_A$. □

Si los conjuntos $\{a_k : k \in K\} \subset A$ y $\{\varphi_k : A \to R : k \in K\}$ cumplen las condiciones del teorema anterior, se dice que forman una **base proyectiva**.

2.3. Módulos inyectivos

Una vez definidos los módulos proyectivos, podemos considerar ahora la definición dual, esto es, inviertiendo el sentido de las flechas del diagrama. Obtenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.16. Un módulo E es **inyectivo** si para cada módulo B y cada submódulo A de B, cada $f : A \to E$ puede extenderse a un homomorfismo $g : B \to E$. Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Siendo la definición de módulo inyectivo dual a la de módulo proyectivo, obtenemos algunos resultados duales. En esta sección veremos algunos de ellos.

Teorema 2.17. *Un módulo E es inyectivo si y solo si $Hom(-, E)$ es exacto.*

Demostración. Supongamos que E es inyectivo. Como $\mathrm{Hom}(-, E)$ es un funtor contravariante exacto por la izquierda, basta probar que lleva monomorfismos en epimorfismos. Si $\alpha : A \to B$ es inyectiva, veamos que $\alpha^* : \mathrm{Hom}(B, E) \to \mathrm{Hom}(A, E)$ es sobreyectiva.

Si $f \in \mathrm{Hom}(A, E)$, tenemos el siguiente diagrama, pues α es inyectiva y E es un módulo inyectivo,

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

por tanto, existe g tal que $f = g\alpha$ y así, α^* es sobreyectiva.

Recíprocamente, si tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

como la fila de abajo es exacta, α es inyectiva. Ahora, por ser $\mathrm{Hom}(-, E)$ contravariante exacto, $\alpha^* : \mathrm{Hom}(B, E) \to \mathrm{Hom}(A, E)$ es sobreyectiva por lo que existe $g \in \mathrm{Hom}(B, E)$ tal que $g\alpha = f$ y así, E es un módulo inyectivo.

$\square$

Teorema 2.18. *Si $\{E_j : j \in J\}$ es una familia de módulos inyectivos, entonces $\prod E_j$ es inyectivo.*

Demostración. Sea λ_j y p_j las inyecciones y proyecciones en el producto $\prod E_j$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \prod E_j \arrow[r, shift left, "p_j"] & E_j \arrow[l, shift left, "\lambda_j"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, dashed, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

Como E_j es inyectivo, existe un homomorfismo $g_j : B \to E_j$ con $g_j\alpha = p_j f$. Definimos $h : B \to \prod E_j$ como $b \mapsto (g_j b)$. Entonces $h\alpha(a) = (g_j\alpha(a)) = (p_j f(a)) = f(a)$, así $h \circ \alpha = f$ y $\prod E_j$ es un módulo inyectivo.

$\square$

Teorema 2.19. *Cada sumando directo D de un módulo inyectivo E es inyectivo.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[r, shift left, "\lambda"] & E \arrow[l, shift left, "p"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

donde λ y p son la inyección y la proyección respectivamente. Como E es inyectivo, existe un homomorfismo $g : B \to E$ con $g\alpha = \lambda f$. Definimos $h : B \to D$ como $h = pg$. Entonces $h\alpha = pg\alpha = p\lambda f = f$, pues $p\lambda = 1_D$. Así, concluimos que D es inyectivo.

$\square$

Teorema 2.20. *Un módulo E es inyectivo si y solo si cada sucesión exacta corta*

$$0 \to E \xrightarrow{i} B \to C \to 0$$

escinde. En particular, E es un sumando directo de B.

Demostración. Supongamos que E es inyectivo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Existe un homomorfismo $g : B \to E$ con $gi = 1_E$, por lo que la sucesión escinde.

Recíprocamente, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

y construímos el siguiente diagrama pushout, tal y como hicimos en el capítulo 1,

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "\alpha'"] & P \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Tenemos que el homomorfismo α' es inyectivo por serlo α. Por hipótesis, existe un homomorfismo $\beta : P \to E$ con $\beta\alpha' = 1_E$, pues $0 \to E \xrightarrow{\alpha'} P \to P/\alpha'(E) \to 0$ es exacta. Definimos ahora $g : M \to E$ como $g = \beta f'$. Entonces $g\alpha = \beta f'\alpha = \beta\alpha' f = f$, entonces E es inyectivo.

$\square$

Teorema 2.21 (Criterio de Baer)**.** *Sea E un R-módulo. Son equivalentes:*

(i) E es inyectivo.

(ii) Para cada ideal por la izquierda I de R y cada homomorfismo de R-módulos $\gamma : I \to E$ existe un homomorfismo de R-módulos $f : R \to E$ que extiende a γ.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\gamma"'] & & R \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Demostración. Está claro que (i) implica (ii) pues la inclusión en un homomorfismo inyectivo. Veamos que (ii) implica (i).

Consideramos el diagrama de R-módulos

$$\begin{tikzcd} E & \\ M' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, tail] & M \end{tikzcd}$$

Tenemos que demostrar que existe un homomorfismo de M a E que hace el diagrama conmutativo. Sea Σ el conjunto formado por todos los pares (N, β_N) tal que $M' \subset N \subset M$, $\beta_N : N \to E$ es un homomorfismo de R-módulos y $\beta_{N_{|M'}} = \lambda$.

$\Sigma \neq \emptyset$, ya que $(M', \lambda) \in \Sigma$. Se tiene la siguiente relación de orden en Σ:

$$(N_1, \beta_{N_1}) \leq (N_2, \beta_{N_2}) \iff \begin{cases} N_1 \subset N_2 \\ \beta_{N_{2|N_1}} = \beta_{N_1} \end{cases}$$

Es claro que una cadena $\{(N_i, \beta_i)\}$ en Σ está acotada por $(\cup N_i, \beta)$, donde $\beta(x) = \beta_i(x)$ para $x \in X_i$. Ahora, por el lema de Zorn, existe (N_0, β_{N_0}) elemento maximal de Σ. Veremos ahora que $N_0 = M$. Supongamos que existe un $x \in M$ que no está en N_0. Consideramos $I := \{r \in R / rx \in N_0\}$. I es un ideal por la izquierda de R.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\gamma"'] & R \\ & E \end{tikzcd}$$

donde $\gamma(r) := \beta_{N_0}(rx)$. γ es un homomorfismo de R-módulos.

$$\gamma(r'r) = \beta_{N_0}(r'rx) = r'\beta_{N_0}(rx) = r'\gamma(r).$$

Por hipótesis, existe $\beta : R \to E$ que extiende γ. Tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail] \arrow[dr, "\lambda"'] & N_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, "\beta_{N_0}"] & N_0 + Rx \arrow[r, tail] \arrow[dl, dashed, "\tau"] & M \\ & E & & \end{tikzcd}$$

donde definimos $\tau(n_0 + rx) := \beta_{N_0}(n_0) + \beta(r)$. Veamos que τ está bien definida. En efecto, pues si $n_0 + rx = n_0' + r'x$, tenemos que

$$n_0 - n_0' = (r' - r)x \Rightarrow r - r' \in I \Rightarrow \beta(r - r') = \gamma(r - r') = \beta_{N_0}(rx - r'x),$$

por lo que

$$\tau(n_0 + rx) - \tau(n_0' + r'x) = \beta_{N_0}(n_0) + \beta(r) - \beta_{N_0}(n_0') - \beta(r') = \beta(r - r') + \beta_{N_0}(n_0 - n_0') =$$

$$= \beta_{N_0}(rx - r'x) + \beta_{N_0}(n_0 - n_0') = \beta_{N_0}(n_0 + rx - n_0' - r'x) = \beta_{N_0}(0) = 0.$$

Por lo que τ es homomorfismo de R-módulos que extiende a λ y esto contradice la maximalidad.

$\square$

Corolario 2.22. *Sea E un R-módulo. Son equivalentes :*

(i) E es inyectivo.

(ii) Cada sucesión exacta corta $0 \to E \to M \to C \to 0$, donde C es un R-módulo cíclico, escinde.

Demostración. Ya hemos visto que (i) implica (ii).

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"'] & R \\ E & \end{tikzcd}$$

donde I es un ideal por la izquierda de R. Tenemos que demostrar que existe un homomorfismo $\beta : R \to E$ tal que $\beta_I = \gamma$. Primero, construímos el pushout

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & R \arrow[d, "\tau"] \\ E \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd}$$

Nótese que μ es inyectiva, por serlo i. Consideramos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & R/I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mu"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & M \arrow[r, dashed, "\theta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que es conmutativo, pues la fila superior es exacta. Por la propiedad universal del pushout, existe un único homomorfismo $\theta : M \to C$ que hace que todo conmute. Así, la fila inferior es también exacta, y como C es cíclico, escinde. Por tanto, existe $\sigma : M \to E$ tal que $\sigma\mu = 1_E$. Si definimos ahora $\beta := \sigma\tau$, tenemos que $\beta i = \sigma\tau i = \sigma\mu\gamma = \gamma$.

□

Definición 2.23. Sea M un R-módulo, $m \in M$ y $r \in R$. Decimos que m es **divisible por** r si $rm' = m$ para algún $m' \in M$. Decimos que M es un **módulo divisible** si todos sus elementos son divisibles por todo $r \in R$ que no sea divisor de cero.

Un ejemplo claro de módulo divisible es $\mathbb{Q}$, que es divisible como $\mathbb{Z}$-módulo.

Es claro que el carácter de divisible se conserva para cocientes, sumandos, productos y sumas.

Teorema 2.24. *Si E es un módulo inyectivo, entonces E es divisible.*

Demostración. Sea $x \in E$ y $r \in R$ tal que r no es un divisor de cero. Consideremos Rr, el ideal por la izquierda de R generado por r. Tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Rr \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & R \\ E & \end{tikzcd}$$

donde $h(r) = x$ y $h(r'r) = r'x$. Así, h está bien definida, pues si $r'r = r''r$ tenemos que $(r' - r'')r = 0$ y necesariamente $r' - r'' = 0$ pues r no es un divisor de cero.

Entonces h es un homomorfismo de R-módulos. Por ser E inyectivo, tenemos que existe $\beta : R \to E$ extendiendo a h. Definimos ahora $y := \beta(1)$, entonces $ry = r\beta(1) = \beta(r) = h(r) = x$ y así x es divisible por r.

□

Teorema 2.25. *Si R es un dominio de ideales principales, entonces un R-módulo D es divisible si y solo si es inyectivo.*

Demostración. Acabamos de probar que un módulo inyectivo siempre es divisible. Veamos que si D es un R-módulo divisible, entonces es inyectivo.

Sea I un ideal de R y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"'] & R \\ E & \end{tikzcd}$$

Como R es DIP, existe $a \in R$ tal que $I = Ra$. Sea $x \in E$ tal que $ax = \gamma(a)$. Entonces, para todo $r \in I$ tenemos $\gamma(r) = rx$. En efecto: $r = sa$ para algún $s \in R$, luego

$$\gamma(r) = \gamma(sa) = s\gamma(a) = sax = rx.$$

Si definimos $\beta : R \to E$ como $\beta(1) = x$, es claro que β extiende a γ y por el criterio de Baer, E es inyectivo.

□

Teorema 2.26. *Todo grupo abeliano G puede ser encajado en grupo abeliano inyectivo.*

Demostración. Escribimos $G = F/S$ como el cociente de un grupo libre, así $F = \oplus\mathbb{Z}$. Ahora, si encajamos cada copia de $\mathbb{Z}$ en los racionales $\mathbb{Q}$, tenemos

$$G = F/S = (\oplus\mathbb{Z})/S \subset (\oplus\mathbb{Q})/S.$$

Como $\mathbb{Q}$ es divisible, también lo son $\oplus\mathbb{Q}$ y $(\oplus\mathbb{Q})/S$ y así, $(\oplus\mathbb{Q})/S$ es inyectivo, por lo que ya tenemos el resultado.

□

Teorema 2.27. *Si D es un grupo abeliano divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Nótese que R es un R-módulo y un $\mathbb{Z}$-módulo, por ser grupo abeliano, por lo que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ tiene estructura de R-módulo con $rf(x) = f(xr)$.

Para ver que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es inyectivo, veremos que el funtor $Hom_R(-, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$ es exacto, basta ver que transforma monomorfismos en epimorfismos. Veamos esto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[r] & Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B, D) \arrow[r] \arrow[u, "\tau_B"] & Hom_{\mathbb{Z}}(A, D) \arrow[u, "\tau_A"']
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos verticales vienen dados por $\tau_B : Hom(B, D) \to Hom(B, Hom(R, D))$, definido como $f \mapsto \bar{f}$, donde $\bar{f} : b \mapsto f_b$, con $f_b \in Hom(R, D)$ y $f_b(r) = f(rb)$. Análogamente definimos τ_A. Es sencillo comprobar que son isomorfismos construyendo la inversa, $\gamma_B : Hom(B, Hom(R, D)) \to Hom(B, D)$, que lleva $g \in Hom(B, Hom(R, D))$ en $g' : B \to D$, donde $g'(b) = g(b)(1)$. Análogamente para γ_A.

Como D es divisible, es $\mathbb{Z}$-inyectivo, por lo que el homomorfismo de abajo es sobreyectivo y por la conmutatividad del diagrama, tenemos que el homomorfismo de arriba también es sobreyectivo.

□

Teorema 2.28. *Todo R-módulo por la izquierda M puede ser encajado en un módulo inyectivo.*

Demostración. Si consideramos M como grupo abeliano, podemos encajarlo en algún grupo abeliano divisible D, por lo que existe un $\mathbb{Z}$-monomorfismo $0 \to M \xrightarrow{i} D$. Si $m \in M$, definimos $f_m : R \to M$ como $r \mapsto rm$. Si consideramos ahora $\varphi : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$, dado por $m \mapsto if_m$, este homomorfismo es inyectivo.

□

Definición 2.29. Una **resolución inyectiva** de un módulo M es una sucesión exacta

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots$$

donde cada E^n es un módulo inyectivo.

Teorema 2.30. *Todo módulo M admite una resolución inyectiva.*

Demostración. La prueba de esto es dual a la hecha para resoluciones libres en el Teorema 2.6, usando el hecho de que todo módulo M puede ser encajado en un módulo inyectivo.

□

De forma dual, podemos definir una **resolución proyectiva**, pero como hemos visto que todo módulo libre es proyectivo, ya tenemos probado que todo módulo admite una resolución proyectiva, pues las resoluciones libres son un tipo de resoluciones proyectivas.

Definición 2.31. Sea E un R-módulo y M un R-submódulo de E. Se dice que E es una **extensión esencial** de M si dado un R-submódulo N de E, $N \neq 0$, entonces $M \cap N \neq 0$, esto es, cada submódulo no nulo de E tiene intersección no nula con M.

Si además, $M \subsetneq E$, se dice que E es una **extensión esencial propia** de M.

Por ejemplo, si $M = \mathbb{Z}$, entonces $E = \mathbb{Q}$ es una extensión esencial propia de $\mathbb{Z}$. Si N es un $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Q}$ y $N \neq 0$, entonces, existe $\frac{m}{n} \in N$ con $m \neq 0$, por lo que $n\frac{m}{n} = m \in N \cap \mathbb{Z}$.

Lema 2.32. *(i) Consideremos $M \subset E \subset E_1$. Si $M \subset E$ y $E \subset E_1$ son extensiones esenciales, entonces $M \subset E_1$ es una extensión esencial.*

(ii) Sea $M \subset E$. E es extensión esencial de M si y solo si para cada $e \in E$, $e \neq 0$, existe $r \in R$ con $re \in M$, $re \neq 0$.

(iii) Sea $M \subset E$ y $\{E_i\}_{i \in I}$ una cadena de submódulos de E de forma que los E_i son extensiones esenciales de M, entonces $\cup E_i$ es extensión esencial maximal de M, i.e., las extensiones esenciales de $\cup E_i$ no son extensiones esenciales de M.

(iv) Si $M \subset E' \subset E$ y $M \subset E'$ y $M \subset E$ son extensiones esenciales, entonces $E' \subset E$ es una extensión esencial.

(v) Sea $M \subset E$ esencial y $\phi : E \to D$ es un homomorfismo. Entonces ϕ es inyectiva si y solo si $\phi_{|M}$ lo es.

Demostración. (i) Sea N submódulo no nulo de E_1, entonces $N \cap E \neq 0$ es un submódulo no nulo de E, por lo que $N \cap M = N \cap E \cap M \neq 0$.

(ii) Veamos primero la primera implicación. Sea $0 \neq e \in E$, definimos $N = Re \neq 0$. Por ser E extensión esencial de M, $N \cap M \neq 0$, por tanto, tenemos que existe $r \in R$ tal que $re \in M$, $re \neq 0$.

Supongamos ahora que para todo $e \neq 0$, $e \in E$ existe $r \in R$ tal que $re \neq 0$ y $re \in M$. Veamos que E es una extensión esencial de M. Sea N un submódulo de E no nulo, tenemos que existe $e \in N$, $e \neq 0$, luego existe $r \in R$ tal que $re \in M$ y $re \neq 0$. Como $re \in N$, entonces $re \in N \cap M \neq 0$.

(iii) Es consecuencia directa de (ii).

(iv) Si $N \subset E$ es un submódulo no nulo de E, entonces $0 \neq N \cap M \subset N \cap E'$.

(v) La primera implicación es trivial. Veamos la segunda. Si $\phi_{|M}$ es inyectiva, entonces $\ker \phi \cap M = 0$, luego $\ker \phi = 0$.

$\square$

Teorema 2.33. *Un módulo M es inyectivo si y solo si M no tiene extensiones esenciales propias.*

Demostración. Supongamos que M es inyectivo y que E es extensión esencial propia de M. Entonces $E = M \oplus N$, donde $N \cong E/M$ es un submódulo no nulo de E. Pero entonces $M \cap N = 0$, lo cual contradice que E sea una extensión esencial de M.

Veamos ahora el recíproco. Sea E un R-módulo inyectivo tal que $M \subset E$. Sea

$$\Sigma = \{N \subset E / N \cap M = 0\}.$$

Tenemos que $\Sigma \neq \emptyset$, pues $0 \in \Sigma$. Tenemos en Σ una relación de orden dada por la inclusión, luego aplicando el lema de Zorn, tenemos un elemento maximal N_0.

Consideremos ahora la composición

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\mu"'] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] & E/N_0 \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y π es el homomorfismo canónico. $\ker \mu = N_0 \cap M = 0$, por lo que μ es inyectiva. Ahora, $\mu : M \to E/N_0$ es una extensión esencial, pues si $N \subset E/N_0$ es un submódulo no nulo de E/N_0, entonces $N_0 \subsetneq \pi^{-1}(N)$ y como N_0 es elemento maximal, entonces $\pi^{-1}(N) \cap M \neq 0$. Por hipótesis M no tiene extensiones esenciales propias, luego μ es un isomorfismo.

Definimos entonces $\varepsilon = \mu^{-1}\pi$. Entonces $\varepsilon i = 1$ por lo que la sucesión exacta corta

$$0 \to N_0 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

escinde y así concluimos que M es un sumando directo de E y como E es inyectivo, M también lo es.

□

Teorema 2.34. *Para cada módulo $M \subset E$ son equivalentes:*

(i) $M \subset E$ es una extensión esencial maximal.

(ii) $M \subset E$ es extensión esencial y E es R-inyectivo.

(iii) E es un módulo inyectivo y si $M \subset E' \subset E$ con E' inyectivo, entonces $E = E'$, esto es, E es inyectivo minimal conteniendo a M.

Además, para un módulo M, existe E cumpliendo las condiciones anteriores.

Demostración. Veamos que (i) implica (ii). Sea $M \subset E$ una extensión esencial maximal. Tenemos que demostrar que E es inyectivo, pero por el resultado anterior, esto es equivalente a ver que E no admite extensiones esenciales propias. Sea E_1 una extensión esencial de E, entonces $M \subset E \subset E_1$ y para $N \subset E_1$ submódulo no nulo, tenemos que

$E \cap N \neq 0$, luego $E \cap N$ es un submódulo no nulo de E. Por ser E extensión esencial de M, $M \cap N = M \cap E \cap N \neq 0$, por tanto E_1 es extensión esencial de M, pero E era extensión esencial maximal de M por hipótesis y así $E = E_1$ necesariamente. Así, E no admite extensiones esenciales propias.

Vemos ahora que (ii) implica (iii). Si $M \subset E' \subset E$ con E' inyectivo, tenemos que demostrar que $E = E'$. Tenemos que E es extensión esencial de E', pues si N es un submódulo no nulo de E, $0 \neq N \cap M \subset N \cap E'$. Por hipótesis, E' es inyectivo, luego no admite extensiones esenciales propias, por lo que necesariamente $E = E'$.

Resta ver que (iii) implica (i). Sea $M \subset E$, con E inyectivo y supongamos que se verifica (iii). Tenemos que demostrar que $M \subset E$ es una extensión esencial maximal. Tenemos que ver que es extensión esencial, la maximalidad se deduce de que E sea inyectivo.

Sea $\Sigma = \{E' \subset E / M \subset E' \text{ es extensión esencial}\}$. Tenemos que $\Sigma \neq \emptyset$, pues $M \in \Sigma$. Ahora, consideramos la relación de orden dada por la inclusión en Σ, por el Lema 2.32, podemos aplicar el lema de Zorn a Σ y así, obtenemos un elemento maximal E_0.

Veremos que E_0 es extensión esencial de M y que $E = E_0$.

Sea $M \subset N$ extensión esencial con $M \subset E_0 \subset N$. Tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & E_0 \arrow[r, tail] & N \arrow[dll, dashed, "\phi"] \\ E & & \end{tikzcd}$$

y como E es inyectivo, existe un homomorfismo $\phi : N \to E$ haciendo conmutativo el diagrama. Ahora, como $\phi_{|M}$ es inyectiva y $M \subset N$ es una extensión esencial, ϕ es inyectiva.

Así, $M \subset E_0 \subset N \subset E$. Como E_0 es maximal en Σ, se obtiene $E_0 = N$ y $M \subset E_0$ es maximal, por lo que E_0 no tiene extensiones principales propias. Concluimos entonces que E_0 es inyectivo. Aplicando ahora la hipótesis de (iii), tenemos que $E_0 = E$. Por tanto $M \subset E$ es una extensión esencial maximal.

Demostremos ahora que dado un módulo M existe una extensión principal maximal E.

Sabemos que podemos encajar M en un módulo inyectivo E, $M \subset E$. Ahora, basta considerar $\Sigma = \{E' \subset E / M \subset E' \text{ es extensión esencial}\}$ como hicimos en la prueba de (iii), aplicando los mismos argumentos, existe un elemento maximal E_0. Nos encontramos en la misma situación

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & E_0 \arrow[r, tail] & N \arrow[dll, dashed, "\phi"] \\ E & & \end{tikzcd}$$

con lo que concluimos que $N \subset E$ y por la maximalidad, $E_0 = N$, luego $M \subset E_0$ es una extensión esencial maximal.

$\square$

Definición 2.35. Si $M \subset E$ es una extensión esencial maximal, se dice que E es una **envolvente inyectiva**.

Teorema 2.36. *Sea E una envolvente inyectiva de un módulo M.*

(i) Si D es un módulo inyectivo que contiene a M, entonces existe un monomorfismo $\varphi : E \to D$ que fija a M punto a punto.

(ii) Dos envolventes inyectivas de M son isomorfas (por un isomorfismo que fija a M punto a punto).

Demostración. (i) Por ser D inyectivo, podemos completar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & D & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "i"] \arrow[r] & E \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. Como $M \subset E$ es una extensión esencial, ϕ es inyectivo.

(ii) Supongamos que D es una envolvente inyectiva de M. Usando la misma notación que en (i), existe un monomorfismo $\phi : E \to D$ que fija M punto a punto. Veamos que este monomorfismo es un isomorfismo. Si no lo fuese, $\phi(E)$ sería un sumando directo de D conteniendo a M, lo que contradiría que D es una extensión esencial de M.

$\square$

Así, podemos hablar de *la* envolvente inyectiva de M.

Capítulo 3

Producto tensorial. Módulos planos

3.1. Producto tensorial

Definición 3.1. Sea R un anillo, A un R-módulo por la derecha y B un R-módulo por la izquierda. Sea G un grupo abeliano con la suma, entonces una **función R-biaditiva** es una función $f : A \times B \to G$ tal que para $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$:

(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

(iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definición 3.2. Sea R un anillo, A un R-módulo por la derecha y B un R-módulo por la izquierda. Definimos el **producto tensorial** y lo denotamos $A \otimes_R B$ como el grupo abeliano y la función R-biaditiva que resuelve el siguiente problema universal:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Para cada grupo abeliano G y cada función biaditiva f, existe un único homomorfismo f' que hace el diagrama conmutativo.

Teorema 3.3. *Dos productos tensoriales de A y B son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que existe un segundo grupo X y una función R-biaditiva $k : A \times B \to X$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, shift right, "f'"'] \\
& X \arrow[ur, dashed, shift right, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

Por ser tanto X como $A \otimes_R B$ productos tensoriales, el diagrama es conmutativo y por tanto $k = k'h$ y $h = h'k$ y así $k = k'h'k$ y $h = h'k'h$. Ahora consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed] \\ & A \otimes_R B & \end{tikzcd}$$

Por ser $A \otimes_R B$ producto tensorial, existe un único homomorfismo que hace el diagrama conmutativo. Si consideramos la identidad, está claro que el diagrama es conmutativo, pero lo mismo pasa con $h'k'$, luego concluimos $id_{A\otimes_R B} = h'k'$. Con un razonamiento análogo sobre X vemos que $id_X = k'h'$. Por lo que h' y k' son isomorfismos mutuamente inversos y así X es isomorfo a $A \otimes_R B$.

□

Ya hemos probado la unicidad del producto tensorial, probemos ahora la existencia.

Teorema 3.4. *El producto tensorial de un R-módulo por la derecha A y un R-módulo por la izquierda B existe.*

Demostración. Sea F un grupo abeliano libre con base $A \times B$, i.e., F es el grupo de $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales de elementos de $A \times B$. Definimos S como el subgrupo de F generado por todos los elementos de la siguiente forma

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \qquad (a, b + b') - (a, b) - (a, b'), \qquad (ar, b) - (a, rb)$$

Definimos $A \otimes_R B = F/S$. Si denotamos $(a, b) + S = a \otimes b$, entonces $h : A \times B \to A \otimes_R B$ definida como $(a, b) \mapsto a \otimes b$ es una función R-biaditiva. Veamos que $A \otimes_R B$ con h es producto tensorial. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

donde G es un grupo abeliano y f es una función R-biaditiva. Como F es libre con base $A \times B$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to X$ con $\varphi((a, b)) = f(a, b)$. Además, por ser f biaditiva, $S \subset \ker \varphi$, por lo que φ induce un homomorfismo en el cociente $f' : A \otimes_R B \to G$ de forma que $a \otimes b = (a, b) + S \mapsto \varphi(a, b) = f(a, b)$ y así $f'h = f$ con lo que f' hace el diagrama conmutativo. La unicidad se sigue de que $A \otimes_R B$ está generado por $a \otimes b$.

□

Observación 3.5. Nótese que no todos los elementos son de la forma $a \otimes b$ y, aunque $a \otimes b$ generan $A \otimes_R B$, en general no es base, por lo que un elemento $x \in A \otimes_R B$ puede expresarse como suma $\sum a_i \otimes b_i$, pero esta expresión no tiene por qué ser única.

Así, normalmente, para definir un homomorfismo desde un producto tensorial, lo haremos a partir de una función de $A \times B$ y utilizando la propiedad universal.

Teorema 3.6. *Sea $f : A \to A'$ un homomorfismo de R-módulos por la derecha y sea $g : B \to B'$ un homomorfismo de R-módulos por la izquierda. Existe un único homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ con $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.*

Demostración. La función $A \times B \to A' \otimes_R B'$ definida como $a \times b \mapsto f(a) \otimes g(b)$ es R-biaditiva, por lo que usando la propiedad universal del producto tensorial, tenemos un único homomorfismo de forma que $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.

□

Definición 3.7. La aplicación definida en el teorema anterior se denota $f \otimes g$.

Teorema 3.8. *Sea $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ una sucesión de homomorfismos de R-módulos por la derecha y sea $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ una sucesión de homomorfismos de R-módulos por la izquierda. Entonces:*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Demostración. Definimos $h : A \times B \to A'' \otimes_R B''$ como $(a, b) \mapsto f'(f(a)) \otimes g'(g(b))$. Sabemos que existe un único homomorfismo $h' : A \otimes_R B \to A'' \otimes B''$ que lleva $a \otimes b \mapsto f'(f(a)) \otimes g'(g(b))$. Si consideramos $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(a \otimes b) = f'(f(a)) \otimes g'(g(b))$, por tanto $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = h'$.

Si ahora consideramos $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, es claro que

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)(a \otimes b) = f'(f(a)) \otimes g'(g(b)),$$

luego $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = h'$ y así, $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$. □

Corolario 3.9. *Si A es un R-módulo por la derecha, entonces $A \otimes_R -$ es un funtor aditivo del siguiente modo:*

$$A \otimes_R - : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$$

$$B \mapsto A \otimes_R B$$

$$f \mapsto 1_A \otimes f$$

donde $B \in Obj_{{}_R\mathfrak{M}}$ y $f \in Hom(B, B')$.

Demostración. Es evidente que $1_A \otimes 1_B$ es la identidad en $A \otimes_R B$ y por el teorema anterior sabemos que se conserva la composición. Resta ver que es aditivo.

Sean $f, f' : B \to B'$, entonces $1_A \otimes (f + f') = (1_A \otimes f) + (1_A \otimes f')$. Esto es consecuencia del Teorema 3.6.

□

De modo similar, fijando el segundo módulo, tenemos un funtor de la categoría de R-módulos por la derecha a la categoría de grupos abelianos.

Corolario 3.10. *Si B es un R-módulo por la izquierda, entonces $- \otimes_R B$ es un funtor aditivo del siguiente modo:*

$$- \otimes_R B : \mathfrak{M}_R \to Ab$$

$$A \mapsto A \otimes_R B$$

$$f \mapsto f \otimes 1_B$$

donde $A \in Obj_{\mathfrak{M}_R}$ y $f \in Hom(A, A')$.

En general, $A \otimes B$ es un grupo abeliano, sin embargo, hay casos en los que toma estructura de módulo. Veamos esto.

Definición 3.11. Sean R y S anillos. Un grupo abeliano B es un **(R,S)-bimódulo**, lo denotamos ${}_R B_S$, si B es un R-módulo por la izquierda, un S-módulo por la derecha y se tiene una "ley asociativa":

$$r(bs) = (rb)s \quad \textit{para todo } r \in R,\ b \in B,\ s \in S.$$

Observación 3.12. La última condición nos asegura que para cada $r \in R$, tenemos un homomorfismo $B \to B$ de S-módulos, dado por $b \mapsto rb$, y para cada $s \in S$, tenemos un homomorfismo $B \to B$ de R-módulos dado por $b \mapsto bs$.

Veamos algunos ejemplos de bimódulos.

- Un anillo R es un (R, R)-bimódulo, que es equivalente a decir que tiene la propiedad asociativa.
- Si R es conmutativo, todo R-módulo por la izquierda B puede construirse como R-módulo por la derecha definiendo $br = rb$, en cuyo caso, B es un (R, R)-bimódulo.
- Todo R-módulo por la izquierda B es un $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo: $B = {}_R B_{\mathbb{Z}}$. Análogamente, todo R-módulo por la derecha C es un $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo: $C = {}_{\mathbb{Z}} C_R$.

- Si R es conmutativo, entonces un anillo S es una R-**álgebra** si existe un homomorfismo de anillos $\varphi : R \to Z(S)$, donde $Z(S)$ es el centro de S. Nótese que así, S es un R-módulo por la izquierda, si definimos $r \cdot s = \varphi(r)s$. Como $\varphi(r) \in Z(S)$, entonces S también es un R-módulo por la derecha, por lo que S es un (R, S)-bimódulo y un (S, R)-bimódulo.
- Todo anillo es una $\mathbb{Z}$-álgebra.

Teorema 3.13. *Si A es un R-módulo por la derecha y B es un (R, S)-bimódulo, entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo por la derecha, donde*

$$(a \otimes b)s = a \otimes (bs).$$

Análogamente, si tenemos que A es un (S, R)-bimódulo y B es un R-módulo por la izquierda, entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo por la izquierda, donde

$$s(a \otimes b) = sa \otimes b.$$

Demostración. Para un $s \in S$ fijado, la función $\mu_s : B \to B$ definida como $b \mapsto bs$ es un homomorfismo de R-módulos por ser B bimódulo. Si F es el funtor $A \otimes_R -$, entonces $F(\mu_s) : A \otimes B \to A \otimes B$ es un homomorfismo de grupos. Pero $F(\mu_s) = 1_A \otimes \mu_s$, está definida como $a \otimes b \mapsto a \otimes bs$, por tanto la fórmula del producto está bien definida y satisface los axiomas del producto.

□

Corolario 3.14. *Dados A_R y ${}_RB_S$, el funtor $- \otimes_R B$ toma valores en la categoría $\mathfrak{M}_S$. Si tenemos ${}_SA_R$ y ${}_RB$, entonces el funtor $A \otimes_R -$ toma valores en ${}_S\mathfrak{M}$.*

Corolario 3.15. *Si R es conmutativo y S es una R-álgebra, entonces $S \otimes_R B$ es un S-módulo por la izquierda para todo R-módulo por la izquierda B.*

Demostración. Consecuencia de que S sea un (S, R)-bimódulo.

□

Corolario 3.16. *Si R es conmutativo y A y B son R-módulos, entonces $A \otimes_R B$ es un R-módulo con $r(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$. Además, para $r \in R$, si $\mu_r : B \to B$ viene dada por $b \mapsto rb$, entonces $1 \otimes \mu_r : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ es también el producto por r y lo mismo pasa en la otra variable.*

Teorema 3.17. *Si R es un anillo y B es un R-módulo por la izquierda, entonces existe un R-isomorfismo $R \otimes_R B \cong B$ con $r \otimes b \mapsto rb$.*

Demostración. Nótese que $R \otimes_R B$ es un R-módulo por la izquierda, pues R es un (R, R)-bimódulo. Por la definición de R-módulo por la izquierda, la función $R \times B \to B$ con $(r, b) \mapsto rb$ es R-biaditiva, luego por la definición de producto tensorial, existe un homomorfismo $\theta : R \otimes_R B \to B$ con $r \otimes b \mapsto rb$. Así, θ es un R-isomorfismo con inversa $\tau : B \to R \otimes_R B$, definida como $b \mapsto 1 \otimes b$.

En efecto, es claro que τ es un R-homomorfismo y si componemos,

$$\theta(\tau(b)) = \theta(1 \otimes b) = b \quad y \quad \tau(\theta(r \otimes b)) = \tau(rb) = 1 \otimes rb = r \otimes b.$$

□

Tenemos un resultado análogo para el caso A_R, así $A \otimes_R R \cong A$.

Teorema 3.18. *Si R es conmutativo y A y B son R-módulos, entonces existe un R-isomorfismo $\tau : A \otimes_R B \to B \otimes_R A$ definido como $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.*

Demostración. Consideramos la aplicación $t : A \times B \to B \otimes_R A$ definida como $(a, b) \mapsto b \otimes a$, que es R-biaditiva, por lo que induce un homomorfismo de grupos $\tau : A \otimes_R B \to B \otimes_R A$, que es un R-isomorfismo cuya inversa viene dada por $b \otimes a \mapsto a \otimes b$.

□

Los bimódulos también dotan a $Hom(A, B)$ con una estructura de módulo, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.19. *(i) Dados ${}_RA_S$ y ${}_RB$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo por la izquierda si uno define $(sf)(a) = f(as)$;*

(ii) Dados ${}_RA_S$ y B_S, entonces $Hom_R(A, B)$ es un R-módulo por la derecha si uno define $(fr)(a) = f(ra)$;

(iii) Dados A_S y ${}_RB_S$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo por la izquierda si uno define $(sf)(a) = s(f(a))$;

(iv) Dados ${}_RA$ y ${}_RB_S$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un R-módulo por la derecha si uno define $(fr)(a) = (f(a))r$.

Teorema 3.20. *Si B es un R-módulo por la izquierda, entonces existe un R-isomorfismo $Hom_R(R, B) \to B$ dado por $f \mapsto f(1)$. Análogamente, si B es un R-módulo por la derecha, entonces la misma fórmula nos proporciona un R-isomorfismo de forma que $Hom_R(R, B) \cong B$.*

Demostración. Si definimos $f_b : R \to B$ como $r \mapsto rb$, entonces $b \mapsto f_b$ es la inversa buscada.

□

Tal y como hicimos con el funtor Hom, estudiemos ahora la exactitud del producto tensorial.

Teorema 3.21. *Los funtores $M \otimes_R -$ y $- \otimes_R N$ son funtores exactos por la derecha.*

Demostración. Solo veremos la prueba para $M \otimes_R -$, pues para el segundo es análoga.

Consideremos la sucesión exacta

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

debemos ver que

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1_M \otimes \alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes \beta} M \otimes_R C \to 0$$

es exacta.

(i) $\operatorname{im} 1_M \otimes \alpha \subset \ker 1_m \otimes \beta$. Basta ver que $(1_M \otimes \alpha) \circ (1_M \otimes \beta) = 0$, pero esto se tiene pues $(1_M \otimes \alpha) \circ (1_M \otimes \beta) = (1_M \otimes (\alpha \circ \beta)) = 1_M \otimes 0 = 0$.

(ii) $\ker 1_M \otimes \beta \subset \operatorname{im} 1_M \otimes \alpha$. Si $E = \operatorname{im} 1_M \otimes \alpha$, entonces $1_M \otimes \beta$ induce un homomorfismo $\bar{\beta} : (M \otimes B)/E \to M \otimes C$ dado por $m \otimes b + E \mapsto m \otimes \beta b$ para $E \subset \ker 1_M \otimes \beta$ por (i). Es fácil ver que $1 \otimes \beta = \bar{\beta}\pi$, donde π es la proyección canónica del cociente.

Supongamos que $\bar{\beta}$ es un isomorfismo. Entonces :

$$\ker 1 \otimes \beta = \ker \bar{\beta}\pi = \ker \pi = E = im 1 \otimes \alpha$$

y ya está. Vamos a construír el inverso de $\bar{\beta}$.

La función $f : M \times C \to (M \otimes B)/E$ dada por $f(m, c) = m \otimes b + E$, donde $\beta b = c$ está bien definida. Tal elemento b existe por ser β sobreyectiva y si $\beta b' = c = \beta b$, entonces $\beta(b' - b) = 0$ y existe un elemento $a \in A$ con $\alpha a = b' - b$; se sigue entonces que

$$m \otimes b' - m \otimes b = m \otimes (b' - b) = (1 \otimes \alpha)(m \otimes a) \in \operatorname{im} 1 \otimes \alpha = E.$$

Como f es biaditiva, la propiedad universal del producto tensorial nos da un homomorfismo $\bar{f} : M \otimes C \to (M \otimes C)/E$ con $\bar{f}(m \otimes c) = m \otimes b + E$. Ahora, se ve claramente que $\bar{f}$ y $\bar{\beta}$ son funciones inversas.

(iii) $1 \otimes \beta$ es sobre. Se sigue de que β es sobre.

□

Al igual que hicimos con el funtor Hom, podemos estudiar además, el comportamiento del funtor producto tensorial con la suma de módulos.

Teorema 3.22. *Sea A un R-módulo por la derecha y sean $\{B_j : j \in J\}$ R-módulos por la izquierda. El homomorfismo*

$$\theta : A \otimes_R (\oplus_j B_j) \to \oplus_j (A \otimes_R B_j)$$
$$a \otimes (b_j) \mapsto (a \otimes b_j)$$

es un isomorfismo. Existe un isomorfismo similar si consideramos la suma en la primera variable.

Demostración. Nótese que θ está bien definida, pues la función $A \times \oplus_j B_j \to \oplus_j (A \times B_j)$, dada por $(a, (b_j)) \mapsto (a \otimes b_j)$ es R-biaditiva.

Sea $\lambda_j : B_j \to \oplus_j B_j$ la j-ésima inyección en la suma. Para definir un homomorfismo $\varphi : \oplus(A \otimes_R B_j) \to A \otimes_R (\oplus B_j)$, basta definir $f_j : A \otimes_R B_j \to A \otimes (\oplus B_j)$. Definimos f_j de forma que $a \otimes b \mapsto a \otimes \lambda_j b_j$ (i.e., $f_j = 1_A \otimes \lambda_j$).

Si μ_j es la j-ésima inyección en la suma $\mu_j : A \otimes_R B_j \to \oplus_j (A \otimes_R B_j)$, existe un morfismo φ tal que $\varphi \mu_j = f_j \, \forall j \in J$. Es claro que $\theta\varphi$ y $\varphi\theta$ son las respectivas identidades. □

Así, el funtor $A \otimes_R -$ conserva la suma. Lo mismo se tiene para el funtor $- \otimes_R B$.

3.2. Funtores adjuntos

Una vez introducido el funtor $\otimes$, podemos preguntarnos si guarda alguna relación con el funtor Hom. En esta sección veremos que, en efecto, sí guardan relación y de qué forma.

Definición 3.23. Sean $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ dos funtores. El par (F, G) se dice un **par adjunto** si, para cada $A \in Obj_{\mathfrak{U}}$ y cada $C \in Obj_{\mathfrak{C}}$, existe una biyección

$$\tau = \tau_{A,C} : Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \to Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC)$$

que es natural en cada variable, esto es, que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "(Ff)^*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathfrak{C}}(FA', C) \arrow[d, "\tau"'] \\ Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "f^*"] & Hom_{\mathfrak{U}}(A', GC) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathfrak{C}}(FA', C) \arrow[d, "\tau"'] \\ Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "(Gg)_*"] & Hom_{\mathfrak{U}}(A', GC) \end{tikzcd}$$

Teorema 3.24. *Si ${}_S B_R$ es un bimódulo, entonces $(B \otimes_R -, Hom(B, -))$ es un par adjunto*

Demostración. Solo veremos la construcción del primer isomorfismo, pues el segundo se construye de forma similar.

Primero, nótese que $A \otimes_R B$ es un S-módulo y que $Hom_S(B, C)$ es un R-módulo por la izquierda, por tanto ambos lados tienen sentido.

Sea $f \in Hom_S(A \otimes_R B, C)$, para cada $a \in A$, definimos $f_a : B \to C$ como $b \mapsto f(a \otimes b)$. Entonces $a \mapsto f_a$ es un homomorfismo de R-módulos y lo denotamos $\bar{f}$. Definimos

$$\begin{aligned} \tau : Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R B, C) \to & Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(B, C)) \\ f \mapsto & \bar{f} \end{aligned}$$

Así, τ es un homomorfismo de S-módulos. Para ver que es un isomorfismo, veamos que tiene inversa.

Sea $g \in Hom_R(A, Hom_S(B, C))$. Definimos $g' : A \otimes_R B \to C$ como $a \otimes b \mapsto g_a(b)$, donde $g_a = g(a) \in Hom_S(B, C)$. g' está bien definida y es un homomorfismo de S-módulos. $g \mapsto g'$ es la inversa de τ.

Para cada A, C, hemos construido el isomorfismo $\tau_{A,C}$. Solo falta comprobar la naturalidad y esto se obtiene de forma directa, pues tenemos la expresión explícita de cada homomorfismo.

□

A lo largo del primer capítulo hemos estudiado los límites directos e inversos, que son funtores. Nos preguntamos ahora si pertenecen a algún par adjunto. La respuesta es afirmativa. Recordamos primero la definición del sistema directo constante.

El funtor $|\ | : {}_R\mathfrak{M} \to Dir(I)$ constante le asigna a cada módulo A el sistema directo constante con sistema de índices I de forma que $A_i = A$ para todo $i \in I$. Si $f : A \to A'$ es un homomorfismo de módulos, $|f| : |A| \to |A'|$ es la transformación natural $|f|_i = f$ para todo $i \in I$.

Otra forma de decir que $\varinjlim$ es la solución a un problema universal es decir que existe una biyección natural $Hom_R(\varinjlim A_i, C) \to Hom_{Dir(I)}(\{A_i, \varphi_j^i\}, |C|)$. Lo que esto nos dice es que $(\varinjlim, |\ |)$ es un par adjunto. Esta es otra forma de llegar a que $\varinjlim$ es exacto por la derecha.

Ahora podemos utilizar este resultado combinado con lo que ya sabemos para límites directos.

Teorema 3.25. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{U}$ dos categorías y sean $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ dos funtores. Si (F, G) es un par adjunto, entonces F preserva todos los límites directos.*

Demostración. Si I es un conjunto cuasiordenado y $\{A_i, \varphi_j^i\}$ es un sistema directo en $\mathfrak{U}$ con conjunto de índices I, entonces es fácil ver que $\{FA_i, F\varphi_j^i\}$ es un sistema directo en $\mathfrak{C}$

con sistema de índices I. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathfrak{C}$

$$
\begin{tikzcd}
F(\varinjlim A_i) & & X \\
& F_i \arrow[ul, "F\alpha_i"'] \arrow[ur, "g_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "F\alpha_j"] \arrow[uur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ vienen dados por la definición de límite directo. Necesitamos un único homomorfismo $\gamma : F(\varinjlim A_i) \to X$ haciendo que todo conmute. Como (F, G) es un par adjunto, existe una biyección natural $\tau : Hom_{\mathfrak{C}}(F\varinjlim A_i, X) \to Hom_{\mathfrak{U}}(\varinjlim A_i, GX)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & GX \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "Gg_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "Gg_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por definición de límite directo, existe un único $\beta \in Hom_{\mathfrak{U}}(\varinjlim A_i, GX)$ haciendo que el diagrama conmute. Definimos ahora γ como $\gamma = \tau^{-1}(\beta)$. Como τ es natural, γ hace que el diagrama original conmute. Finalmente, γ debe ser única. Supongamos que existe γ' que cumple las mismas condiciones. Entonces $\tau(\gamma)$ también resolvería el problema universal del segundo diagrama, lo que contradiría la unicidad de β. Por tanto, $F(\varinjlim A_i)$ y $\varinjlim FA_i$ resuelven el mismo problema universal y por lo tanto son isomorfos.

$\square$

Corolario 3.26. *Para cualquier R-módulo por la derecha B, el funtor $B \otimes_R -$ conserva los límites directos.*

Demostración. Esto es consecuencia de que $(B \otimes_R -, Hom(B, -))$ sea un par adjunto.

$\square$

Este resultado nos vale para demostrar que $B \otimes_R -$ conserva las sumas directas, pues las sumas directas son límites directos.

Teorema 3.27. *Dos límites directos cualesquiera conmutan.*

Demostración. Como tenemos que $(\varinjlim, |\,|)$ es un par adjunto, entonces $\varinjlim$ conserva los límites directos y por tanto podemos permutarlos.

□

Como cabe esperar, tenemos resultados duales de todo lo dicho ahora para límites inversos, pues $(|\,|, \varprojlim)$ también es un par adjunto. El razonamiento es totalmente dual.

Teorema 3.28. $(|\,|, \varprojlim)$ *es un par adjunto.*

Teorema 3.29. *Sean* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{U}$ *dos categorías y sean* $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ *y* $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ *dos funtores. Si* (F, G) *es un par adjunto, entonces* G *preserva todos los límites inversos.*

Demostración. La prueba es dual a la realizada para límites directos.

□

Corolario 3.30. *Si* B *es un* R*-módulo por la izquierda, entonces* $Hom_R(B, -)$ *conserva límites inversos.*

Demostración. $(B \otimes_R -, Hom_R(B, -))$ es un par adjunto.

□

Corolario 3.31. *Dos límites inversos cualesquiera conmutan.*

Demostración. Dual a la prueba dada para el caso de límites directos.

□

3.3. Módulos planos

Al igual que hicimos con el funtor Hom, nos interesa saber cuándo el funtor producto tensorial conserva la exactitud. Nos interesan los módulos con esta propiedad.

Definición 3.32. Un R-módulo por la derecha B es un **módulo plano** si el funtor $B \otimes_R -$ es exacto.

Se tiene una definición análoga para módulos por la izquierda C con el funtor $- \otimes_R C$.

Nótese que $B \otimes_R -$ siempre es exacto por la derecha, por lo que B es plano si y solo si $B \otimes_R -$ conserva monomorfismos.

Teorema 3.33. R *es un* R*-módulo plano.*

Demostración. Sea $f : A' \to A$ un monomorfismo. Si $t_A : A \to R \otimes_R A$ es el isomorfismo definido en el Teorema 3.17, entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & A \arrow[d, "t_A"] \\
R \otimes_R A' \arrow[r, "1\otimes f"'] & R \otimes_R A
\end{tikzcd}$$

Como los homomorfismos verticales son isomorfismos, el homomorfismo $1_R \otimes f$ es inyectivo y R es plano.

□

Teorema 3.34. *Supongamos que B es un bimódulo ${}_SB_R$ que es R-plano y $C = {}_SC$ es inyectivo. Entonces $Hom_S(B, C)$ es un R-módulo por la izquierda inyectivo.*

Demostración. Nótese que $Hom_S(B, C)$ es un R-módulo por la izquierda.

Debemos probar que $Hom_R(-, Hom_S(B, C))$ es un funtor exacto. Así, usando el isomorfismo adjunto, tenemos que este funtor es equivalente a $Hom(B \otimes_R -, C)$, que es la composición de $(Hom_S(-, C)) \circ (B \otimes_R -)$. Pero cada uno de estos funtores es exacto, por ser B R-plano y C inyectivo.

□

Teorema 3.35. *Sean $\{B_k : k \in K\}$ una familia de R-módulos por la derecha. Entonces $\oplus B_k$ es plano si y solo si cada B_k es plano.*

Demostración. Nótese que si $\{f_k : A'_k \to A_k\}$ es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo $\oplus f_k : \oplus A'_k \to \oplus A_k$ con $(a'_k) \mapsto (f_k a'_k)$; además, $\oplus f_k$ es inyectivo si y solo si f_k es inyectivo.

Supongamos que $f : A' \to A$ es inyectivo. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\oplus B_k) \otimes_R A' \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d] & (\oplus B_k) \otimes_R A \arrow[d] \\
\oplus(B_k \otimes_R A') \arrow[r, "\oplus(1_k\otimes f)"'] & \oplus(B_k \otimes_R A)
\end{tikzcd}$$

donde $1_k = 1_{B_k}$ y los homomorfismos verticales son los isomorfismos habituales.

$$(\sum b_k) \otimes a \mapsto \sum (b_k \otimes a).$$

Luego, teniendo en cuenta las indicaciones del principio, $1 \otimes f$ es inyectiva, esto es, $\oplus B_k$ es plano, si y solo si cada B_k es plano.

□

Corolario 3.36. *Todo módulo proyectivo es plano.*

Demostración. Los tres teoremas previos nos muestran que todo módulo libre es plano y que todo sumando directo de un módulo libre es plano, por lo que ya tenemos el resultado.

□

Tal y como hicimos con los módulos libres, podemos definir ahora una resolución plana.

Definición 3.37. Una **resolución plana** es una sucesión exacta

$$\cdots F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

donde cada F_k es plano.

Sabemos que todo módulo libre es plano y que todo módulo admite una resolución libre, por tanto todo módulo admite una resolución plana.

Teorema 3.38. *Si $\{B_k, \varphi_j^k\}$ es un sistema directo de módulos planos sobre un conjunto dirigido K, entonces $\varinjlim B_k$ es plano.*

Demostración. Si $f : A' \to A$ es un homomorfismo inyectivo de R-módulos, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\varinjlim B_k) \otimes_R A' \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d] & (\varinjlim B_k) \otimes A \arrow[d] \\
\varinjlim (B_k \otimes A') \arrow[r, "\varphi"'] & \varinjlim (B_k \otimes A)
\end{tikzcd}$$

los homomorfismos verticales son los isomorfismos usuales y φ es el monomorfismo del Teorema 1.35. Concluimos entonces que $1 \otimes f$ es inyectiva.

□

Corolario 3.39. *Si todo R-submódulo finitamente generado de B es plano, entonces B es plano.*

Demostración. Esto es consecuencia de que B es límite directo del conjunto de submódulos finitamente generados y estos forman un conjunto dirigido.

□

Definición 3.40. Decimos que $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un **funtor fiel** si fijados dos objetos A y B en $\mathfrak{C}$ y dados $f, g \in Hom(A, B)$, con f distinto de g, entonces $Ff \neq Fg$.

Definición 3.41. Un **cogenerador de una categoría** $\mathfrak{C}$ es un objeto V de $\mathfrak{C}$ tal que para cada par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathfrak{C}$, $f \neq g$, existe $v : Y \to V$ tal que $vf \neq vg$, i.e., el funtor $Hom(-, V)$ es fiel.

Lema 3.42. *El grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de la categoría Ab.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo. Veamos que $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es fiel.

Es suficiente demostrar que dado B grupo abeliano y $b \in B$, $b \neq 0$, existe un homomorfismo de grupos abelianos $\tau : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\tau(b) \neq 0$.

Consideramos $\langle b \rangle = \mathbb{Z}b$ el subgrupo cíclico de B generado por b.

Se define $\gamma : \langle b \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ del siguiente modo.

1) Si $nb \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{Z}$, $\gamma(b)$ es arbitrario con $\gamma(b) \neq 0$, $\gamma(mb) = m\gamma(b)$.

2) Si n es el menor número natural tal que $nb = 0$, entonces

$$\gamma(b) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \quad y \quad \gamma(mb) = m\gamma(b) = \frac{m}{n} + \mathbb{Z}.$$

Veamos que γ está bien definida.

$$mb = m'b \Rightarrow (m - m')b = 0 \Rightarrow \frac{m - m'}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{m'}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m\gamma(b) = m'\gamma(b).$$

Dado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, existe $\tau : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\tau(b) = \gamma(b) \neq 0$.

□

Definición 3.43. Si B es un R-módulo por la derecha, su **módulo de caracteres** B^* es el R-módulo por la izquierda $Hom_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Teorema 3.44. *Una sucesión de R-módulos $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es exacta si y solo si la sucesión de sus módulo de caracteress $0 \to A^* \xrightarrow{\alpha^*} B^* \xrightarrow{\beta^*} C^* \to 0$ es exacta.*

Demostración. Si la sucesión original es exacta, como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un funtor contravariante exacto, por lo que tenemos la exactitud de la segunda sucesión.

Supongamos ahora que $0 \to A^* \xrightarrow{\alpha^*} B^* \xrightarrow{\beta^*} C^* \to 0$ es exacta. Veamos que si tenemos $\ker \beta^* = \operatorname{im} \alpha^*$, obtenemos $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$.

Primero comprobamos que $\operatorname{im} \alpha \subset \ker \beta$. Si $a \in A$ y $\alpha a \notin \ker \beta$, i.e., $\beta\alpha a \neq 0$, como tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador, existe un homomorfismo $f : C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de forma que $f\beta\alpha a \neq 0$. Por tanto, $f \in C^*$ y $f\beta\alpha \neq 0$, por lo que $\alpha^*\beta^*(f) \neq 0$, lo que contradice que la segunda sucesión sea exacta.

Ahora, veamos $\ker \beta \subset \operatorname{im} \alpha$. Supongamos que existe $b \in \ker \beta$ de forma que $b \notin \operatorname{im} \alpha$, entonces $b + \operatorname{im} \alpha$ es un elemento no nulo de $B/\operatorname{im} \alpha$, por lo que existe un homomorfismo $g : B/\operatorname{im} \alpha \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $g(b + \operatorname{im} \alpha) \neq 0$. Ahora, si $\pi : B \to B/\operatorname{im} \alpha$ es la proyección canónica, entonces $f = g \circ \pi : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es tal que $fb \neq 0$ y $f(\operatorname{im}\alpha) = 0$. Por tanto, $0 = f\alpha = \alpha^*(f) \in \ker\alpha^* = \operatorname{im}\beta^*$. Así, $f = \beta^*(h) = h\beta$ para algún $h \in C^*$. En particular, $fb = h\beta b$, lo que es una contradicción, pues supusimos $fb \neq 0$ para $b \in \ker\beta$.

□

Teorema 3.45. *Un R-módulo por la derecha B es plano si y solo si su módulo de caracteres B^* es R-módulo inyectivo por la izquierda.*

Demostración. Podemos considerar B como un bimódulo ${}_{\mathbb{Z}}B_R$ y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, tenemos en virtud del Teorema 3.34 que $B^* = Hom_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo.

Para ver el recíproco, supongamos que B^* es R-inyectivo y consideremos un monomorfismo $f : A' \to A$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con isomorfismos verticales

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(A, B^*) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & Hom_R(A', B^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "(1\otimes f)^*"] & Hom_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R A', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y la exactitud de la primera fila, nos proporciona la exactitud de la segunda fila. Así,

$$(B \otimes_R A)^* \xrightarrow{(1\otimes f)^*} (B \otimes_R A')^* \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces por el lema anterior, obtenemos que

$$0 \longrightarrow B \otimes_R A' \xrightarrow{1\otimes f} B \otimes_R A$$

es exacta y así, $B \otimes_R -$ conserva monomorfismos, luego B es plano.

□

Teorema 3.46. *Si B es R-módulo por la derecha tal que $0 \to B \otimes_R I \to B \otimes_R R$ es exacta para todo ideal por la izquierda finitamente generado, entonces B es plano.*

Demostración. Como cada ideal por la izquierda es límite directo con conjunto de índices los ideales por la izquierda finitamente generados contenidos en él, tenemos por el Teorema 1.35 que $0 \to B \otimes_R I \to B \otimes_R R$ es exacta para cada ideal por la izquierda de R (no necesariamente f.g.). Esto nos da la exactitud de $(B \otimes_R R)^* \to (B \otimes_R I)^* \to 0$, que, tal y como vimos en la demostración anterior, equivale a la exactitud de $Hom_R(R, B^*) \to Hom_R(I, B^*) \to 0$. Usando ahora el criterio de Baer, tenemos que B^* es inyectivo y por tanto B es plano.

□

Teorema 3.47. *Si B_R es un R-módulo plano e I es un ideal por la izquierda, entonces el homomorfismo $B \otimes_R I \to BI$ dado por $b \otimes i \mapsto bi$ es un isomorfismo.*

Demostración. Tenemos que $BI = \{\sum b_j i_j : b_j \in B, i_j \in I\}$ es un subgrupo de B. Consideramos ahora la composición $B \otimes_R I \to B \otimes_R R \to B$, donde el primer homomorfismo es la inclusión y el segundo homomorfismo es el isomorfismo canónico. La composición es inyectiva y tiene por imagen BI, por lo que tenemos el resultado buscado.

□

Teorema 3.48. *Sea F un R-módulo plano y $0 \to K \to F \xrightarrow{\beta} B \to 0$ una sucesión exacta de R- módulos por la derecha. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B es plano;

(ii) $K \cap FI = KI$ para todo ideal por la izquierda I;

(iii) $K \cap FI = KI$ para todo ideal por la izquierda f.g. I.

Demostración. Nótese que en (ii) y (iii) $KI \subset K \cap FI$, por lo que solo debemos comprobar la otra inclusión.

Primero hacemos algunas observaciones. Haciendo el producto tensorial de la primera sucesión por el ideal por la izquierda I, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$K \otimes I \to F \otimes I \to B \otimes I \to 0.$$

Por el teorema anterior, podemos identificar $F \otimes I$ con FI mediante el isomorfismo $f \otimes i \mapsto fi$; por lo que podemos identificar $\mathrm{im}\,(K \otimes I \to F \otimes I)$ con KI. Tenemos entonces un isomorfismo $\gamma : FI/KI \cong B \otimes I$ dado por $fi + KI \mapsto \beta f \otimes i$. Además,

$$BI = \{\sum (\beta f_j) i_j : f_j \in F, i_j \in I\} = \{\beta(\sum f_j i_j) : f_j \in B, i_j \in I\} = \beta(FI),$$

pues β es epimorfismo.

Por el primer teorema de isomorfía, tenemos un isomorfismo

$$\delta : BI = \beta(FI) \to FI/FI \cap K$$

dado por $bi \mapsto fi + FI \cap K$, donde $\beta f = b$. Ahora, componiendo estos homomorfismos obtenemos σ,

$$FI/KI \to^{\gamma} B \otimes I \to^{\theta} BI \to^{\delta} FI/FI \cap K,$$

donde $\theta : b \otimes i \mapsto bi$. Explícitamente, $\sigma : fi + FI \mapsto fi + FI \cap K$. Como $KI \subset FI \cap K$, σ es un isomorfismo si y solo si $KI = FI \cap K$. Además, como γ y δ son isomorfismos, σ es un isomorfismo si y solo si θ lo es.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si B es plano, por el teorema anterior, θ es un isomorfismo. Por tanto σ es un isomorfismo para todo I y $KI = FI \cap K$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Si $KI = FI \cap K$ para todo ideal finitamente generado I, entonces θ es un isomorfismo para todo I y por el Teorema 3.46, B es plano.

$\square$

Lema 3.49. *Sea F libre con base $\{x_j : j \in J\}$, y sea $0 \to K \to F \to B \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos por la derecha. Si $v \in F$ se puede escribir como*

$$v = x_{j_1}r_1 + \ldots + x_{j_t}r_t,$$

definimos $I(v)$ como el ideal por la izquierda de R generado por las "coordenadas" $r_1, \ldots, r_t$. Entonces B es plano si y solo si $v \in KI(v)$ para todo $v \in K$.

Demostración. Si B es plano y $v \in K$, entonces $v \in K \cap FI(v) = KI(v)$ por el teorema anterior. Recíprocamente, sea I un ideal por la izquierda y sea $v \in K \cap I$. Entonces $I(v) \subset I$; por hipótesis $v \in KI(v) \subset KI$. Entonces $K \cap FI \subset KI$. Como siempre se tiene la otra inclusión, usando de nuevo el teorema anterior, obtenemos que B es plano.

$\square$

Teorema 3.50 (Villamayor). *Sea F libre y sea $0 \to K \to F \to B \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos por la derecha. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B es plano;

(ii) para cada $v \in K$, existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ con $\theta v = v$;

(iii) para cada $v_1, \ldots, v_n \in K$, existe un homomorfismo con $\theta v_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Supongamos que B es plano y $v \in K$; tomamos la base $\{x_j : j \in J\}$ de F. Sea $v = x_{j_1}r_1 + \cdots + x_{j_t}r_t$ y sea $I(v)$ el ideal por la izquierda generado por $r_1, \ldots, r_t$. Como B es plano, el lema anterior nos asegura que $v \in KI(v)$. Así, $v = \sum k_\lambda s_\lambda$, donde $k_\lambda \in K$, $s_\lambda \in I(v)$; como $s_\lambda \in I(v)$, tenemos $s_\lambda = \sum a_{\lambda_i} r_i$, donde $a_{\lambda_i} \in R$. Por tanto, $v = \sum k'_i r_i$, donde $k_i = \sum k_\lambda a_{\lambda_i} \in K$. Definimos $\theta : F \to K$ como $x_j \mapsto k'_i$ y el resto de elementos de la base van a 0. Claramente, $\theta v = v$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Tomamos una base $\{x_j : j \in J\}$ de F, y sea $v = x_{j_1}r_1 + \cdots + x_{j_t}r_t \in K$; sea $\theta : K \to F$ satisfaciendo $\theta v = v$. Entonces $v = \theta v = v = \theta(x_{j_1})r_1 + \cdots + \theta(x_{j_t})r_t \in KI(v)$. Luego por el lema anterior, B es plano.

Es evidente que (iii) implica (ii), por lo que solo resta ver que (ii) implica (iii). Lo haremos por inducción en n. El caso $n = 1$ es la hipótesis de (ii). Supongamos $n > 1$ y $v_1, \ldots, v_n \in K$. Por (ii), tenemos que existe un homomorfismo $\theta_n : F \to K$ con $\theta_n v_n = v_n$. Ahora, definimos $v'_i = v_i - \theta_n v_i \in K$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Por hipótesis de inducción, existe un homomorfismo $\theta' : F \to K$ con $\theta' v'_i = v'_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Definimos ahora $\theta : F \to K$ como $\theta v = \theta_n v + \theta'(v - \theta_n v)$. Así, tenemos que

$$\theta v_i = \theta_n v_i + \theta'(v_i - \theta_n v_i) = \theta_n v_i + v'_i = v_i, \; i = 1, \ldots, n-1$$

y
$$\theta v_n = \theta_n v_n + \theta'(v_n - \theta_n v_n) = v_n + \theta'(v_n - v_n) = v_n.$$
$\square$

Definición 3.51. Un R-módulo por la derecha B es **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta de la forma
$$F_1 \to F_0 \to B \to 0$$
donde F_1 y F_0 son libres y finitamente generados.

Es claro que todo módulo finitamente presentado es de tipo finito.

Además, con esta definición, es fácil ver que un módulo B es finitamente presentado si y solo si existe una sucesión exacta
$$0 \to K \to F \to B \to 0,$$
donde F es libre y tanto F como K son finitamente generados. Nótese que todo módulo proyectivo f.g. B es finitamente presentado, pues basta tomar una presentación libre de B de un módulo libre F f.g., con núcleo K, para así obtener una sucesión exacta corta que escinde y por tanto $F \cong B \oplus K$ y así K es f.g. Si B es plano, entonces se tiene el recíproco.

Teorema 3.52. *Todo módulo plano B finitamente presentado es proyectivo.*

Demostración. Existe una sucesión exacta
$$0 \to K \to F \to B \to 0,$$
donde F es libre y tanto F como K son f.g. Si $K = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, entonces el Teorema de Villamayor nos garantiza que existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ con $\theta v_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces si consideramos la inclusión λ, tenemos que $\theta\lambda = 1_K$ y así la sucesión escinde y B es proyectivo.
$\square$

Lema 3.53 (Lema de los cinco)**.** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas*
$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "t_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "t_4"'] & A_5 \arrow[d, "t_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$
(i) Si t_1 y t_2 son epimorfismos y t_5 es monomorfismo, entonces t_3 es sobreyectiva.

(ii) Si t_2 y t_4 son monomorfismos y t_1 es epimorfismo, entonces t_3 es inyectiva.

En particular, si $t_1, t_2, t_4,$ y t_5 son isomorfismos, t_3 es isomorfismo.

Demostración. Solo probaremos (i), pues la prueba de (ii) es similar.

Sea $b_3 \in B_3$, como t_4 es sobre, existe $a_4 \in A_4$ de forma que $t_4a_4 = h_3b_3$. Ahora, por la conmutatividad, $t_5f_4a_4 = h_4t_4a_4 = h_4h_3b_3 = 0$. Como t_5 es inyectiva, $f_4a_4 = 0$, por tanto $a_4 \in \ker f_4 = \operatorname{im} f_3$. Así, tenemos que existe $a_3 \in A_3$ con $f_3a_3 = a_4$, por lo que $h_3t_3a_3 = t_4f_3a_3 = t_4a_4 = h_3b_3$. Por tanto, $b_3 - t_3a_3 \in \ker h_3 = \operatorname{im} h_2$, luego existe $b_2 \in B_2$ con $h_2b_2 = b_3 - t_3a_3$. Como t_2 es sobre, existe a_2 con $t_2a_2 = b_2$. Usando de nuevo la conmutatividad, obtenemos que $t_3f_2a_2 = h_2t_2a_2 = h_2b_2 = b_3 - t_3a_3$. Por tanto,

$$t_3(f_2a_2 + a_3) = b_3$$

y t_3 es sobreyectiva.

□

Teorema 3.54 (Lema de Schanuel)**.** *Dadas las sucesiones exactas*

$$0 \to K_1 \to P_1 \to B \to 0 \qquad y \qquad 0 \to K_2 \to P_2 \to B \to 0,$$

donde P_1 y P_2 son proyectivos, entonces $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$.

Demostración. Consideremos el diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "j"'] & P_2 \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P_1 es proyectivo, existe un homomorfismo $\beta : P_1 \to P_2$ que hace que el cuadrado de la derecha del diagrama conmute. Además, existe un homomorfismo $\alpha : K_1 \to K_2$ que hace que conmute el cuadrado de la izquierda del diagrama. En efecto, basta definir $\alpha(x) = j^{-1}(\beta(i(x)))$. Por la conmutatividad del diagrama, $g(\beta(i(x))) = f(i(x)) = 0$, luego $\beta(i(x)) \in \ker g = \operatorname{im} j$ y como j es monomorfismo, α está bien definida y hace conmutativo el diagrama. Existe así una sucesión exacta

$$0 \to K_1 \xrightarrow{\theta} P_1 \oplus K_2 \xrightarrow{\psi} P_2 \to 0,$$

donde $\theta : k_1 \mapsto (ik_1, \alpha k_1)$ y $\psi : (p_1, k_2) \mapsto \beta p_1 - jk_2$. Como P_2 es proyectivo, la sucesión escinde, por lo que tenemos que $P_1 \oplus K_2 \cong P_2 \oplus K_1$.

□

Teorema 3.55. *Si B es finitamente presentado y tenemos una sucesión exacta*

$$0 \to K \to M \xrightarrow{f} B \to 0,$$

donde M es f.g., entonces K es f.g.

Demostración. Supongamos primero que M es libre. Como B es finitamente presentado, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K_1 \to F_1 \to B \to 0,$$

donde F_1 y K_1 son f.g. y F_1 es libre. Usando el Lema de Schanuel, tenemos que

$$M \oplus K_1 \cong F_1 \oplus K.$$

Pero $M \oplus K_1$ es f.g., por lo que también lo es su sumando directo K.

Si M no es libre, entonces tomamos un módulo libre f.g. F y una presentación libre β de F en M. Existe entonces un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f\beta \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & F \arrow[r, "f\beta"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, $\ker f\beta$ es f.g., por lo demostrado previamente, además, aplicando el lema de los cinco al diagrama, el homomorfismo α es sobreyectivo y así, obtenemos que K es f.g.

□

Capítulo 4

Teorema de Lazard

En capítulos precedentes hemos introducido los módulos libres, proyectivos, inyectivos y planos, y hemos visto algunas relaciones entre ellos. Por ejemplo: libre implica proyectivo, proyectivo implica plano, y proyectivo de tipo finito equivale a plano de presentación finita. El resultado principal de este capítulo (Teorema de Lazard) establece una relación entre los módulos planos y los módulos libres. Para enunciarlo y demostrarlo, necesitamos alguna notación y algunos resultados previos

Lema 4.1. *Sea A un R-módulo. Existe un conjunto dirigido I y un sistema directo de R-módulos de presentación finita $\{A_i, \varphi_j^i\}$ tal que $A \cong \varinjlim A_i$.*

Demostración. Consideremos una presentación de A

$$R^{(L)} \xrightarrow{u} R^{(K)} \xrightarrow{v} M \to 0.$$

Sea I el conjunto de pares $i = (K', L')$ donde K' es un subconjunto finito de K y L' es un subconjunto finito de L tales que u induce un homomorfismo $u_i : R^{(K')} \to R^{(L')}$.

Para $i \in I$, sea $A_i = \operatorname{coker} u_i$ y $v_i : R^{(L')} \to A_i$ el homomorfismo canónico:

$$\begin{tikzcd} R^{(K')} \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\phi_i"'] & R^{(L')} \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & A_i \arrow[r] \arrow[d, "\theta_i"'] & 0 \\ R^{(K)} \arrow[r, "u"] & R^{(L)} \arrow[r, "v"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

siendo ϕ_i y ψ_i las inclusiones y θ_i el homomorfismo inducido por paso a los cocientes. Concedemos a I una relación de orden mediante

$$i = (K', L') \leq j = (K'', L'') :\iff K' \subset K'', L' \subset L''.$$

Entonces I es un conjunto dirigido. Para $i \leq j$, sea f_j^i el homomorfismo inducido por paso al cociente por la inclusión $R^{(L')} \to R^{(L'')}$. Así, $\{A_i, f_j^i\}$ es un sistema directo sobre

I. Además, $\theta_j f_j^i = \theta_i$ si $i \leq j$. Pasando al límite, se obtiene

$$\begin{array}{ccccccc}
\underrightarrow{lim} R^{(K')} & \longrightarrow & \underrightarrow{lim} R^{(L')} & \longrightarrow & \underrightarrow{lim} A_i & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta & & \\
R^{(K)} & \xrightarrow{u} & R^{(L)} & \xrightarrow{v} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

como ϕ y ψ son isomorfismos, se deduce, por el lema de los cinco, que θ es isomorfismo.

□

Dados anillos R, S y ${}_RA_S$, ${}_RB$, consideramos el homomorfismo natural de S-módulos

$$\theta_B^A : Hom_S(A, S) \otimes_R B \to Hom_R(A, B)$$
$$f \otimes x \mapsto \theta_B^A(f \otimes x)$$

donde $\theta_B^A(f \otimes x) : A \to B$ se define como $a \mapsto f(a)x$.

Teorema 4.2. *(i) Si F es un R-módulo libre de tipo finito, entonces $Hom_R(F, R)$ es libre de tipo finito.*

(ii) Si P es un R-módulo proyectivo de tipo finito, entonces $Hom_R(P, R)$ es un R-módulo proyectivo de tipo finito.

Demostración. Para (i):

$$F = \oplus_{i=1}^n R \Rightarrow Hom(F, R) = Hom(\oplus_{i=1}^n R, R) = \oplus_{i=1}^n Hom(R, R) = \oplus_{i=1}^n R.$$

Ahora veamos (ii). Por ser P proyectivo, es sumando directo de un grupo libre $F = P \oplus Q$ de tipo finito, por tanto

$$Hom(F, R) = Hom(P \oplus Q, R) = Hom(P, R) \oplus Hom(Q, R).$$

Como hemos visto que $Hom(F, R)$ era libre de tipo finito, $Hom(P, R)$ es sumando directo de un módulo libre de tipo finito y por tanto es un módulo proyectivo de tipo finito.

□

Teorema 4.3. *Dado un (R, S)-bimódulo A, son equivalentes:*

(i) θ_B^A es un isomorfismo para todo R-módulo B;

(ii) θ_A^A es isomorfismo;

(iii) θ_A^A es sobreyectiva;

(iv) A es un R-módulo proyectivo de tipo finito.

Demostración. Las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ son triviales. Veamos que (iii) implica (iv).

Para ver que A es proyectivo de tipo finito, por el teorema de la base proyectiva, basta encontrar una base proyectiva finita. Como θ_A^A es sobreyectiva, existe $\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i$ tal que $\theta_A^A(\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i) = 1_A$. Ahora, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ y $\{f_i\}_{i=1}^n \subset Hom_R(A, R)$. Por ser conjuntos finitos, se tiene la primera condición de base proyectiva. Para cada $x \in A$, tenemos que

$$x = \theta_A^A(\sum f_i \otimes x_i)(x) = \sum \theta_A^A(f_i \otimes x_i)(x) = \sum f_i(x)x_i.$$

Por lo tanto tenemos una base proyectiva finita y así, A es un R-módulo proyectivo de tipo finito.

Demostraremos finalmente que (iv) implica (i). Supongamos primeramente que A es un módulo libre de tipo finito, luego $A = \oplus_{i=1}^n R$ y por lo que hemos visto $Hom(A, R) = \oplus_{i=1}^n R$ también es libre de tipo finito. Por tanto,

$$\theta_B^A : Hom_S(A, S) \otimes_R B \cong (\oplus_{i=1}^n R) \otimes_R B \cong \oplus_{i=1}^n (R \otimes_R B) \cong \oplus_{i=1}^n B \cong$$

$$\cong \oplus_{i=1}^n Hom(R, B) \cong \oplus_{i=1}^n Hom(R, B) \cong Hom(\oplus_{i=1}^n R, B) \cong Hom(P, B).$$

Supongamos ahora que A es proyectivo de tipo finito, entonces $A \oplus Q = F$, donde F es un R-módulo libre de tipo finito. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom(A,R) \otimes_R A \arrow[r, "\theta_B^A"] \arrow[d, "\mu_1"] & Hom_R(A,B) \arrow[d, "\nu_1"'] \\
Hom(F,R) \otimes_R A \arrow[r, "\theta_B^F"] & Hom_R(F,B) \\
Hom(Q,R) \otimes_R A \arrow[r, "\theta_B^Q"] \arrow[u, "\mu_2"] & Hom_R(Q,B) \arrow[u, "\nu_2"']
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos verticales son las respectivas inclusiones y θ_B^F coincide con el homomorfismo inducido por la propiedad universal de la suma directa. Luego, como θ_B^F es isomorfismo, θ_B^A es isomorfismo.

$\square$

Recordemos que si tenemos un conjunto dirigido I y $\{A_i, \varphi_j^i\}$ un sistema directo de R-módulos con conjunto de índices I, entonces, si P es un R-módulo, los homomorfismos $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ inducen homomorfismos $Hom_R(P, A_i) \to Hom_R(P, \varinjlim A_i)$ y por tanto un homomorfismo

$$\lambda^P : \varinjlim Hom_R(P, A_i) \to Hom_R(P, \varinjlim A_i).$$

Lema 4.4. *(i) Si el R-módulo A es finitamente generado (respectivamente finitamente presentado), entonces λ^P es inyectivo (respectivamente biyectivo).*

(ii) Supongamos que B es R-plano. Si el R-módulo P es finitamente generado (respectivamente finitamente presentado), entonces θ_B^P es inyectivo (respectivamente biyectivo).

Demostración. Demostraremos (ii), pues (i) se hace de forma análoga. Sea

$$L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} P \to 0$$

una sucesión exacta tal que L_0 (respectivamente L_0 y L_1) es libre finitamente generado. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(P,R)\otimes_R B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_B^P"'] & Hom(L_0,R)\otimes_R B \arrow[r] \arrow[d, "\theta_B^{L_0}"'] & Hom(L_1,R)\otimes_R B \arrow[d, "\theta_B^{L_1}"'] \\
0 \arrow[r] & Hom(P,B) \arrow[r] & Hom(L_0,B) \arrow[r] & Hom(L_1,B)
\end{tikzcd}$$

La sucesión inferior es exacta, por lo que la superior es exacta, ya que B es plano.

Se sabe que $\theta_B^{L_0}$ es biyectiva (respectivamente $\theta_B^{L_0}$ y $\theta_B^{L_1}$ son biyectivas), por lo que θ_B^P es inyectiva. Si, además, $\theta_B^{L_1}$ es biyectiva, θ_B^P es biyectiva.

□

Lema 4.5. *Sea I un conjunto dirigido, $\{M_j, f_j^i\}$ un sistema directo sobre I, $M = \varinjlim M_i$ y $f_i : M_i \to M$, $i \in I$, los homomorfismos canónicos.*

Sea $\alpha : I \to I$ una aplicación tal que $\alpha(i) > i$ para todo $i \in I$. Supongamos dado para cada $i \in I$ un R-módulo L_i y dos homomorfismos $u_i : M_i \to L_i$, $v_i : L_i \to M_{\alpha(i)}$ tal que $v_i u_i = f_{\alpha(i)}^i$.

Sea I el conjunto ordenado obtenido de I mediante:

$$i \leq j \quad si \quad i = j \quad o \quad \alpha(i) \leq j.$$

Si $i, j \in I$ con $i \leq j$, sea $g_j^i : L_i \to L_j$ el homorfismo tal que $g_j^i = 1$ si $i = j$, $g_j^i = u_j f_j^{\alpha(i)} v_i$ si $\alpha(i) \leq j$.

Si $i \in I$, sea $g_i : L_i \to M$ el homomorfismo $f_{\alpha(i)} v_i$. Entonces I es dirigido, $\{L_i, g_j^i\}$ es un sistema directo sobre I y el homomorfismo $g : \varinjlim L_i \to M$ inducido por los g_i es un isomorfismo.

Demostración. Es claro que I es dirigido. Si $i, j, k \in J$ con $i < j < k$, se tiene :

$$g_k^j g_j^i = u_k f_k^{\alpha(j)} v_j u_j f_j^{\alpha(i)} v_i = u_k f_k^{\alpha(j)} f_{\alpha(j)}^j f_j^{\alpha(i)} v_i = u_k f_k^{\alpha(i)} v_i = g_k^i.$$

Por lo que $\{L_i, g_j^i\}$ forman un sistema directo sobre I.

Si $i, j \in I$, con $i < j$:

$$g_j g_j^i = f_{\alpha(j)} v_j u_j f_j^{\alpha(i)} v_i = f_{\alpha(j)} f_{\alpha(j)}^j f_j^{\alpha(i)} v_i = f_{\alpha(i)} v_i = g_i.$$

Por tanto los g_i inducen un homomorfismo en el límite directo.

Veamos la última afirmación. Para cada $i \in I$, se tiene $g_i u_i = f_{\alpha(i)} v_i u_i = f_{\alpha(i)} f_{\alpha(i)}^i = f_i$. Luego $f_i(M_i) \subset g_i u_i(M_i) \subset g_i(L_i)$ y por tanto g es sobre.

Sea $i \in I$ y sean $x, y \in L_i$ con $g_i(x) = g_i(y)$, luego $f_{\alpha(i)} v_i(x) = f_{\alpha(i)} v_i(y)$. Existe $j \in I$, tal que $j \geq \alpha(i)$ y tal que $f_j^{\alpha(i)} v_i(x) = f_j^{\alpha(i)} v_i(y)$.

Entonces, $g_j^i(x) = u_i f_j^{\alpha(i)} v_i(x) = u_j f_j^{\alpha(i)} v_i(y) = g_j^i(y)$, es decir, $g_j^i(x - y) = 0$, luego por el Teorema 1.33, concluímos que g es inyectiva y finalmente que g es isomorfismo.

□

Ahora ya estamos en condiciones de presentar el resultado principal.

Teorema 4.6 (Teorema de Lazard). *Para un R-módulo B, son equivalentes:*

(i) B es plano;

(ii) Para todo R-módulo finitamente presentado P, el homomorfismo canónico

$$\theta_B^P : Hom(P, R) \otimes_R B \to Hom_R(P, B)$$

es sobre;

(iii) para todo R-módulo finitamente presentado P y todo homomorfismo $u : P \to B$, existe un R-módulo libre finitamente generado L y homomorfismos $v : P \to L$ y $w : L \to B$ tal que $u = wv$;

(iv) Existe un conjunto dirigido J y un sistema directo de R-módulos libres finitamente generados $\{L_j\}$ sobre J tal que $B \cong \varinjlim L_j$.

Demostración. Que (iv) implica (i) es evidente, pues ya hemos visto que el límite directo de un sistema directo de módulos planos con conjunto de índices dirigido es plano. Ahora, (i) implica (ii) por el Lema 4.4.

Veamos que (ii) implica (iii). Sea P un R-módulo finitamente presentado y $u : P \to B$ un homomorfismo. Tenemos que θ_B^P es sobreyectiva, por lo que existen $f_1, \ldots, f_n \in Hom(P, R)$ y $x_1, \ldots, x_n \in B$ tal que $u(p) = \sum f_i(p) x_i$ para todo $p \in P$.

Sea $v : P \to R^n$ el homomorfismo definido $p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_n(p))$ y $w : R^n \to B$ el homomorfismo definido $(r_1, \ldots, r_n) \mapsto \sum r_i x_i$. Por tanto, $u = wv$.

Solo resta ver que (iii) implica (iv). Por el Lema 4.1, existe un sistema directo $\{B_i, f_j^i\}$ de R-módulos finitamente presentados sobre un conjunto dirigido I tal que $B \cong \varinjlim B_i$.

Se puede suponer que I no tiene un mayor elemento, pues en caso contrario, basta con reemplazar I por $I \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico:

$$(i,n) \leq (j,m) \iff \begin{cases} i \leq j \\ \quad o \\ i = j \quad y \quad n \leq m, \end{cases}$$

con $B_{(i,n)} = B_i$.

Denotemos entonces $f_i : B_i \to B$ el homomorfismo canónico. Por hipótesis, para cada $i \in I$, existe un R-módulo libre finitamente generado L_i y unos homomorfismos $u_i : B_i \to L_i$ y $v_i' : L_i \to B$ tal que $v_i' u_i = f_i$.

Dado que L_i es libre de tipo finito e I no tiene un mayor elemento, existe $j > i$ y un homomorfismo $v_i'' : L_i \to B_j$ tal que $v_i' = f_j vi''$. En efecto, basta considerar $\{x_1, ..., x_n\}$ una base finita de L_i, para cada x_l, existe un $j_l \geq i$ tal que $v_i'(x_l)$ es la imagen por j_l de algún elemento de M_{j_l}. Ahora podemos tomar j mayor que todos los j_l, pues I es dirigido y no tiene un mayor elemento, y así basta definir $v_i''(x_l)$ como un elemento de $f_j^{-1}(v_i(x_l))$. Tendríamos por tanto el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L_i \arrow[r, "v_i''"] \arrow[dr, "v_i'"'] & B_j \arrow[d, "f_j"] \\ B_i \arrow[u, "u_i"] \arrow[r, "f_i"'] & B \end{tikzcd}$$

Se tiene $f_j v_i'' u_i = f_i = f_j f_j^i$. Luego como los B_l son finitamente presentados, por el Lema 4.4 tenemos que $\lambda^{B_i} : \varinjlim Hom_R(B_i, B_l) \to Hom_R(B_i, \varinjlim B_l)$ es isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(B_i, B_j) \arrow[r, "\sigma_j"] \arrow[d, "(f_j)_*"'] & \varinjlim Hom(B_i, B_l) \arrow[dl, dashed, "\lambda^{B_i}"] \\ Hom(B_i, B) & \end{tikzcd}$$

donde σ_j es el homomorfismo del límite directo. Ahora, como $f_j v_i'' u_i = f_j f_j^i \in Hom(B_i, B)$, tenemos $\sigma_j v_i'' u_i = \sigma_j f_j^i$, pero en virtud del Teorema 1.33, como $\sigma_j(v_i'' u_i - f_j^i) = 0$, existe $k \geq j$ tal que $f_k^j(v_i'' u_i - f_j^i) = 0$, por tanto $f_k^j v_i'' ui = f_k^j f_j^i = f_k^i$.

Pongamos $k = \alpha(i)$ y sea $v_i := f_k^j v_i'' : L_i \to M_{\alpha(i)}$. Se tiene $v_i u_i = f_{\alpha(i)}^i$. Aplicando ahora el Lema 4.5, deducimos que $B \cong \varinjlim L_i$.

$\square$

Lo que nos dice entonces el Teorema de Lazard es que un módulo es plano si, y solo si, es límite directo de módulos libres de tipo finito. Tenemos así la relación que buscábamos entre módulos planos y módulos libres.

Bibliografía

[1] Rotman, Joseph J., *An introduction to homological algebra*, Pure and Applied Mathematics, 85, Boston, MA: Academic Press, 1979.

[2] Hilton, P. J., Stammbach, B., *A course in homological algebra*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 4, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Greenberg, M.J., *Algebraic topology : a first course*, The Benjamin/Cummings Publishing, Reading, Massachusetts, 1981.

[4] Anderson. Frank W., Fuller. Kent R., *Rings and categories of modules*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 13, Springer-Verlag, New York, 1992.

[5] Lane. S.M., *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] Grillet. Pierre Antoine, *Abstract algebra*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 242, Springer-Verlag, New York, 2007.

[7] Scott Osborne. M., *Basic homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 196, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] Lam. T.Y., *Lectures in modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, 189, Springer-Verlag, New York, 1999.

[9] Bourbaki. N., *Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.*, Eléments de mathématique, Masson, París, 1980.