



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Medida e Integración abstractas: desvelando o Teorema de Radon-Nikodym

Francisco Estévez Lengua

2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Medida e Integración abstractas:  
desvelando o Teorema de  
Radon-Nikodym

Francisco Estévez Lengua

Xuño, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Análise Matemática</b>
<b>Título: Medida e Integración abstractas: desvelando o Teorema de Radon-Nikodym</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Contar e medir son, sen dúbida, algunhas das actividades matemáticas máis milenarias. Con todo, preguntas tales como: Que se pode medir e de que maneiras poderíamos facelo?, referidas a obxectos matemáticos, son, o mesmo que algunhas respostas a elas, moito máis recentes. Xa dende o primeiro curso, aprécianse relacións entre integrar e medir, relacións que van tomando forma nos cursos sucesivos. No eido da Integración, son relevantes as chamadas funcións integrais, que encontramos en relación con algunha das formulacións do Teorema Fundamental do Cálculo. En relación con elas, suscítanse algunhas cuestións como, por exemplo, determinar que funcións derivables poden ser recuperadas integrando (nalgún sentido) as súas funcións derivadas. O tratamento desta cuestión levou a interesantes resultados da Análise clásica. Por outra parte, hai case un século, Lebesgue, reflexionaba sobre a conveniencia de considerar, ademais das funcións de punto, as que denominaba funcións de dominio, pois moitas das cantidades manexadas na Física, tales como masa, cantidade de calor, cantidade de electricidade, etcétera poderían tratarse mellor con esta clase de funcións. Adaptar a este contexto cuestións clásicas como a mencionada previamente, levaranos ó principal resultado da memoria: O teorema de Lebesgue- Radon-Nikodym.</p>
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría da Medida . . . . .	1
1.1.1. Espazos de medida . . . . .	2
1.1.2. Funcións medibles . . . . .	4
1.1.3. Funcións simples . . . . .	5
1.2. Integración Abstracta . . . . .	6
1.2.1. Integración de funcións simples e medibles . . . . .	7
1.2.2. Funcións complexas . . . . .	8
1.2.3. Papel dos conxuntos de medida nula . . . . .	10
1.3. Os espazos $L^p$ . . . . .	12
1.3.1. Espazos $\mathcal{L}^p$ . . . . .	12
1.3.2. Os Espazos $L^p$ . . . . .	13
<b>2. Descomposicións de medidas</b>	<b>17</b>
2.1. Extensión das medidas e descomposicións . . . . .	17
2.1.1. Medidas con signo e medidas reais . . . . .	18
2.1.2. Medidas complexas . . . . .	19

---

2.1.3. Descomposición de medidas . . . . .	20
2.2. Variación dunha medida . . . . .	21
2.3. Descomposición de Jordan . . . . .	25
2.4. Continuidade Absoluta . . . . .	27
2.5. Descomposición de Hahn . . . . .	29
<b>3. Teorema de Radon Nikodym</b>	<b>33</b>
3.1. O teorema de Radon-Nikodym . . . . .	34
3.1.1. Primeira demostración . . . . .	36
3.1.2. Segunda demostración . . . . .	40
3.2. Propiedades da derivada de Radon-Nikodym . . . . .	43
3.3. Algunhas consecuencias do Teorema de Radon-Nikodym . . . . .	44
3.4. Exemplo ilustrativo . . . . .	47
3.5. Recensión histórica . . . . .	53
3.5.1. Henri Lebesgue . . . . .	53
3.5.2. Johann Radon . . . . .	55
3.5.3. Otto Nikodym . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>
<b>A. Información complementaria</b>	<b>61</b>
A.1. A recta real ampliada, $\bar{\mathbb{R}}$ . . . . .	61
A.2. Nocións de espazos normados e espazos de Hilbert. . . . .	62





## Resumo

Esta memoria presenta un estudo completo e detallado do **concepto de medida**, comezando polas **medidas positivas** e estendendo progresivamente a análise a casos máis xerais, como as **medidas reais e complexas**. Dédicase unha atención especial a un dos resultados fundamentais da **Teoría da Medida**: o **Teorema de Radon–Nikodym**, que xunto co **Teorema de Descomposición de Lebesgue**, é unha ferramentas esenciais para comprender a estrutura e o comportamento das medidas.

Para facilitar o desenvolvemento destes temas, introdúcense os coñecementos previos necesarios en **Teoría da Medida** e **Análise Funcional**, incluíndo definicións clave, proposicións auxiliares e resultados intermedios que permiten unha formulación e demostración rigorosa dos teoremas. Ademais, inclúese unha **recensión histórica** que destaca as achegas de **Henri Lebesgue**, **Johann Radon** e **Otton Nikodym** sobre o desenvolvemento do teorema que leva os seus nomes.

O estudo complétase cun **exemplo académico detallado** que ilustra a aplicación do **Teorema de Radon–Nikodym** nun contexto concreto. En conxunto, este traballo busca ofrecer unha comprensión sólida e accesible dun dos **teoremas máis relevantes da análise matemática contemporánea**.

## Abstract

This dissertation presents a comprehensive and detailed study of the **concept of measure**, starting with **positive measures** and gradually extending the analysis to more general cases, such as **real and complex measures**. Special attention is given to one of the fundamental results in **Measure Theory**: the **Radon–Nikodym Theorem**, which, along with the **Lebesgue Decomposition Theorem**, is an essential tool for understanding the structure and behavior of

---

measures.

To support the development of these topics, the necessary background in **Measure Theory** and **Functional Analysis** is introduced, including key definitions, auxiliary propositions, and intermediate results that enable a rigorous formulation and proof of the theorems. Additionally, a **historical review** is included, highlighting the contributions of **Henri Lebesgue**, **Johann Radon**, and **Otton Nikodym** to the development of the theorem with their names.

The study is completed with a **detailed academic example** that illustrates the application of the **Radon–Nikodym Theorem** in a concrete setting. Overall, this work aims to provide a solid and accessible understanding of one of the **most relevant theorems in contemporary mathematical analysis**.

# Introdución

Ao longo da historia das matemáticas o estudo das lonxitudes, das áreas e dos volumes foi unha constante. Co paso do tempo as necesidades da sociedade e as aspiracións teóricas e prácticas fixeron que se desenvolvera o **cálculo diferencial e integral**. Tras varios séculos de estudos, a teoría da medida e a integración desenvolta por *Henri Lebesgue*, a comezos do século XX, marcou un punto de inflexión fundamental na análise matemática. A súa proposta dunha nova forma de integrar funcións ampliou significativamente o abano de obxectos susceptibles de análise.

En 1926, *Henri Lebesgue* pronunciou unha conferencia en Copenhaguen, cuxa transcripción en inglés pode lerse en Chae,[2]. Vinte e tres anos despois da publicación de *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, [4], Lebesgue expuxo os avances que proporcionaba a súa integral, así como sinalou os puntos clave que, ao seu xuízo, debían ser reformulados e estudados con máis profundidade. Un destes puntos eran as funcións definidas sobre conxuntos, que aparecen de forma natural no desenvolvemento do cálculo integral moderno.

Segundo as palabras de Lebesgue, as **funcións de conxunto** xorden ao considerar a integral indefinida (para nós, a función integral) como unha función que depende do conxunto de integración. Lebesgue dicía que a integral dunha función entre  $a$  e  $b$  é definida se o conxunto  $(a, b)$  era coñecido, noutro caso, dicía que a integral é indefinida.

En concreto, chega a caracterizar as funcións de conxunto que eran integrais indefinidas –no senso de Lebesgue–, pois estas verificaban dúas propiedades: a  **$\sigma$ -aditividade** e a **continuidade absoluta**, conceptos que se explicarán ao longo do traballo.

Cando unha función de conxunto,  $\Psi(E)$ , verifica ambas as dúas condicións anteriores, Lebesgue afirma que tal función (de conxunto) é a integral indefinida dunha función de punto<sup>1</sup> ( $f(P)$ ). Isto denótase por

$$\Psi(E) = \int_E f(P) dm(E). \tag{1}$$

---

<sup>1</sup>As funcións que considera Lebesgue son funcións de variable real ou de varias variables reais.

Coñecendo  $\Psi(E)$ , pódese recuperar  $f(P)$ , salvo en conxuntos de medida nula, considerando a bola  $\Delta = B(P, \delta)$ , de radio  $\delta$  e centrada en  $P$ , e tomando o límite do seguinte cociente:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Psi(\Delta)}{m(\Delta)}. \quad (2)$$

Este procedemento é análogo ao cálculo da derivada dunha función real dunha variable. En efecto, se  $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función definida nun conxunto aberto  $A$ , dise que é derivable no punto  $x_0 \in A$  se existe o límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3)$$

Así pois, este procedemento pode entenderse como unha xeneralización do **Teorema Fundamental do Cálculo**, establecendo a derivación de funcións de conxunto, coa medida de referencia  $m$  xogando o papel do “diferencial” clásico.

Segundo Lebesgue, moitas das magnitudes físicas —como a masa, a cantidade de calor ou a electricidade— non se definen sobre puntos, senón sobre corpos ou rexións estendidas. Son, polo tanto, funcións de dominio ou funcións de conxunto. As funcións que asociamos aos puntos (como a densidade ou a calor específica) son, en realidade, derivadas destas funcións de conxunto respecto doutra, como a medida (de Lebesgue). Esta observación levaría á futura formulación do teorema de Radon-Nikodym.

Na súa conferencia, Lebesgue sinala que non se utilizaban as funcións de conxunto porque aínda non se coñecían, é dicir, non era que se desbotasen conscientemente, senón que simplemente non formaban parte do repertorio matemático da época. As funcións de conxunto foron gañando relevancia e comezaron a ser obxecto de estudo.

O noso traballo, centrase fundamentalmente no estudo destas funcións, pois ao definir a integral en función do conxunto de integración, obtense unha medida segundo é coñecido:

**Teorema 0.1.** *Se  $(X, \mathcal{M})$  é un espazo medible,  $\mu$  unha medida positiva en  $\mathcal{M}$  e  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  é unha función  $\mathcal{M}$ -medible, daquela:*

- *A función de conxunto  $\varphi : E \in \mathcal{M} \rightarrow \varphi(E) := \int_E f d\mu \in [0, \infty]$  é unha medida positiva.*
- *Verifícase que  $\int_X g d\varphi = \int_X g \cdot f d\mu$  para calquera  $g$  función  $\mathcal{M}$ -medible non negativa definida en  $X$ .*

Este teorema permite crear novas medidas a partires da inicial. Así mesmo, as integrais respecto destas novas medidas pódense reducir a integrais respecto da medida inicial. Isto leva naturalmente a preguntarnos se o proceso tamén se pode reverter e cal é a súa interpretación matemática.

- O recíproco do Teorema 0.1 é certo? É dicir, dada un certo espazo de medida, calquera outra medida se pode obter a través dunha representación integral como a indicada no teorema?

Esta cuestión non ten unha resposta inmediata e require dunha ferramenta fundamental da teoría da medida: o Teorema de Radon-Nikodym, obxecto principal deste traballo, pois enuncia condicións baixo as que se lle pode dar resposta afirmativa a esta cuestión.

Para iso, preséntase nesta memoria un estudo que se desglosa en tres capítulos ben diferenciados.

No primeiro capítulo revisaranse os **conceptos e resultados básicos**, xa coñecidos, de Teoría da Medida e Integración Abstracta para establecer un marco sólido no estudo das medidas, o principal obxecto de interese. Farase fincapé nas propiedades das funcións medibles, así como nos Teoremas de Convergencia. Por outra parte, estudaranse os espazos  $L^p$ , pois son os conxuntos de funcións cos que traballaremos. Inclúese esta información para unha maior autonomía da lectora ou do lector. Tamén se inclúen na memoria dous apéndices con resultados básicos que complementan este capítulo.

No segundo capítulo procederáse a estender o concepto de **medida** (partindo das medidas positivas, obteremos as medidas reais e as medidas complexas). De seguido, estúdanse conceptos básicos para analizar as medidas, tales como a **variación total**, a **continuidade absoluta** e a **ortogonalidade**. Estas propiedades permiten descompor as medidas, obtendo varias **descomposicións**, como a de Jordan ou a de Lebesgue.

No terceiro capítulo comentaránse as hipóteses necesarias para poder chegar a unha primeira formulación do **Teorema de Radon-Nikodym**. Procederáse a realizar dúas demostracións diferentes, permitindo amosar dous camiños distintos para chegar ao mesmo punto. Así mesmo, estenderáse o teorema a contextos máis xerais (considerando medidas non só positivas e finitas, senón complexas e  $\sigma$ -finitas). Tras as demostracións presentaránse as **propiedades da derivada de Radon-Nikodym**, afirmando que ten as mesmas propiedades ca unha derivada clásica; así como tamén se enunciarán e demostrarán varias consecuencias (representación polar dunha medida complexa, representación da medida variación total, teorema de descomposición de Hahn e minimalidade da descomposición de Jordan). Finalmente, neste capítulo farase unha **recensión histórica** que permitirá, intentando adecuar a notación orixinal dos autores, expor os avances que foron acadando cada un. A orixe deste teorema remóntase aos traballos de Johann Radon e Otto Nikodym. Radon formalizou inicialmente a idea no contexto das medidas en espazos euclidianos, mentres que Nikodym xeneralizou o resultado ao caso abstracto de medidas  $\sigma$ -aditivas. Porén, no primitivo traballo de Lebesgue, xa se podía interpretar un caso particular do teorema.

Tras cada capítulo inclúese unha sección dedicada a comentar as **referencias bibliográficas**

empregadas, realizando comentarios e precisións do enfoque seguido. Cabe destacar que os autores máis consultados son *Rudin* e *Cohn*, por seren os libros máis accesibles e cunha exposición clara dos resultados. Ademais, tamén se consultaron os apuntamentos de “Teoría da medida” da materia *Análise real e complexa*, materia do Mestrado Universitario en Matemáticas, da Prof. Rosa María Trinchet Soria, [11].

En resumo, este traballo é unha chave que recolle a información esencial para o traballo con **medidas abstractas** e a demostración do **Teorema de Radon-Nikodym**. Porén, as súas aplicacións non son menos importantes, mais non serán obxecto de estudo nesta memoria. Este teorema ten aplicacións no campo da Estatística e Probabilidade, sendo un actor subxacente ao concepto de **probabilidade condicional**. Tamén se emprega no **cálculo estocástico**, para formular cambios de medida, esperanzas condicionais e para describir leis de procesos aleatorios. Estas aplicacións precisarían un desenvolvemento polo miúdo que excede os obxectivos deste traballo, mais cómpre salientar a súa aplicabilidade e repercusión.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo recordaranse conceptos esenciais para comprender as bases teóricas que conducirán á formulación e ás diferentes versións da demostración do Teorema de Radon-Nikodym, constituíndo un paso imprescindible na construción dos argumentos que se desenvolverán nos capítulos posteriores.

Comezarase introducindo a noción de **espazo de medida**, definindo as **funcións medibles** e destacando as súas propiedades máis relevantes. Para iso, é necesario definir primeiro que conxuntos se poden medir e baixo que condicións. Verase que as medidas poden tomar valores non finitos, logo será preciso establecer un marco de traballo axeitado. No anexo A.1 recórdanse as propiedades topolóxicas, orde e operacións habituais da recta real ampliada,  $\bar{\mathbb{R}}$ , non só para o estudo das medidas senón tamén das funcións que poidan tomar valores non finitos. Estes conceptos servirán de marco para a **integración abstracta** e a análise de medidas. Finalmente, desenvolverase unha teoría básica enmarcada na **Análise Funcional**, na que se definirá o concepto de **espazo  $L^p$** .

### 1.1. Teoría da Medida

Co obxectivo de estender o concepto de lonxitude, área ou volume a conxuntos máis xerais ca os intervalos ou figuras xeométricas regulares, desenvolveuse unha formulación rigorosa baseada na idea de medida, que permite asignar un “tamaño” adecuado a unha gran variedade de subconxuntos dun espazo dado.

### 1.1.1. Espazos de medida

Sexa  $X$  un conxunto arbitrario non baleiro. Recordaranse as definicións e propiedades das  $\sigma$ -álxebras e das medidas, así como os distintos tipos de espazos de medida atendendo á finitude.

**Definición 1.1.** Unha  $\sigma$ -álgebra de subconxuntos de  $X$  é calquera familia  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$  (non baleira).
2. Se  $A \in \mathcal{M}$  entón  $A^c \in \mathcal{M}$  (pechada respecto a complementación).
3. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  entón  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$  (pechada respecto unións numerables).

Dende a definición de  $\sigma$ -álgebra séguese a seguinte proposición.

**Proposición 1.2.** Sexa  $\mathcal{M}$  unha  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

1.  $X \in \mathcal{M}$ .
2. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  entón  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ .
3. Se  $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{M}$  entón  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$  e  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$ .
4. Se  $A, B \in \mathcal{M}$  entón  $A \setminus B (= A \cap B^c) \in \mathcal{M}$ .

**Definición 1.3.** Sexa  $X$  un conxunto e  $\mathcal{M}$  unha  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ . Dirase que  $(X, \mathcal{M})$  é un **espazo medible** e chamaranse **conxuntos medibles** aos elementos de  $\mathcal{M}$ .

Traballarase, frecuentemente, con funcións valoradas en espazos topolóxicos, estrutura que induce un espazo medible.

**Definición 1.4.** A  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre un espazo topolóxico  $(X, \tau)$ , denótase por  $\mathcal{B}(X)$ , e defínese como a  $\sigma$ -álgebra xerada polos conxuntos abertos de  $X$ , isto é, é a menor  $\sigma$ -álgebra que contén todos os conxuntos abertos.

**Definición 1.5.** Unha **partición medible** dun conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$  é unha colección numerable de conxuntos medibles  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  verificando que

$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

**Observación 1.6.** Dado  $E \in \mathcal{M}$ , denotarase por  $\mathcal{P}_m(E)$  á familia de todas as súas particións medibles.

**Definición 1.7.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible. Unha **medida** en  $(X, \mathcal{M})$  é unha aplicación  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ , verificando:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu$  é  $\sigma$ -aditiva, é dicir, se se considera unha unión numerable de conxuntos medibles disxuntos dous a dous, isto é,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$  entón

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Equivalentemente

$$\forall E \in \mathcal{M} \text{ e } \forall \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(E) \text{ cumpre que } \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A propiedade 2 tamén se adoita chamar aditividade numerable.

**Proposición 1.8.** Se  $(X, \mathcal{M})$  é un espazo medible e  $\mu$  é unha medida en  $\mathcal{M}$ , cúmprese:

1. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j$ , daquela,  $\mu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ .  
(aditividade finita da medida)

2. Se  $A, B \in \mathcal{M}$  e  $A \subset B$ , daquela,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . (monotonía da medida)

3. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ , daquela,  $\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ . ( $\sigma$ -subaditividade da medida)

En particular, se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ , daquela,  $\mu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ . (subaditividade finita da medida)

4. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  e  $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , daquela,

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

5. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ ,  $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\mu(A_1) < \infty$ , daquela,

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**Observación 1.9.** Unha medida é unha **función de conxunto**, pois esta aplicación asocia un valor para cada conxunto dunha  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ . Nótese que por como está definida, podería ser que haxa conxuntos con medida infinita.

**Observación 1.10.** A definición 1.7 amosa que a medida é unha función non negativa, polo tanto denominaranse a este tipo de medidas, **medidas positivas**. Máis adiante, motivarase a necesidade de estender o concepto de medida a contextos máis xerais.

Tras ter definido o concepto de medida, pódese estender o concepto de espazo medible.

**Definición 1.11.** Sexa  $X$  un conxunto e  $\mathcal{M}$  unha  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ . Sexa  $\mu$  unha medida positiva sobre  $(X, \mathcal{M})$ . Dirase que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é un **espazo de medida**.

**Definición 1.12.** Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida.

- Dirase que o espazo é **finito** se  $\mu(X) < \infty$ . Analogamente dirase que  $\mu$  é unha *medida finita*.
- Dirase que o espazo é  **$\sigma$ -finito** se dado  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$  entón tense que  $\mu(X_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ . Dirase que  $\mu$  é unha *medida  $\sigma$ -finita*.

**Observación 1.13.** O concepto de finitude fai referencia á natureza da medida e non debe confundirse coa cardinalidade do conxunto.

### 1.1.2. Funcións medibles

Procederase á definición do concepto de función medible e á exposición dalgunhas das súas propiedades básicas, coa finalidade de establecer que toda función medible complexa pode expresarse como a descomposición de dúas funcións medibles reais. En concreto, estudaranse as propiedades en relación coas operacións aritméticas habituais e cos procesos de paso ao límite. Ademais, abordarase a descomposición dunha función real en parte positiva e negativa, así como o estudo de sucesións de funcións e a análise das súas propiedades no contexto da medibilidade. Finalmente, defíniranse as funcións simples, sendo imprescindibles para aproximar funcións medibles.

Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible e  $(Y, \tau)$  un espazo topolóxico.

**Definición 1.14.** Dirase que unha aplicación  $f : X \rightarrow Y$  é  **$\mathcal{M}$ -medible** se

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{M} \quad \forall G \in \tau.$$

**Proposición 1.15.** Se  $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$  son funcións medibles e  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$  é unha aplicación continua. Entón a función  $F : x \in X \mapsto F(x) := \phi(u(x), v(x))$  é  $\mathcal{M}$ -medible.

**Teorema 1.16.** Sexan  $(Y, \tau)$  e  $(Z, \tau')$  dous espazos topolóxicos e  $g : Y \rightarrow Z$  unha aplicación continua. Se  $(X, \mathcal{M})$  é un espazo medible e  $f : X \rightarrow Y$  é unha aplicación  $\mathcal{M}$ -medible, entón  $g \circ f$  é  $\mathcal{M}$ -medible.

**Corolario 1.17.** *Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible, entón verificanse os seguintes enunciados:*

1. *Se  $f = u + iv$ , onde  $u$  e  $v$  son funcións reais medibles sobre  $X$ , entón  $f$  é unha función medible complexa sobre  $X$ .*
2. *Se  $f = u + iv$  é unha función medible complexa sobre  $X$ , entón  $u$ ,  $v$  e  $|f|$  son funcións medibles reais sobre  $X$ .*
3. *Se  $f$  e  $g$  son funcións medibles complexas sobre  $X$ , entón  $f + g$  e  $fg$  tamén o son.*

**Proposición 1.18.** *Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible e sexa a sucesión de funcións  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é unha función medible  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entón tamén son medibles  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  e  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ .*

**Corolario 1.19.** *Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible e sexa a sucesión de funcións  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é unha función medible  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entón, as funcións límite superior e inferior son medibles. Isto é,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} = \inf_n \{ \sup_{k \geq n} f_k \}$  e  $\liminf_{n \rightarrow \infty} = \sup_n \{ \inf_{k \geq n} f_k \}$  son medibles.*

**Corolario 1.20.** *Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible e sexa a sucesión de funcións  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é unha función medible  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Se  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é puntualmente converxente, isto é, se  $\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  entón a función límite  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é medible. Este resultado tamén é válido para funcións con valores complexos.*

**Corolario 1.21.** *Se  $f$  e  $g$  son dúas funcións medibles con valores en  $\bar{\mathbb{R}}$  entón  $\max\{f, g\}$  e  $\min\{f, g\}$  tamén o son. En particular, se  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é medible, e se definen  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := -\min\{f, 0\}$  e  $f$  é medible, tense que  $f^+$  e  $f^-$  son medibles.*

**Observación 1.22.** Para obter unha representación en partes positiva e negativa para funcións con valores complexos, débese considerar que toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  se pode escribir como  $f = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ , onde  $\text{Re}(f)$  e  $\text{Im}(f)$  son funcións con valores reais, ás cales se lle aplica dita representación.

### 1.1.3. Funcións simples

Sexa un espazo medible arbitrario  $(X, \mathcal{M})$ .

**Definición 1.23.** Dirase que unha función  $s$  é simple se está definida sobre un espazo de medida e a imaxe consta unicamente dun número finito de valores reais ou complexos, excluindo que poida tomar valores non finitos.

Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son os distintos valores que toma unha función simple  $s$  e tomando para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $A_i = \{x \in X / s(x) = \alpha_i\}$  entón podemos representar  $s$  como

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde  $\chi_{A_i}$  denota á función característica de  $A_i$ . Esta representación chámase *forma canónica da función simple*  $s$ .

**Observación 1.24.** Unha función simple  $s$  con forma canónica  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  é medible se e só se todos os subconxuntos  $A_i$  son medibles.

**Teorema 1.25** (Aproximación de funcións medibles mediante funcións simples medibles). *Sexa  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , ou  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  unha función medible. Entón existe unha sucesión de funcións simples medibles  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que*

1.  $|s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots (\leq |f|)$ . A sucesión das funcións valor absoluto é monotónicamente crecente a  $|f|$ .
2.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad \forall x \in X$ , isto é, a sucesión  $\{s_n\}$  converge puntualmente a  $f$ .
3. Ademais se  $f$  é unha función limitada, a sucesión pódese escoller de forma que a converxencia sexa uniforme. E se  $f$  é unha función non negativa,  $s_n$  pode escollerse monótona crecente.

**Observación 1.26.** Podemos escribir:  $|s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots \leq |f|$ , se se convén que  $|+\infty| = |-\infty| := +\infty$ . Trátase dun convenio de notación, sen implicacións métricas.

**Observación 1.27.** A relevancia deste teorema non é so a aproximación de funcións medibles por simples, senón que eliminando a condición de medibilidade sobre as funcións tense un resultado análogo, isto é, toda función con valores reais ou complexos se pode aproximar por funcións simples.

## 1.2. Integración Abstracta

Unha vez definidos os conceptos de función simple e función medible, procédese á construción abstracta da integral. En primeiro lugar, establécense resultados básicos para a integración de funcións medibles non negativas, que serán posteriormente xeneralizados ao caso de funcións con valores reais e complexos. Ademais, preséntanse diversos teoremas de converxencia, que constitúen ferramentas fundamentais para o desenvolvemento posterior da teoría.

### 1.2.1. Integración de funcións simples e medibles

**Definición 1.28.** Sexa  $s$  unha función simple medible non negativa con forma canónica

$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ . Defínese a integral de  $s$  en  $E \in \mathcal{M}$ , respecto da medida  $\mu$  como

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

**Observación 1.29.** A integral de funcións simples medibles e non negativas verifica as seguintes propiedades. Sexan  $s, t : X \rightarrow [0, \infty)$  funcións simples  $\mathcal{M}$ -medibles,  $E \in \mathcal{M}$  e  $c \geq 0$ .

- a)  $\int_E cs \, d\mu = c \int_E s \, d\mu.$
- b)  $\int_E (s + t) \, d\mu = \int_E s \, d\mu + \int_E t \, d\mu.$
- c) Se  $s(x) \leq t(x), \forall x \in X$  entón  $\int_E s \, d\mu \leq \int_E t \, d\mu.$

A partir da integral das funcións medibles simples e non negativas, pódese asignar agora unha integral ás funcións medibles non negativas.

**Definición 1.30.** Sexa  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  unha función  $\mathcal{M}$ -medible e un conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$ . Defínese a integral de  $f$  en  $E \in \mathcal{M}$ , respecto da medida  $\mu$  como

$$\int_E f \, d\mu := \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s \, d\mu,$$

onde  $s$  son funcións  $\mathcal{M}$ -medibles simples.

Enúncianse varias propiedades básicas sobre a integración de funcións medibles non negativas.

**Proposición 1.31.** Sexan  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  dúas funcións  $\mathcal{M}$ -medibles,  $A, B, E \in \mathcal{M}$ .

1. Se  $f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$
2. Se  $A \subset B \implies \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$
3. Se  $c$  é unha constante non negativa, entón  $\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$
4.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$
5. Se  $f = 0$  ou  $\mu(E) = 0$  entón  $\int_E f \, d\mu = 0.$

$$6. \text{ Tense que } \int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

En resumo, a integral verifica as propiedades de monotonía respecto o integrando, monotonía sobre os conxuntos de integración, linearidade con constantes positivas, aditividade respecto o integrando, integral nula en conxuntos de medida cero ou para funcións nulas e integración sobre subconxuntos mediante a función característica.

A continuación enúnciase o Teorema de Convergencia Monótona, o que afirma que nun contexto de integración abstracta é plausible permutar límite con integral baixo certas condicións.

**Teorema 1.32.** *Sexa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ , unha sucesión de funcións  $\mathcal{M}$ -medibles non negativas monótona crecente, isto é,  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$ . E sexa  $f(x)^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in X$ , con  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Entón verificase:*

$$\int_X f d\mu := \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Por último, se se define a integral en función do conxunto de integración, obtense unha medida:

**Teorema 1.33.** *Se  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  é unha función  $\mathcal{M}$ -medible, daquela:*

- *A función de conxunto  $\varphi : E \in \mathcal{M} \rightarrow \varphi(E) := \int_E f d\mu \in [0, \infty]$  é unha medida positiva.*
- *Verifícase que  $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$  para calquera  $g$  función  $\mathcal{M}$ -medible non negativa definida en  $X$ .*

**Observación 1.34.** Por unha parte, dado un espazo de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  este teorema permite crear novas medidas a partires da inicial. Por outra parte, as integrais sobre estas novas medidas pódense reducir a integrais sobre a medida inicial.

### 1.2.2. Funcións complexas

Nesta sección procédease á extensión do concepto de integral ao caso de funcións complexas. Como paso previo, amplíase a definición a funcións con valores na recta real ampliada, verificando que se manteñen as propiedades fundamentais da integral como funcional positivo. Finalmente, enunciáranse dous resultados clave que permitirán consolidar o marco teórico da integración.

**Definición 1.35.** Sexa  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  unha función  $\mathcal{M}$ -medible. Dirase que:

<sup>1</sup>A existencia deste límite está asegurada pola monotonía

1.  $f$  é **integrable** (en  $X$ ) se ambas as dúas integrais,

$$\int_X f^+ d\mu \text{ e } \int_X f^- d\mu,$$

son finitas.

2. No caso anterior, se unha das integrais é finita e a outra non, dirase que  $f$  é **integrable en sentido amplo**.

A integral de  $f$  en  $X$  respecto da medida  $\mu$  defínese como

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Sexa agora  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  unha función  $\mathcal{M}$ -medible complexa. Pódese reescribir  $f$  como  $u + iv$ , sendo  $u$  a parte real de  $f$  e  $v$  a parte imaxinaria de  $f$ , con  $u$  e  $v$  funcións reais. Para estender o concepto de integral, esíxese que se verifique que as integrais

$$\int_X u^+ d\mu, \int_X u^- d\mu, \int_X v^+ d\mu \text{ e } \int_X v^- d\mu \quad (1.1)$$

sexan finitas.

**Observación 1.36.** Afirmar (1.1) é equivalente a afirmar que a integral  $\int_x |f| d\mu$  sexa finita.

Este desenvolvemento permite definir o primeiro espazo de funcións integrables respecto unha medida considerada.

**Definición 1.37.** Defínese o espazo de funcións integrables sobre  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  como

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu) \equiv \mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é medible e } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}.$$

**Definición 1.38.** Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , defínese a integral de  $f$  en  $X$  como

$$\int_X f d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \int_X v^+ d\mu - i \int_X v^- d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu.$$

O espazo de funcións integrables respecto dunha medida,  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , xunto coa integral asociada, posúe unha propiedade fundamental que constitúe a base de numerosos resultados.

**Teorema 1.39.**  $(\mathcal{L}^1(\mu), +, \cdot)$  é un espazo vectorial complexo e a integral é un funcional lineal positivo neste espazo.

**Observación 1.40.** Denótase  $+$  como a operación de suma entre funcións de  $\mathcal{L}^1(\mu)$  e  $\cdot$  como o produto de escalares por funcións de  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Observación 1.41.** Neste caso, enténdese un funcional como unha función dun espazo de funcións que toma valores complexos. Se  $U$  é un subespazo de  $V$ , sendo  $V$  o espazo vectorial complexo, de todas as funcións complexas definidas en  $X$ , un funcional lineal  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  dise positivo se

$$f \in U \text{ e } f \geq 0 \rightarrow \phi(f) \geq 0.$$

Algúns dos resultados da Proposición 1.31, das propiedades da integral de funcións non negativas, xeneralízanse para funcións con valores reais ou complexos. En particular, tense a aditividade da integral, mais a monotonía non ten senso. Por último, resáltanse dous resultados: o Teorema da Acotación Modular e o Teorema da Convergencia Dominada.

**Teorema 1.42.** Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  entón  $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ .

**Teorema 1.43.** Sexa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións  $\mathcal{M}$ -medibles complexas. Se se verifica:

- Existe  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $x \in X$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- A sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$ , isto é  $\forall x \in X \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Entón cúmprese que:

1.  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .
2. Existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ .
3. Existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ .

### 1.2.3. Papel dos conxuntos de medida nula

A continuación recóllense unha serie de propiedades que verifica a integral, centrándose nas versións dos teoremas de converxencia. Considérese un espazo de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $P$  unha certa propiedade que poden ter os puntos de  $X$  ou non.

**Definición 1.44.** Dise que  $P$  se verifica en case todas partes de  $X$ , respecto da medida  $\mu$  se existe un conxunto  $E \in \mathcal{M}$  e se verifica que  $\mu(X/E) = 0$ .

Semella que se pode prescindir dos conxuntos de medida nula ou engadilos, no que á integración se refire, sen que isto supoña problema algún. Ademais, moitas propiedades verificanse unicamente case tódolos puntos respecto a medida  $\mu$  (c.t.p.  $(\mu)$ ).

Por estes motivos, é fundamental dispoñer de nocións e resultados que permitan traballar neste contexto. Adóitase identificar a función  $f$  coa súa extensión medible en  $X$ . Deste xeito, darase sentido a expresións como “ $f$  é medible en  $X$ ”, mesmo cando  $f$  estea definida orixinalmente só c.t.p.

Con este convenio, pódense enunciar e aplicar versións dos teoremas de converxencia baixo hipóteses que se cumpren só c.t.p.

**Teorema 1.45.** *Sexa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións  $\mathcal{M}$ -medibles non negativas definidas c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$  tal que sexa unha sucesión monótona crecente, isto é,  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$  c.t.p.  $(\mu)$ , e tal sucesión é puntualmente converxente a  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$ . Entón verifícase:*

$$\int_X f d\mu := \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

**Teorema 1.46.** *Sexa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións  $\mathcal{M}$ -medibles complexas definidas c.t.p.  $(\mu)$  en  $X$ . Se se verifica:*

- *Existe  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*
- *A sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converxe puntualmente a  $f$ , isto é  $\forall x \in X \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$*

*Entón cúmprese que:*

1.  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .
2. *Existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ .*
3. *Existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ .*

**Teorema 1.47.** *Se  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  é unha función  $\mathcal{M}$ -medible e  $E \in \mathcal{M}$  é tal que  $\int_E f d\mu = 0$  entón  $f(x) = 0$ , c.t.p.  $(\mu)$  de  $E$ .*

**Teorema 1.48.** *Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  cumpre que  $\int_E f d\mu = 0 \forall E \in \mathcal{M}$  entón  $f(x) = 0$  c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$ .*

Aínda que nos enunciados dos teoremas se optara por cambiar a hipótese de que as funcións estean definidas c.t.p.  $(\mu)$  de  $X$  por definidas en todo punto de  $X$ , isto non melloraría as conclusións que se obteñen.

**Teorema 1.49.** *Sexan  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida finito,  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $F$  un subconxunto pechado do plano complexo, tal que:*

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in F, \text{ sempre que } E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) > 0,$$

daquela,  $f(x) \in F$ , c.t.p. ( $\mu$ ) de  $X$ .

A cantidade  $A_E(f)$  denomínase valor medio de  $f$  en  $E$ .

### 1.3. Os espazos $L^p$

Ao longo da evolución da Análise Matemática, un dos enfoques centrais consistiu no estudo de coleccións de funcións que, en moitos casos, se estruturaban como espazos vectoriais reais ou complexos. Dada a frecuente aparición de procesos de paso ao límite, resulta natural e necesario dotar aos espazos de medida dunha estrutura métrica ou topolóxica que garde coherencia co comportamento das funcións que os conforman. A forma máis elemental e efectiva de introducir tal estrutura é mediante a definición dunha norma. No anexo A.2 defínense e explícanse conceptos previos para o tratamento desta sección.

#### 1.3.1. Espazos $\mathcal{L}^p$

Considérese un espazo de medida arbitrario  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Tendo en conta a definición 1.37, obsérvase que, aínda que unha función medible non pertenza  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , pode ocorrer que sí o sexa algunha das potencias (do seu módulo). Polo tanto, resulta interesante considerar as seguintes coleccións de funcións:

**Definición 1.50.**

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é medible e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad p \geq 1.$$

Para  $p = \infty$  tense unha definición diferente, precisando do concepto de función esencialmente limitada.

**Definición 1.51.** Unha función medible,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , é esencialmente limitada, se cumpre a seguinte condición:

$$\exists \alpha \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq \alpha, \text{ c.t.p.}(\mu) \text{ de } X. \quad (1.2)$$

Cada constante  $\alpha$  cumprindo (1.2) denomínase cota esencial de  $f$ .

**Definición 1.52.**

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é medible e esencialmente limitada} \}$$

Da mesma forma que se obtivo para  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , tamén se xeraliza a propiedade de que  $(\mathcal{L}^p(\mu), +, \cdot)$  é un espazo vectorial complexo:

**Proposición 1.53.** *Se  $p \geq 1$ , entón  $\mathcal{L}^p(\mu)$  é un espazo vectorial complexo.*

Ademais, pódese definir unha seminorma en  $\mathcal{L}^p(\mu)$ , dada por

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad \text{para todo } f \in L^p(\mu).$$

**Definición 1.54.** Dous números  $p$  e  $q$  son chamados **índices conxugados** se cumpren a seguinte condición:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

onde  $p \geq 1$  e  $q \geq 1$ . Para un índice  $p$ , o seu índice conxugado  $q$  está determinado de maneira única pola fórmula anterior.

A seguinte desigualdade xeraliza a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ademais tamén se teñen as seguintes relacións de pertenza:

**Teorema 1.55.** *Verifícanse os seguintes enunciados:*

1. *Se  $p$  e  $q$  son índices conxugados, é dicir,  $1 < p, q < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , e ademais, se  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$  e  $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ , entón:  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , e ademais, a desigualdade de Hölder é:*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

2. *Se  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e  $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ , entón  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , e ademais, a seguinte desigualdade se cumpre:*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

**Teorema 1.56.** *Se  $1 \leq p \leq \infty$  e  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ , daquela cúmprese a seguinte desigualdade:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

### 1.3.2. Os Espazos $L^p$

En xeral, os espazos seminormados  $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ , non son espazos normados. Para acadar o obxectivo de transformar os espazos  $(\mathcal{L}^p(\mu))$  en espazos normados, identifícanse as funcións que son iguais c.t.p.  $(\mu)$ . Isto é, as funcións  $f$  e  $g$  tales que  $\|f - g\|_p = 0$ , onde “igual practicamente” significa que  $f = g$  case en todas partes con respecto a  $\mu$ . O espazo cociente resultante será un espazo normado.

### Construcción do espazo normado

Defínese a relación de equivalencia  $f \sim g$  se e só se  $f = g$  case en todas partes con respecto á medida  $\mu$  de  $X$ , isto é,  $f \sim g \Leftrightarrow f = g$  c.t.p. $(\mu)$ . Esta relación de equivalencia establece unha relación no espazo vectorial de todas as funcións complexas e medibles definidas en  $X$ ,  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

O conxunto cociente obtido en  $\mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^p(\mu)$  segundo esta relación, denotarase por  $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ , que tamén se denotará como  $L^p$ . Os elementos de  $L^p(\mu)$  son, polo tanto, clases de equivalencia. Para  $f \in L^p$ , denotarase por  $[f]$  á clase de equivalencia que contén a  $f$ , isto é:

$$[f] \equiv \{h \in \mathcal{L}^p(\mu) : h \sim f\}.$$

### Estrutura de espazo vectorial en $L^p(\mu)$

A estrutura de espazo vectorial de  $\mathcal{L}^p$  induce unha estrutura de espazo vectorial en  $L^p$ : a estrutura de **espazo vectorial cociente** mediante as seguintes operacións (non dependen dos representantes elixidos):

$$[f] + [g] := [f + g], \quad [f], [g] \in L^p.$$

$$\lambda[f] := [\lambda f], \quad [f] \in L^p, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Xa que para  $f, g \in L^p$ , se  $f \sim g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$ , a seguinte aplicación está ben definida:

$$\|\cdot\|_p : [f] \in L^p \rightarrow \|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

Verifícase que  $\|\cdot\|_p$  é unha norma  $L^p$ . Polo tanto, para cada  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , o espazo  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$  é un espazo normado. E ademais tamén se ten a súa completitude.

**Teorema 1.57.** *Para cada espazo de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e cada  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , o espazo  $L^p(\mu)$  é un espazo de Banach.*

### O Espazo de Hilbert $L^2(\mu)$

Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida. Entre os diferentes espazos  $L^p(\mu)$ , destaca o espazo  $L^2(\mu)$ , xa que a súa norma está inducida por un produto interior (que está ben definido, en virtude da desigualdade de Hölder):

$$(\cdot|\cdot) : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f|g) := \int_X f(x)g(x) d\mu$$

Polo tanto,  $L^2(\mu)$  convértese nun espazo de Hilbert e, así, son aplicables a  $L^2(\mu)$  tódolos resultados propios destes espazos. Así, por exemplo, cada funcional lineal continuo en  $L^2(\mu)$

---

queda determinado por un único elemento de  $L^2(\mu)$ , segundo se especifica no **Teorema de representación de Riesz-Fréchet** (Teorema A.15), do seguinte xeito:

Se  $T : L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$  é un funcional lineal continuo, daquela, existe unha única  $g \in L^2(\mu)$  tal que:

$$T(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x), \quad \forall f \in L^2(\mu)$$

## Referencias bibliográficas

Os fundamentos da **Teoría da Medida** (Sección 1.1) seguen a formulación clásica presentada en Rudin,[10], referencia que tamén se emprega para a **Integración Abstracta** (Sección 1.2). Para os **espazos**  $L^p$  (Sección 1.3) emprégase Cohn,[3] e Rudin,[10]. Porén, para profundar en aspectos de Teoría da Medida consultouse Chae,[2] e para a Análise Funcional consultouse Muscat,[6].

Consultáronse máis textos para analizar diferentes desenvolvementos, mais finalmente optouse polas referencias citadas, tanto pola súa concreción nos contidos como pola súa complexidade.



## Capítulo 2

# Descomposicións de medidas

Neste capítulo introducirase a **extensión das medidas** positivas a casos máis xerais, explorando a estrutura das medidas en espazos medibles. Estudarase a **Descomposición de Jordan**, que permitirá separar unha medida real en partes positivas e negativas. Para este propósito, introducirase a **variación total**, analizando as súas propiedades. Concluirase co concepto de **continuidade absoluta** entre medidas, o que culminará os requisitos para enunciarse o Teorema de Radon-Nikodym.

### 2.1. Extensión das medidas e descomposicións

Historicamente, as primeiras medidas estudadas foron aquelas que tomaban valores positivos. Porén, a medida que a teoría se desenvolveu e se probaron diversos resultados, observouse a necesidade de estender o concepto de medida a contextos máis xerais, dando lugar ás medidas con signo (en particular, ás medidas reais) e ás medidas complexas. Unha forma natural de introducir estas novas clases de medidas consiste en aproveitar a propiedade aditiva das medidas: se  $\varphi$  e  $\psi$  son medidas definidas sobre un mesmo espazo medible, entón a súa suma  $(\varphi + \psi)$  tamén define unha medida, dado que para todo conxunto medible  $E$  se verifica que

$$(\varphi + \psi)(E) = \varphi(E) + \psi(E).$$

Este principio permite construír medidas máis xerais mediante combinacións lineais de medidas, abrindo o camiño ás medidas reais e ás medidas complexas, que se obteñen como diferenzas ou combinacións lineais (respectivamente) de medidas positivas.

### 2.1.1. Medidas con signo e medidas reais

Considérese unha función real integrable ou integrable en sentido amplo, é dicir, unha función  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta función pode descompoñerse como a diferenza das súas partes positiva e negativa:  $h = h^+ - h^-$ . Ambas funcións,  $h^+$  e  $h^-$ , son funcións medibles e non negativas, polo que, aplicando o Teorema 1.33 a cada unha delas, obtéñense dúas medidas positivas asociadas:

$$\nu^+(E) := \int_E h^+ d\mu, \quad \nu^-(E) := \int_E h^- d\mu.$$

A partires destas, defínese unha función de conxunto  $\nu$  sobre  $\mathcal{M}$  mediante a diferenza:

$$\nu(E) := \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E h^+ d\mu - \int_E h^- d\mu = \int_E h d\mu.$$

A función  $\nu$  así definida pode tomar valores negativos, polo que se obtén unha función de conxunto que non toma só valores positivos, definida naturalmente a partir dunha función integrable.

Para garantir que a función de conxunto estea ben definida débense considerar funcións integrables, ou integrables en sentido amplo. Isto é, que polo menos unha das integrais  $\int_X h^+ d\mu$  ou  $\int_X h^- d\mu$  sexa finita. Isto asegura que  $\nu$  non tome simultaneamente os valores  $+\infty$  e  $-\infty$ , evitando así expresións indeterminadas.

O relevante é que esta función de conxunto, ao ser unha integral, ten a propiedade de  $\sigma$ -aditividade e de que  $\nu(\emptyset) = 0$ , igual ca unha medida.

Grazas a esta motivación, pódese estender a definición de medida positiva (Definición 1.7), reformulándoa do seguinte xeito:

**Definición 2.1.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible. Unha **medida con signo** en  $(X, \mathcal{M})$  é unha función de conxunto  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $\nu(\emptyset) = 0$  e  $\nu$  é  $\sigma$ -aditiva.

Doutra forma, considerando  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dúas medidas positivas, pode definirse unha medida con signo como

$$\nu(E) := \mu_1(E) - \mu_2(E),$$

sempre que polo menos unha das dúas sexa finita, co fin de garantir a boa definición da diferenza.

**Observación 2.2.** Obsérvase que unha medida con signo  $\nu$  non pode tomar simultaneamente os valores  $\infty$  e  $-\infty$ . Este feito dedúcese da propiedade de aditividade: para cada conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$  debe cumprirse que  $\nu(E) + \nu(F) = \nu(E \cup F)$ , sendo  $(X, \mathcal{M})$  o espazo medible. Dado que a suma  $\infty + (-\infty)$  non está definida no conxunto dos números reais estendidos, a presenza simultánea de ambos valores infinitos daría lugar a unha expresión indeterminada, o cal contradí a definición de medida con signo.

Como consecuencia, conclúese que unha medida con signo só pode adoptar, como máximo, un dos dous valores infinitos. En particular, se existe un conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $\nu(E) = \infty$ , entón a medida total  $\nu(X)$  tamén debe ser infinita, e non pode existir ningún conxunto medible  $A$  tal que  $\nu(A) = -\infty$ . De maneira análoga, se nalgún conxunto se alcanza o valor  $-\infty$ , entón a medida non pode tomar o valor  $\infty$  en ningún outro conxunto.

**Observación 2.3.** Un caso particular de medida con signo é o das medidas reais. Chámase **medida real** a toda medida con signo que toma valores finitos en todos os conxuntos medibles, é dicir, unha función  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que é  $\sigma$ -aditiva e verifica  $\nu(\emptyset) = 0$ . Así, as medidas reais son as medidas con signo que non admiten valores infinitos.

### 2.1.2. Medidas complexas

Sexa  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  unha función con valores en  $\mathbb{C}$  sobre un espazo de medida arbitrario  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Ao ser  $f$  unha función con valores en  $\mathbb{C}$ , pode expresarse como

$$f = u + iv,$$

onde  $u = \operatorname{Re}(f)$  e  $v = \operatorname{Im}(f)$  son funcións reais e medibles. Cada unha delas pode escribirse como a diferenza de dúas funcións medibles non negativas:

$$u = u^+ - u^- \quad v = v^+ - v^-,$$

sendo  $u^+, u^-, v^+, v^-$  funcións medibles e non negativas, en base á Proposición 1.21.

Aplicando o Teorema 1.33 a cada unha das devanditas funcións, defínense catro medidas positivas finitas:

$$\varphi_{u^+}(E) = \int_E u^+ d\mu, \quad \varphi_{u^-}(E) = \int_E u^- d\mu, \quad \varphi_{v^+}(E) = \int_E v^+ d\mu, \quad \varphi_{v^-}(E) = \int_E v^- d\mu = \int_E f d\mu.$$

Estas medidas están ben definidas, posto que a pertenza de  $f$  a  $\mathcal{L}^1(\mu)$  implica a integrabilidade absoluta das súas partes real e imaxinaria, o que significa que as medidas anteriores son finitas.

Defínese entón a función de conxunto

$$\varphi(E) = \mu_{u^+}(E) - \mu_{u^-}(E) + i(\mu_{v^+}(E) - \mu_{v^-}(E)) \equiv \int_E f d\mu,$$

a cal toma valores en  $\mathbb{C}$ , pois tanto a parte real como a imaxinaria constitúen combinacións lineais de medidas reais. Ademais, a función  $\varphi$  resulta  $\sigma$ -aditiva, como combinación de funcións  $\sigma$ -aditivas reais, polo que é unha función de conxunto con propiedades similares a unha medida

Este construción motiva a necesidade da seguinte definición formal.

**Definición 2.4.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible. Unha **medida complexa** en  $(X, \mathcal{M})$  é unha función de conxunto  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que :

$$\forall E \in \mathcal{M} \text{ e } \forall \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(E) \text{ verificase que } \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \quad (2.1)$$

Se  $\lambda$  soamente toma valores reais diremos que  $\lambda$  é unha **medida real**.

Doutra maneira, dadas  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  medidas positivas e finitas, a función de conxunto definida por:

$$\varphi(E) := \mu_1(E) - \mu_2(E) + i(\mu_3(E) - \mu_4(E)),$$

define unha *medida complexa*.

**Observación 2.5.** A igualdade de (2.1) debe entenderse en termos de converxencia absoluta da serie. Dado que se esixe para toda partición medible de  $E$ , a condición implica a converxencia absoluta da suma. Esta esixencia garante que as medidas complexas non poidan asignar valores infinitos, xa que o infinito non pertence ao corpo dos números complexos.

### 2.1.3. Descomposición de medidas

Unha vez estendido o concepto de medida, xorde unha cuestión natural:

*Problema 2.6.* Así como unha función complexa se pode descompoñer en parte real e parte imaxinaria, pódese facer o mesmo coas medidas complexas?  $\square$

Dada unha medida complexa  $\lambda$ , podemos escribir

$$\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda),$$

onde  $\operatorname{Re}(\lambda)$  e  $\operatorname{Im}(\lambda)$  son as medidas reais definidas respectivamente por

$$\operatorname{Re}(\lambda)(E) = \operatorname{Re}(\lambda(E)), \quad \operatorname{Im}(\lambda)(E) = \operatorname{Im}(\lambda(E)) \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Resolto isto, cabe preguntarse se as medidas complexas se poden expresar como combinación lineal de medidas positivas finitas. O seguinte paso será, pois, analizar a descomposición das medidas reais.

*Problema 2.7.* Así como unha función real se pode descompoñer en parte positiva e negativa, pódese expresar unha medida real como a diferenza de dúas medidas positivas? É dicir, dada unha medida real  $\mu$ , existen medidas positivas  $\mu^+$  e  $\mu^-$  tales que

$$\mu = \mu^+ - \mu^-? \quad \square$$

Un primeiro enfoque consiste en definir  $\mu^+$  e  $\mu^-$  de forma análoga ás partes positiva e negativa dunha función real. Porén, este intento non garante en xeral que as funcións resultantes sexan medidas positivas, como se ve no seguinte exemplo.

**Exemplo 2.8.** Considérase o intervalo  $X = [-2, 2]$  coa  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue restrinxida,  $\mathcal{M}_{Leb}$ , e  $\mu$  a medida de Lebesgue correspondente. Defínese a función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, 0), \\ 1 & \text{se } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Como  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e é unha función con valores positivos e negativos, pódese definir a medida real

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}_{Leb}.$$

Pola definición de  $f$ , para calquera conxunto medible  $E$ :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_{E \cap [-2, 0)} -1 d\mu + \int_{E \cap [0, 2]} 1 d\mu = -\mu(E \cap [-2, 0)) + \mu(E \cap [0, 2]).$$

Unha posible definición para  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$  sería:

$$\lambda^+(E) = \max\{\lambda(E), 0\} \quad \lambda^-(E) = -\min\{\lambda(E), 0\} \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Porén, esta elección non garante que  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$  sexan medidas positivas.

Se  $\lambda^+$  fose unha medida positiva, entón debería ser monótona, é dicir, se  $A \subset B$  con  $A, B \in \mathcal{M}_{Leb}$ , debería cumprirse  $\lambda^+(A) \leq \lambda^+(B)$ . Con todo, pódese atopar un par de conxuntos  $A, B$  que violan esta propiedade, demostrando así que  $\lambda^+$  non é unha medida.

Tómense os conxuntos como  $A = [0, 1]$  e  $B = [-1, 1]$ ,

- $\lambda(A) = -\mu(A \cap [-2, 0)) + \mu(A \cap [0, 2]) = -\mu(\emptyset) + \mu([0, 1]) = -0 + 1$
- $\lambda(B) = -\mu(B \cap [-2, 0)) + \mu(B \cap [0, 2]) = -\mu([-1, 0]) + \mu([0, 1]) = -1 + 1 = 0$

Polo tanto  $\lambda^+(A) = 1$  e  $\lambda^+(B) = 0$ , tendo que  $\lambda^+(A) = 1 \geq 0 = \lambda^+(B)$ . □

O concepto de **medida variación** permitirá acadar a descomposición buscada.

## 2.2. Variación dunha medida

Sexa  $\lambda$  unha medida complexa definida sobre unha  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ . Unha dificultade fundamental ao traballar con medidas complexas é que os seus valores pertencen a  $\mathbb{C}$ , o que impide, en xeral, unha interpretación directa en termos de medida de tamaño ou masa.

Para analizar mellor o comportamento de  $\lambda$ , 3 3 til atopar unha medida positiva asociada que controle en certo sentido o seu m3dulo. B3scase, pois, unha medida positiva  $\lambda^*$  tal que

$$|\lambda(E)| \leq \lambda^*(E) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M},$$

sendo ademais a menor medida positiva que cumpra esta propiedade.

Toda soluci3n, no caso de que exista, verifica que  $\forall E \in \mathcal{M}$  e  $\forall \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(E)$

$$\lambda^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| \quad (2.2)$$

Polo tanto,  $\lambda^*$  3 polo menos igual ao supremo da 3ltima suma, sobre todas as partici3ns medibles de calquera conxunto medible. Isto suxire definir a funci3n de conxunto  $\lambda^*$  como segue:

**Definici3n 2.9.** Se  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  3 unha medida complexa, def3nese a funci3n de conxunto

$$|\lambda| : E \in \mathcal{M} \rightarrow |\lambda|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| \mid \text{tal que } \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(E) \right\}$$

A continuaci3n demostrarase que  $|\lambda|$  3 unha medida positiva, denomin3ndose **medida variaci3n total de  $\lambda$** . Polo tanto 3 a soluci3n que se buscaba, pois 3 a m3nima por definici3n, no senso de que calquera outra soluci3n  $\lambda^*$  verifica que  $\lambda^*(E) \geq |\lambda|(E)$  para calquera conxunto medible.

**Observaci3n 2.10.** Se  $\lambda$  3 unha medida positiva finita, daquela, a medida variaci3n total de  $\lambda$  coincide coa propia  $\lambda$ .

**Observaci3n 2.11.** Se  $\mu$  3 unha medida positiva non finita e ad3ptase o convenio:  $|+\infty| = +\infty$ , logo ten tam3n sentido definir a variaci3n total de  $\mu$ ,  $|\mu|$ . Ent3n terase que:  $|\mu(E)| \equiv \mu(E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{M}$ , a3nda que  $\mu(E) = +\infty$ , resulta que a medida variaci3n total de  $\mu$  3 a propia  $\mu$ .

**Observaci3n 2.12.** Se  $\lambda$  3 unha medida complexa, a *variaci3n total de  $\lambda$*  (ou *medida variaci3n total de  $\lambda$* ),  $|\lambda|$ , non 3, en xeral, o m3dulo de  $\lambda$ . Pola definici3n da medida variaci3n, temos que:

$$|\lambda|(E) \geq |\lambda(E)|, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

**Teorema 2.13.** Se  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  3 unha medida complexa, ent3n  $|\lambda|$  3 unha medida positiva.

*Demostraci3n.* D3bese probar que  $|\lambda|$  3 unha medida, polo tanto probarase que  $|\lambda|$  verifica a propiedade de  $\sigma$ -aditividade, pois 3 trivial que  $|\lambda|(\emptyset) = 0$ . D3bese demostrar que para calquera conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$  ent3n  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) = |\lambda|(E)$  para calquera partici3n medible de  $E$ ,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(E)$ .

Considérese  $E \in \mathcal{M}$ , un medible arbitrario, e sexa  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha partición medible de  $E$ .

Sexan  $t_n$  números reais tales que  $t_n < |\lambda|(E_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sexa  $\{A_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}}$  unha partición medible de  $E_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de tal forma que

$$t_n < \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(A_{nm})|. \quad (2.3)$$

Polo tanto, chégase a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(A_{nm})| \leq |\lambda|(E). \quad (2.4)$$

Onde a primeira desigualdade se obtén por (2.3), e a segunda por ser  $\{A_{nm}\}$  con  $n, m \in \mathbb{N}$  unha partición de  $E$ , seguindo (2.2). Agora, tomando o supremo do primeiro membro de (2.4) sobre todas as eleccións admisibles de  $t_n$ , obtense:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(E). \quad (2.5)$$

Sexa  $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  outra partición de  $E$ , polo tanto pódense descompor  $C_m$  e  $E_n$  como segue:

- Fixado  $m$ ,  $\{C_m \cap E_n\}$  é unha partición de  $C_m$ .
- Fixado  $n$ ,  $\{C_m \cap E_n\}$  é unha partición de  $E_n$ .

Polo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(C_m)| &= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_m \cap E_n) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(C_m \cap E_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(C_m \cap E_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como  $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(C_m)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n)$  se ten para toda partición  $\{C_m\}$  de  $E$ , tense que

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n). \quad (2.7)$$

Polo tanto, en base a (2.5) e (2.7) obtense a igualdade requirida, logo  $|\lambda|$  é unha medida. Ademais é positiva por definición, ao considerar módulos de números complexos.  $\square$

Por outra banda, a medida variación total verifica outra propiedade:  $|\lambda|(X) < \infty$ , isto significa que  $|\lambda|$  é finita. Polo tanto, como  $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X)$  isto implica que toda medida complexa en calquera espazo medible é limitada. Se a medida  $\lambda$  é complexa, o rango da medida

pode limitarse por unha bola de radio determinado. Esta última propiedade coñécese como que as medidas complexas son de variación acotada.

Antes de demostrar isto, enúnciase un lema técnico, cuxa demostración se pode atopar en [Rudin, Th.6.1.4, [10]]

**Lema 2.14.** *Se  $z_1, \dots, z_N$  son números complexos, entón existe un subconxunto  $S$  de  $\{1, \dots, N\}$  tal que*

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N |z_k|.$$

E por último, demóstrase que a medida variación total dunha medida complexa é unha medida finita.

**Teorema 2.15.** *Se  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  é unha medida complexa, entón  $|\lambda|(X) < \infty$*

*Demostración.* Dividirase a demostración en dúas partes. Primeiro probarase o seguinte enunciado:

Se existe un conxunto  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $|\lambda|(E) = \infty$ , daquela, existirán tamén conxuntos  $A, B \in \mathcal{M}$ , cumprindo:

$$A \cup B = E, \quad A \cap B = \emptyset, \quad |\lambda(A)| > 1 \text{ e } |\lambda(B)| = \infty.$$

Posteriormente empregaremos isto para ver que a medida variación total é finita.

**Primeira parte.** Supoñamos primeiro que existe un conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $|\lambda|(E) = \infty$ , logo para cada  $t \in \mathbb{R}$  existirá  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , unha partición medible de  $E$ , tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| > t$ . Polo tanto, para algún  $N \in \mathbb{N}$  dependente de  $t$  cumprirase tamén que

$$\sum_{n=1}^N |\lambda(E_n)| > t. \tag{2.8}$$

En particular, considérese  $t = \pi(1 + |\lambda(E)|)$  escollendo a correspondente partición  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $N$ , verificando (2.8).

Aplicando o Lema 2.14 e tomando os números complexos  $z_i = \lambda(E_i)$  con  $i \in \{1, \dots, N\}$  entón existe un subconxunto de índices  $S$  de  $\{1, \dots, N\}$  verificando que

$$\left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| > \frac{t}{\pi} = (1 + |\lambda(E)|) \geq 1. \tag{2.9}$$

Sexa  $A = \bigcup_{j \in S} E_j$  e  $B = E \setminus A$ , entón séguese que  $A$  e  $B$  verifican as seguintes condicións:

- $A, B \in \mathcal{M}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = E$  por definición de  $A$  e  $B$ .
- Das relacións (2.9) dedúcese que  $|\lambda(A)| > 1 + |\lambda(E)|$  e polo tanto  $|\lambda(A)| > 1$ .
- Finalmente, obtense que  $|\lambda(B)| > 1$  pois

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq ||\lambda(E)| - |\lambda(A)|| = |\lambda(E)| - |\lambda(A)| > 1$$

En consecuencia, como  $|\lambda|$  é unha medida positiva e  $\infty = |\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$ , polo menos un dos sumandos debe ser infinito.

**Segunda parte.** Supóñase agora que  $|\lambda|(X) = \infty$  entón séguese pola primeira parte anterior que existen dous conxuntos medibles  $A_1$  e  $B_1$  tales que

$$A_1 \cup B_1 = X, \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset, \quad |\lambda(A_1)| > 1 \text{ e } |\lambda|(B_1) = \infty.$$

Aplicando a  $B_1$  o mesmo resultado chégase a unha separación  $A_2$  e  $B_2$  similar. Razoando por indución obtemos dúas sucesións de conxuntos medibles  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  verificando

$$A_n \cup B_n = B_{n-1}, \quad A_n \cap B_n = \emptyset, \quad |\lambda(A_n)| > 1 \text{ e } |\lambda|(B_n) = \infty.$$

Por construción tense que os conxuntos  $A_n$  son disxuntos dous a dous, verificando que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n),$$

cuxo suma debería ser converxente, mais os conxuntos  $A_n$  verifican que  $|\lambda(A_n)| > 1$  para cada  $n$ , o que imposibilita a converxencia da serie. Chégase a unha contradición co feito da existencia dos conxuntos  $A_n$  e polo tanto  $|\lambda|(X) < \infty$  como se quería probar.  $\square$

Como curiosidade da medida variación total, considerando o espazo medible  $(X, \mathcal{M})$  e  $\mathcal{M}$  como o conxunto de todas as medidas complexas definidas en  $(X, \mathcal{M})$ , obtense que  $(\mathcal{M}, +, \cdot)$  é un espazo vectorial complexo. Ademais, considerando a aplicación

$$\|\cdot\| : \lambda \in \mathcal{M} \longrightarrow \|\lambda\| := |\lambda|(X) \in [0, \infty),$$

define unha norma en  $\mathcal{M}$ , que se adoita chamar **norma variación**. Pódese probar que o espazo normado  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$  é un **espazo de Banach**.

### 2.3. Descomposición de Jordan

Dada unha medida complexa  $\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ , comprobouse que se podía descompoñer como a suma de dúas medidas reais:

$$\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda).$$

A cuestión a resolver agora é como descompoñer unha medida real  $\mu$  como a diferenza de dúas medidas positivas. Grazas ao estudo realizado sobre a medida variación total dunha medida real, obtense que  $|\mu|$  é unha medida real positiva e finita. Polo tanto, verifícase que tanto  $|\mu| + \mu$  como  $|\mu| - \mu$  son medidas reais e positivas.

Isto é certo polas propiedades da medida de variación total e por seren  $\mu$  e  $|\mu|$  medidas reais. A continuación demóstrase que efectivamente estas últimas medidas son positivas.

Por definición, tense que

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

o que equivale a

$$-|\mu|(E) \leq \mu(E) \leq |\mu|(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (2.10)$$

Tendo en conta (2.10), e sabendo que

$$(|\mu| + \mu)(E) = |\mu|(E) + \mu(E) \geq |\mu|(E) - |\mu|(E) = 0,$$

próbase que é unha medida positiva. A finitude conséguese debido a que

$$(|\mu| + \mu)(E) = |\mu|(E) + \mu(E) \leq |\mu|(E) + |\mu|(E) = 2|\mu|(E) < \infty,$$

pois  $|\mu|$  é unha medida finita.

Analogamente próbase que  $|\mu| - \mu$  é unha medida positiva e finita.

Polo tanto, se definimos

$$\begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) \end{cases}$$

obtemos a descomposición buscada.

Despexando  $|\mu|$  e  $\mu$ , obtense que

$$\begin{cases} |\mu| = \mu^+ + \mu^- \\ \mu = \mu^+ - \mu^- \end{cases}$$

**Definición 2.16.** Se  $\mu$  é unha medida real, o par  $(\mu^+, \mu^-)$  definido a través de

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

coñécese como a **descomposición de Jordan de  $\mu$** . Denotamos por  $\mu^+$  a *variación positiva* de  $\mu$  e por  $\mu^-$  a *variación negativa* de  $\mu$ .

**Observación 2.17.** A formulación desta descomposición é desenvolto en Rudin, [10]. Máis adiante comentarase outra forma de definir esta mesma descomposición.

## 2.4. Continuidade Absoluta

Grazas ao Teorema 1.33, demostrouse que, ao considerar a integral como unha función definida sobre conxuntos, obtense unha medidas positiva. Na sección 2.1 estendéronse as medidas a contextos máis xerais.

Dada unha función  $f$  no contexto do Teorema 1.33, , ao considerar a medida  $\varphi$ , obsérvase que se verifica a seguinte propiedade:

$$\text{Se } E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) = 0, \text{ entón } \varphi(E) = 0. \quad (2.11)$$

Esta relación entre medidas denominarase continuidade absoluta, e demostrarase que pode interpretarse como unha certa forma de continuidade entre medidas.

**Definición 2.18.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo de medida,  $\mu$  unha medida positiva e  $\lambda$  unha medida arbitraria, ambas definidas en  $\mathcal{M}$ . Dirase que  $\lambda$  é **absolutamente continua** respecto de  $\mu$  se se verifica a seguinte condición

$$[E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) = 0] \Rightarrow \lambda(E) = 0, \quad (2.12)$$

e denotarase por  $\lambda \ll \mu$ .

No contexto da continuidade absoluta introdúcense tamén os conceptos de medidas mutuamente singulares e concentración de medidas en conxuntos, que permiten caracterizar de forma máis precisa a relación entre distintas medidas.

**Definición 2.19.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible,  $\lambda$  unha medida arbitraria definida en  $\mathcal{M}$ . Sexa  $A \in \mathcal{M}$ , diremos que  $\lambda$  **está concentrada en**  $A$  se

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (2.13)$$

**Definición 2.20.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo de medida e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dúas medidas arbitrarias definidas en  $\mathcal{M}$ . Dirase que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  son **mutuamente singulares** ou **ortogonais**, denotándoo por  $\lambda_1 \perp \lambda_2$ , se existen conxuntos  $A, B \in \mathcal{M}$  tal que:

1.  $A \cap B = \emptyset$
2.  $\lambda_1$  está concentrada en  $A$ .
3.  $\lambda_2$  está concentrada en  $B$ .

Recóllese a seguinte proposición, cuxa demostración se pode atopar en [10].

**Proposición 2.21.** Sexan  $\mu, \lambda, \lambda_1$  e  $\lambda_2$ , medidas sobre unha  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ , e que  $\mu$  é positiva.

1. Se  $\lambda$  está concentrada en  $A$ , entón tamén o está  $|\lambda|$ .
2. Se  $\lambda_1 \perp \lambda_2$ , entón  $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$ .
3. Se  $\lambda_1 \perp \mu$  e  $\lambda_2 \perp \mu$  entón  $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$ .
4. Se  $\lambda_1 \ll \mu$  e  $\lambda_2 \ll \mu$ , entón  $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$ .
5. Se  $\lambda \ll \mu$ , entón  $|\lambda| \ll \mu$ .
6. Se  $\lambda_1 \ll \mu$  e  $\lambda_2 \perp \mu$  entón  $\lambda_1 \perp \lambda_2$ .
7. Se  $\lambda \ll \mu$  e  $\lambda \perp \mu$  entón  $\lambda = 0$ .

O concepto de medida absolutamente continua tamén se pode caracterizar como segue

**Proposición 2.22.** Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible,  $\mu$  unha medida positiva e  $\lambda$  unha medida complexa. As seguintes afirmacións son equivalentes:

- 1)  $\lambda \ll \mu$ .
- 2)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $[E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) < \delta] \implies |\lambda(E)| < \varepsilon$ .

*Demostración.* A implicación 2)  $\implies$  1) é case trivial. Se  $E \in \mathcal{M}$  é tal que  $\mu(E) = 0$ , por 2) dedúcese que  $|\lambda(E)| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , polo tanto  $\lambda(E) = 0$ .

Para probar 1)  $\implies$  2) pasarase ao contrarrecíproco. Supóñase que non se verifica 2), entón existe algún  $\varepsilon > 0$  tal que, para cada  $\delta > 0$ , existe un  $E_\delta \in \mathcal{M}$  verificando que  $\mu(E_\delta) < \delta$  e  $|\lambda(E_\delta)| \geq \varepsilon$ . En particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tómesese  $\delta = \frac{1}{2^n}$ , logo  $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$  e  $|\lambda(E_n)| \geq \varepsilon$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sexan  $A_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$  e  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Os conxuntos  $A_n$  e  $A$  son medibles.

Tense que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión contractiva de conxuntos, e ademais cumpre:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}} < \infty,$$

de onde se segue que

$$0 \leq \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0. \quad (2.14)$$

Agora, grazas a que a medida variación total de  $\lambda$ ,  $|\lambda|$ , é unha medida positiva finita, tense que:

$$|\lambda|(A_n) \geq |\lambda|(E_n) \geq |\lambda(E_n)| \geq \varepsilon,$$

obtendo que

$$|\lambda|(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|(A_n) \geq \varepsilon. \quad (2.15)$$

En base a (2.14) e (2.15) tense que  $|\lambda|$  non é absolutamente continua respecto  $\mu$ . Pola Proposición 2.21.5. tense que  $\lambda$  non é absolutamente continua respecto  $\mu$ .  $\square$

**Observación 2.23.** Esta caracterización non se tería se a medida  $\lambda$  non é finita.

Grazas ás definicións de continuidade absoluta e ortogonalidade entre medidas, chégase á seguinte descomposición.

**Definición 2.24** (Descomposición de Lebesgue). Dadas  $\mu$ , unha medida positiva e  $\lambda$ , unha medida arbitraria, definidas sobre un mesmo espazo medible  $(X, \mathcal{M})$ , afirmarase que  $\lambda$  admite unha *descomposición de Lebesgue relativa a  $\mu$*  se existe unha parella de medidas  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  tales que:

1.  $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ ,
2.  $\lambda_a \ll \mu$ , é dicir,  $\lambda_a$  é absolutamente continua respecto de  $\mu$ ,
3.  $\lambda_s \perp \mu$ , é dicir,  $\lambda_s$  é singular respecto de  $\mu$ .

## 2.5. Descomposición de Hahn

Sexa  $\mu$  unha medida real no espazo medible  $(X, \mathcal{M})$ .

**Definición 2.25.** ■ Dirase que un conxunto medible  $P \in \mathcal{M}$  é positivo se a medida de calquera subconxunto medible de  $P$  é maior ou igual a cero.

$$P \in \mathcal{M} \text{ dise positivo se } \mu(B) \geq 0 \quad \forall B \subset P, B \in \mathcal{M}.$$

- Dirase que un conxunto medible  $N \in \mathcal{M}$  é negativo se a medida de calquera subconxunto medible de  $N$  é menor ou igual a cero.

$$N \in \mathcal{M} \text{ dise negativo se } \mu(B) \leq 0 \quad \forall B \subset N, B \in \mathcal{M}.$$

Enúnciase o seguinte resultado [[3], Lemma 4.1.3], que amosa que calquera conxunto con medida negativa ten un subconxunto negativo.

**Proposición 2.26.** *Sexa  $\mu$  unha medida real en  $(X, \mathcal{M})$  e sexa un conxunto medible  $A \in \mathcal{M}$  tal que  $-\infty < \mu(A) < 0$ . Entón existe un conxunto negativo  $B$  tal que  $B \subset A$  e  $\mu(B) \leq \mu(A)$ .*

**Definición 2.27.** A descomposición de Hahn dunha medida real  $\mu$  en  $(X, \mathcal{M})$  é un par  $(P, N)$  de subconxuntos disxuntos tal que  $P, N \subset X$ , tal que  $P$  é positivo para  $\mu$  e  $N$  é negativo para  $\mu$ , verificando que  $P \cup N = X$ .

**Teorema 2.28** (Teorema da Descomposición de Hahn). *Sexa  $\mu$  unha medida real no espazo medible  $(X, \mathcal{M})$ . Entón  $\mu$  orixina unha descomposición de Hahn en  $(X, \mathcal{M})$ .*

**Observación 2.29.** Obsérvese que o Teorema da Descomposición de Hahn garante a existencia, mais non se ten a unicidade, pois se se teñen dúas descomposicións os seus conxuntos positivos (respectivamente negativos) diferéncianse en conxuntos nulos.

Grazas ao teorema anterior pódese interpretar unha medida real como unha medida que asigna pesos negativos aos subconxuntos de  $N$  e pesos positivos aos subconxuntos de  $P$ . Agora ben, se podemos descompoñer o espazo en partes positiva e negativa segundo a Descomposición de Hahn, semella natural preguntarse se tamén é posible descompoñer a medida nas súas correspondentes partes positiva e negativa. Esta idea dá lugar á chamada Descomposición de Jordan, que ofrece unha nova perspectiva sobre os resultados introducidos na Sección 2.3.

**Definición 2.30.** Sexa  $(P, N)$  a descomposición de Hahn dunha medida real  $\mu$ . Defínese a parte positiva e negativa de  $\mu$  como

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \quad \mu^-(E) = \mu(E \cap N) \quad \text{tal que } E \in \mathcal{M}.$$

Estas dúas funcións son medidas positivas, e satisfán que para todo subconxunto medible  $E \in \mathcal{M}$ :

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Polo tanto, dedúcese como un corolario natural da Descomposición de Hahn o seguinte resultado:

**Corolario 2.31** (Teorema da Descomposición de Jordan). *Sexa  $\mu$  unha medida real sobre un espazo medible  $(X, \mathcal{M})$ . A partir dunha descomposición de Hahn  $(P, N)$  de  $\mu$ , defínense as medidas positivas:*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}.$$

*Entón,  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ , e  $\mu^+$  e  $\mu^-$  son medidas positivas mutuamente singulares. Esta descomposición chámase Descomposición de Jordan e é única.*

## Referencias bibliográficas

Emprégase o transcurso teórico desenvolto en Rudin,[10]. Tamén se emprega Cohn,[3] para unha completión dos resultados. Como comentario singular, ambos libros desenvolven a mesma

teoría pero dende puntos de vista contrapostos. Por exemplo, en [10], a descomposición de Jordan introdúcese como paso previo necesario para chegar á descomposición de Hahn. Pola contra, en [3], é esta última a que se emprega como punto de partida para desenvolver resultados posteriores. Optouse por seguir ambos enfoques co fin de favorecer unha mellor comprensión e conexión entre as distintas descomposicións que poden presentar as medidas.



## Capítulo 3

# Teorema de Radon Nikodym

Dado un espazo de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , o teorema 1.33 permite construír novas medidas a partir dunha medida inicial positiva  $\mu$ , integrando funcións medibles. Así se  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  é unha función que pertence a  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , a aplicación  $\varphi(E) := \int_E f d\mu$  define unha **nova medida**  $\varphi$ . Ademais, a integración respecto desta **nova medida** pode expresarse como unha integración respecto da **medida orixinal**:  $\int_X g d\varphi = \int_X gf d\mu$ .

**Definición 3.1.** Sexan  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible,  $\mu$  unha medida positiva en  $(X, \mathcal{M})$ ,  $f$  unha función integrable (en calquera dos sentidos considerados) e  $\lambda$  a medida definida pola relación:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{M}.$$

Dirase que  $f$  é unha **función de densidade**, ou unha **derivada de Radon-Nikodym**, de  $\lambda$  respecto de  $\mu$ , e empregarase a notación simbólica:  $d\lambda = f d\mu$ , ou ben  $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ .

A partir desta definición e desta notación, xorden naturalmente varias cuestións:

1. O recíproco do Teorema 1.33 é certo? É dicir, dada unha medida  $\varphi$ , existe sempre unha función  $f$  tal que  $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ ?

Ao longo deste capítulo procurarase dar resposta á esta pregunta, analizando en detalle as condicións baixo as cales é posible expresar unha medida mediante unha representación integral. Analizarase un exemplo que ilustre a relevancia e os límites das hipóteses necesarias. Isto conducirá ao Teorema de Radon-Nikodym, un dos teoremas máis importantes da teoría da medida. De seguido, exploraranse algunhas das consecuencias do teorema, amosando un exemplo. Finalmente, presentarase unha breve recensión histórica sobre o desenvolvemento deste resultado.

### 3.1. O teorema de Radon-Nikodym

Co obxectivo de dar resposta á primeira das preguntas formuladas ao comezo deste capítulo —se é posible expresar unha medida como unha integral respecto doutra mediante unha función de densidade—, nesta sección analizaranse as condicións necesarias para garantir tal representación. En particular, adquiren especial relevancia dúas propiedades: a **continuidade absoluta**, que asegura que a medida que se quere representar “non detecta” máis conxuntos ca medida de referencia; e a **finitude** (ou, máis xeralmente, a  $\sigma$ -finitude), que permite aplicar argumentos construtivos ou funcionais na demostración do teorema.

Unha análise destas condicións permitirá comprender tanto os límites como a potencia do Teorema de Radon-Nikodym, que culminará esta sección cunha formulación precisa e a presentación de dúas demostracións complementarias. A interese en desenvolver dúas demostracións intenta amosar que a demostración dun enunciado pode facerse dende puntos de vista diferentes.

A continuidade absoluta é unha destas condicións clave: asegura que todo o que é “invisible” para a medida de referencia  $\mu$  tamén o é para a medida obxectivo  $\lambda$ . A motivación da sección 2.4 (Continuidade Absoluta) amosa tal condición como necesaria. Sen esta relación de dependencia, pódese garantir a non existencia dunha función de densidade.

Pero por si soa non é suficiente. Para desenvolver unha demostración sólida do teorema, é necesario traballar en condicións nas que as medidas non sexan excesivamente “grandes”. A noción de  $\sigma$ -finitude cumpre esta función: permite descompoñer o espazo en partes de medida finita, facilitando o uso de técnicas de integración e análise funcional. Sen esta condición, mesmo que exista a continuidade absoluta, o resultado pode non ser válido, como selo por trivialidade.

A seguir exemplifícase un caso onde falla a posibilidade de representación integral.

**Exemplo 3.2.** Considérese o espazo medible  $([0, 1], \mathcal{M}_{Leb})$ , onde  $\mathcal{M}_{Leb}$  denota a  $\sigma$ -álgebra dos conxuntos medibles segundo Lebesgue restrinxida ao intervalo  $[0, 1]$ . Sexa  $m$  a medida de Lebesgue en  $([0, 1], \mathcal{M}_{Leb})$ . Se un conxunto  $E \subseteq [0, 1]$  ten medida de Lebesgue nula ( $m(E) = 0$ ), isto significa que pode ser cuberto por unha unión numerable de intervalos cunha lonxitude total arbitrariamente pequena.

Considérese agora a medida de contar  $\varphi$ , definida como

$$\varphi(E) = \begin{cases} \text{card}(E), & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } E \text{ non é finito.} \end{cases}$$

Restrinxindo  $\varphi$  ao espazo  $([0, 1], \mathcal{M}_{Leb})$ , obtense unha medida ben definida.

Un análise destas medidas amosa que ambas son medidas positivas. Non obstante, a medida de Lebesgue é finita, mentres que a de contar non é nin finita nin  $\sigma$ -finita. Por outra banda, tense

que  $m \ll \varphi$ .

Búscase determinar a existencia dunha función  $f \geq 0$  tal que

$$m(E) = \int_E f d\varphi, \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}_{Leb}.$$

A verificación desta igualdade implicaría que  $f \in L^1(\varphi)$  e sería non negativa c.t.p.  $(\varphi)$ . Se tal función existise, entón, para todo conxunto medible segundo Lebesgue de medida nula, a relación anterior asignaríalle tamén unha medida de contar nula. Logo, teríase que  $0 = m(\{a\}) = \int_{\{a\}} f d\varphi = f(a) \cdot \varphi(\{a\}) = f(a)$ ,  $\forall a \in (0, 1)$ . O que levaría á contradición

$$1 = m((0, 1)) = \int_{(0,1)} f d\varphi = 0,$$

amosando así que non pode existir tal función  $f$ .  $\square$

O problema de representación integral deste exemplo pódese relacionar coa  $\sigma$ -finitude. Ao considerar  $\varphi$  a medida de contar, o requisito  $f \in L^1(\varphi)$  imponlle a  $f$  unha forte condición.

**Proposición 3.3.** *Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é un espazo de medida e  $f \in L^1(\mu)$ , entón o conxunto*

$$\{x \in X / f(x) \neq 0\} = \{x \in X / |f(x)| > 0\}$$

*é  $\sigma$ -finito para  $\mu$ .*

*Demostración.* Sexa  $f \in L^1(\mu)$  entón  $f$  é medible e  $\int_X |f| d\mu < \infty$ . Sexan os conxuntos

$$A_n = \{x \in X / |f(x)| > \frac{1}{n}\}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entón tense que o conxunto onde  $f$  non se anula é a unión destes conxuntos:

$$\{x \in X / f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por conseguinte, para cada  $n$  tense que

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_{A_n} |f| d\mu > \frac{1}{n} \mu(A_n),$$

o que implica que  $\mu(A_n) < \infty$ . Polo tanto o conxunto onde  $f(x) \neq 0$  é unha unión numerable de conxuntos de medida finita, é dicir,  $\sigma$ -finito respecto de  $\mu$ .  $\square$

Deste xeito, aplicando o resultado no exemplo 3.2, se  $E \in \mathcal{M}$ ,  $m(E) > 0$  e  $f \in L^1(\varphi)$ , a igualdade

$$m(E) = \int_E f d\varphi$$

é imposible, xa que os conxuntos con medida de Lebesgue positiva son, necesariamente, non numerables. Noutras palabras, os únicos conxuntos  $\sigma$ -finitos para  $\varphi$  son conxuntos Lebesgue-medibles con medida de Lebesgue nula, o que impide a existencia da representación desexada.

Esixindo entón a  $\sigma$ -finitude nas medidas, poderanse evitar os problemas do exemplo. Alén diso, os espazos de medida  $\sigma$ -finitos teñen unha serie de vantaxes.

**Proposición 3.4.** *Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é un espazo de medida  $\sigma$ -finito, entón existe unha función  $\omega \in L^1(\mu)$  tal que  $0 < \omega(x) < 1$  para todo  $x \in X$ .*

**Corolario 3.5.** *Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é un espazo de medida, daquela as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1.  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é  $\sigma$ -finito.
2. Existe  $\omega \in L^1(\mu)$  tal que  $0 < \omega(x) < 1$ , para todo  $x \in X$ .
3. Existe  $f \in L^1(\mu)$  tal que  $0 < f(x)$ , para todo  $x \in X$ .

**Corolario 3.6.** *Sexan  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible,  $\mu$  unha medida  $\sigma$ -finita en  $(X, \mathcal{M})$  e  $\omega \in L^1(\mu)$  tal que  $0 < \omega(x) < 1$ , para todo  $x \in X$ . Daquela, a medida positiva  $\tilde{\mu}$ , definida por*

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E \omega d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

*é finita e cumpre  $\tilde{\mu} \ll \mu$  e  $\mu \ll \tilde{\mu}$ ; noutras palabras,  $\tilde{\mu}$  e  $\mu$  anúlanse nos mesmos conxuntos medibles. Ademais,  $\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$ , para todo  $E \in \mathcal{M}$ .*

### 3.1.1. Primeira demostración

Existen diversas demostracións do Teorema de Radon-Nikodym. A primeira que se presenta baséase en [10] e débese a *John Von Neumann*. Esta versión emprega técnicas construtivas de espazos funcionais e teoría da medida. Ademais fai unha demostración conxunta co Teorema de Descomposición de Lebesgue.

**Teorema 3.7** (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sexan  $\mu$  e  $\lambda$  medidas positivas finitas sobre o espazo  $(X, \mathcal{M})$ .*

- a) (**Teorema de Descomposición de Lebesgue**) *Existe un único par de medidas positivas,  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  sobre  $(X, \mathcal{M})$  tal que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad \text{e} \quad \lambda_a \perp \lambda_s.$$

- b) (**Teorema de Radon-Nikodym**) *Existe unha única  $h \in L^1(\mu)$  tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

*Demostración.* Procederáse a demostrar ambos resultados conxuntos, aínda que primeiro se probará a unicidade da descomposición de Lebesgue.

**Unicidade da Descomposición de Lebesgue.** Supóñase que  $(\lambda_a, \lambda_s)$  e  $(\lambda'_a, \lambda'_s)$  son dúas descomposicións de Lebesgue, polo tanto  $\lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$  o que implica que  $\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s$ . Pola proposición 2.21, tense que  $\lambda_a - \lambda'_a \ll \mu$  e  $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$ , de onde  $\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s = 0$  e se comproba a unicidade.

**Unicidade da derivada de Radon-Nikodym.** Ao considerar funcións de  $L^1(\mu)$  tómanse representantes de clases de equivalencia, enténdese logo a unicidade respecto case todo punto. Se existiran dúas representacións integrais da medida  $\lambda$ :

$$\int_E h d\mu = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M} \implies \int_E (h - g) d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{M} \implies [h - g] = 0 \text{ en } L^1(\mu),$$

de onde se tería que  $h = g$  c.t.p  $(\mu)$ .

**Existencia da Descomposición de Lebesgue e representación integral.** Sexa  $\phi = \lambda + \mu$ , logo  $\phi$  é unha medida positiva e finita en  $(X, \mathcal{M})$ . Ademais integrar respecto  $\phi$  é equivalente á suma de integrar respecto  $\lambda$  e  $\mu$ :

$$\int_X f d\phi = \int_X f d\lambda + \int_X f d\mu \quad (3.1)$$

para funcións características ( $\phi(E) = \lambda(E) + \mu(E)$ ), logo tamén para calquera función simple e polo tanto para calquera función medible non negativa.

Considérese agora unha función  $f \in L^2(\phi)$ , en virtude da acotación modular e a desigualdade de Schwarz tense:

$$\left| \int_X f d\lambda \right| \leq \int_X |f| d\lambda \leq \int_X |f| d\phi \leq \left( \int_X |f|^2 d\phi \right)^{1/2} (1^2 d\phi)^{1/2} = \left( \int_X |f|^2 d\phi \right)^{1/2} (\phi(X))^{1/2}.$$

O que permite afirma que a aplicación

$$f \in L^2(\phi) \longrightarrow \int_X f d\lambda$$

é un funcional lineal limitado sobre  $L^2(\phi)$  pois por ser  $\phi$  finita tense que  $\phi(X) < \infty$ . En espazos normados, que un funcional sexa limitado equivale a que sexa continuo, polo tanto en virtude do Teorema de Representación de Riesz-Fréchet, existe unha función  $g \in L^2(\phi)$ <sup>1</sup> tal que

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\phi. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Cando se di que unha función pertence a  $L^2(\phi)$  estase a facer un abuso de linguaxe, tecnicamente os elementos de  $L^2(\phi)$  son clases de equivalencia, mais enténdese como funcións determinadas só en c.t.p.  $[\phi]$ .

Sexa  $f = \chi_E$  para calquera  $E \in \mathcal{M}$  con  $\phi(E) > 0$ . Tomando tal  $f$  en (3.2) tense que:

- O primeiro membro correspóndese a  $\lambda(E)$ .

$$\int_X \chi_E d\lambda = \int_E d\lambda = \lambda(E).$$

- O segundo membro correspóndese a  $\int_E g d\phi$ .

$$\int_X \chi_E g d\phi = \int_E g d\phi.$$

Por outra banda, tíñase que  $0 \leq \lambda \leq \phi$  de onde

$$0 \leq \int_E g d\phi = \lambda(E) \leq \phi(E),$$

o que permite afirmar que

$$0 \leq \frac{1}{\phi(E)} \int_E g d\phi \leq 1.$$

Esta última desigualdade implica que  $g(x) \in [0, 1]$  para case todo  $x$  (con respecto a  $\phi$ ). En base a que o marco de traballo é  $L^2(\phi)$ , poderase supor sen perda de xeneralidade que  $0 \leq g(x) \leq 1$  para todo  $x \in X$ .

Retomando a ecuación, (3.2), reescíbese, tendo en conta (3.1):

$$\int_X f d\lambda = \int_X f g d\phi = \int_X f g d\lambda + \int_X f g d\mu, \quad (3.3)$$

de onde se deduce que

$$\int_X (1 - g) f d\lambda = \int_X f g d\mu. \quad (3.4)$$

Defínense os conxuntos  $A$  e  $B$  coma

$$A = \{x \in X / 0 \leq g(x) < 1\}, \quad B = \{x \in X / g(x) = 1\},$$

e as medidas  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  coma

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E), \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Agora ben, tomando  $f = \chi_B$  en (3.3), chégase a que  $\mu(B) = 0$ , de onde  $\lambda_s \perp \mu$ .

A continuación escóllese unha función  $f$  particular, como  $g$  é limitada en  $X$ , tómese  $f = (1 + g + \dots + g^n) \chi_E$  para  $n \in \mathbb{N}$  e  $E \in \mathcal{M}$ . Obtense entón que

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_E g(1 + g + \dots + g^n) d\mu. \quad (3.5)$$

Tense que  $g(x) = 1$  en  $B$  e polo tanto  $1 - g^{n+1}(x) = 0$  en  $B$ . Por outra banda, tense que  $g^{n+1} \rightarrow 0$  monotonamente.

Tomando límites en (3.5) cando  $n$  tende a  $\infty$ , no primeiro membro tense que

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_{E \cap A} (1 - g^{n+1}) d\lambda + \int_{E \cap B} (1 - g^{n+1}) d\lambda = \lambda_a(E), \quad (3.6)$$

no segundo membro, o integrando  $(g(1 + g + \dots + g^n))$  crece monotonamente a unha función límite  $h$  medible e non negativa. O Teorema da Convergencia Monótona amosa que este segundo membro converge a  $\int_E h d\mu$  cando  $n \rightarrow \infty$ .

Probouse entón que se verifica  $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$  para calquera  $E \in \mathcal{M}$ , de onde se ten que  $\lambda_a \ll \mu$ . Tomando  $E = X$  vese que  $h \in L^1(\mu)$  xa que  $\lambda_a(X) < \infty$ , o que completa a demostración. □

**Teorema 3.8** (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, segunda versión). *Sexa  $\mu$  unha medida positiva  $\sigma$ -finita e  $\lambda$  unha medida complexa sobre o espazo  $(X, \mathcal{M})$ .*

a) (**Teorema de Descomposición de Lebesgue**) *Existe un único par de medidas complexas,  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  sobre  $(X, \mathcal{M})$  tal que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad e \quad \lambda_a \perp \lambda_s.$$

b) (**Teorema de Radon-Nikodym**) *Existe unha única  $h \in L^1(\mu)$  tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

*Demostración.* Tómesese como referencia o teorema anterior e procederáse a empregar propiedades das medidas para estender.

Como  $\mu$  é  $\sigma$ -finita, por definición, tense que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , os cales  $X_n$  se poden tomar disxuntos. Para  $n \geq 2$ , se  $\lambda(X) < \infty$  (finita) pódese aplicar o teorema 3.7 a cada  $X_n$ . As descomposicións de Lebesgue das medidas  $\lambda(E \cap X_n)$  pódense sumar dando unha descomposición de Lebesgue de  $\lambda$ . Por outra banda, para cada  $n \in \mathbb{N}$  obtense unha  $h_n$  sobre  $X_n$ , de onde definindo  $h(x) = h_n(x)$  se  $x \in X_n$  e como  $\lambda(X) < \infty$  vólvese deducir que  $h \in L^1(\lambda)$ .

Considérese agora  $\lambda$  unha medida complexa. Entón tense que  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  sendo  $\lambda_i$  medidas con reais para  $i = 1, 2$ , e podemos aplicar o resultado ás variacións positiva e negativa de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . □

**Teorema 3.9** (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, terceira versión). *Sexan  $\mu$  e  $\lambda$  medidas positivas e  $\sigma$ -finita sobre o espazo  $(X, \mathcal{M})$ .*

a) (**Teorema de Descomposición de Lebesgue**) *Existe un único par de medidas complexas,  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  sobre  $(X, \mathcal{M})$  tal que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad e \quad \lambda_a \perp \lambda_s.$$

b) (**Teorema de Radon-Nikodym**) *Existe unha función medible non negativa  $h : X \rightarrow [0, \infty]$  tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu.$$

*Demostración.* Se  $\lambda$  e  $\mu$  son medidas positivas e  $\sigma$ -finitas, tense a descomposición  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$  onde  $\lambda(X_n) < \infty$  e  $\mu(X_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Definindo medidas locais, para cada  $n$ ,  $\lambda_n(E) = \lambda(E \cap X_n)$  tense que podemos aplicar o teorema 3.7, proporcionando unha descomposición de Lebesgue de  $\lambda$ . Tamén séguese obtendo unha función  $h$  que verifica a representación integral, mais agora  $h$  está localmente en  $L^1(\mu)$ , isto é,  $\int_{X_n} h \, d\mu < \infty$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### 3.1.2. Segunda demostración

A continuación preséntase unha das demostracións clásicas do Teorema de Radon-Nikodym no contexto de medidas positivas e  $\sigma$ -finitas. A idea fundamental da proba consiste en construír unha función como supremo dunha familia de funcións. Esta función verificará as propiedades desexadas grazas ao Teorema da Convergencia Monótona, e obterase así a representación integral buscada. A unicidade demostrarase a través da linearidade da integral e da propiedade de que as funcións integrables con integral nula sobre todo conxunto medible son nulas case en todo punto. Para estender o resultado ao caso  $\sigma$ -finito, empregárase unha partición adecuada do espazo medible.

**Teorema 3.10.** *Sexa  $(X, \mathcal{M})$  un espazo medible, e sexa  $\lambda$  e  $\mu$  dúas medidas  $\sigma$ -finitas positivas en  $(X, \mathcal{M})$ . Se  $\lambda$  é absolutamente continua respecto  $\mu$ , logo existe unha función  $g : X \rightarrow [0, +\infty)$   $\mathcal{M}$ -medible tal que  $\lambda(E) = \int_E g \, d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$ . A función  $g$  é única case por doquier.*

*Demostración.* Considérense primeiro  $\lambda$  e  $\mu$  finitas. Definamos o conxunto  $\mathcal{F}$  como o conxunto das funcións medibles non negativas tal que a súa integral respecto un conxunto medible sobre  $\mu$  é menor ou igual que a medida dese conxunto sobre  $\lambda$ .

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \rightarrow [0, \infty] \text{ } \mathcal{M} \text{-medibles tal que } \int_A f \, d\mu \leq \lambda(A), \quad \forall A \in \mathcal{M} \right\}.$$

Tense que  $\mathcal{F}$  non é baleiro pois a función identicamente nula verifica as condicións.

Denotemos por  $g = \sup f$  tal que  $f \in \mathcal{F}$ , tense que probar que  $g \in \mathcal{F}$ , logo demostrarase que  $g$  verifica  $\lambda(E) = \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$ . Por último estenderase o resultado a medidas  $\sigma$ -finitas.

**Parte 1. O conxunto  $\mathcal{F}$  posúe máximo.** Inicialmente, véxase que se  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  entón  $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{F}$ <sup>2</sup>. Sexa un conxunto medible  $A \in \mathcal{M}$ , este pódese separar en dous subconxuntos disxuntos

$$A_1 = \{x \in A \text{ tal que } f_1(x) > f_2(x)\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{x \in A \text{ tal que } f_1(x) \leq f_2(x)\}.$$

Polo tanto obtense o buscado, seguindo a definición dos conxuntos  $A_1, A_2$  e  $\mathcal{F}$ , ademais de empregar propiedades básicas de integración e medidas.

$$\begin{aligned} \int_A f_1 \vee f_2 d\mu &= \int_{A_1 \cup A_2} f_1 \vee f_2 d\mu = \int_{A_1} f_1 \vee f_2 d\mu + \int_{A_2} f_1 \vee f_2 d\mu = \\ &= \int_{A_1} f_1 d\mu + \int_{A_2} f_2 d\mu \leq \lambda(A_1) + \lambda(A_2) = \lambda(A). \end{aligned}$$

Por un proceso repetitivo pódese deducir que se consideramos  $\{f_i\}_{i=1}^n$  tal que  $f_i \in \mathcal{F}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  entón  $f_1 \vee \dots \vee f_n \in \mathcal{F}$ .

Considérese agora unha sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funcións de  $\mathcal{F}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \sup \left( \int f d\mu \text{ tal que } f \in \mathcal{F} \right).$$

Substituíndo  $f_n$  por  $f_1 \vee \dots \vee f_n$  tense que agora a sucesión  $\{f_n\}$  é monótona crecente. Sexa  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , logo o Teorema da Convergencia Monótona asegura que

$$\int_E g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \lambda(E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Polo tanto verificase que  $g \in \mathcal{F}$ .

**Parte 2. A función  $g$  verifica que  $\lambda(E) = \int_E g d\mu \forall E \in \mathcal{M}$ .** En base a que  $g \in \mathcal{F}$  pódese definir  $\lambda_0(E) = \lambda(E) - \int_E g d\mu \geq 0$ , obtendo que  $\lambda_0$  é unha medida positiva en  $(X, \mathcal{M})$ . Débese probar que  $\lambda_0 = 0$ , para o que se emprega a técnica do paso ao contrarrecíproco.

Suponse que  $\lambda_0(E) > 0$  polo menos para un conxunto medible  $E \in \mathcal{M}$ , polo tanto  $\lambda_0(X) > 0$ . Como  $\mu$  é unha medida finita, existe unha cantidade positiva  $\varepsilon > 0$  tal que  $\lambda_0(X) > \varepsilon$ .

<sup>2</sup>O operador  $\vee$  representa o máximo puntual entre dúas funcións, isto é se  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  entón  $f_1 \vee f_2(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$  para todo  $x \in X$ .

Sexa  $(P, N)$  a descomposición de Hahn da medida  $\lambda_0 - \varepsilon\mu$  (real), tense entón que  $\lambda_0(E \cap P) \geq \varepsilon\mu(E \cap P)$ , logo

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu + \lambda_0(E) \geq \int_E g d\mu + \lambda_0(E \cap P) \geq \int_E g d\mu + \varepsilon\mu(E \cap P) = \int_E (g + \varepsilon\chi_P) d\mu.$$

Isto implica que  $g + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{F}$ .

Por outra banda, tense que  $\mu(P) > 0$  pois se fose nula ( $\mu(P) = 0$ ) logo  $\lambda_0(P) = 0$  e entón

$$\lambda_0(X) - \varepsilon\mu(X) = \lambda_0(N) - \varepsilon\mu(N) \leq 0,$$

o que é unha contradición baixo a suposición da existencia de  $\varepsilon$ .

Segundo isto, as relacións  $\int g d\mu \leq \lambda(X) < \infty$  e  $g + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{F}$ , como  $\int g + \varepsilon\chi_P d\mu \geq \int g d\mu$ , contradí que  $g$  sexa o máximo de  $\mathcal{F}$  de onde  $\lambda_0 = 0$ .

Demóstrase entón que  $\lambda_0 = 0$  e polo tanto verificase a Parte 2<sup>3</sup>.

**Parte 3. Extensión para medidas  $\sigma$ -finitas.** Supoñamos que  $\mu$  é unha medida  $\sigma$ -finita, logo existe unha partición medible de  $X$ ,  $\{B_n\}$ , tal que cada elemento da partición ten medida finita sobre  $\mu$  e  $\lambda$ .

A primeira parte do teorema, garante que para cada  $n$  tense que existe unha función medible  $g_n : B_n \rightarrow [0, +\infty)$  verificando que  $\lambda(A) = \int_A g_n d\mu \forall A \in \mathcal{M}$  tal que  $A \subseteq B_n$ . Polo tanto, defínese  $g$  como a función que aglutina as  $g_n$ , isto é  $g(x) = g_n(x)$  se  $x \in B_n$  para todo  $n$ . Con isto próbase a existencia.

Para ver a unicidade, considéranse dúas funcións  $g, h : X \rightarrow [0, +\infty)$   $\mathcal{M}$ -medibles tal que

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu = \int_A h d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

No caso de que  $\lambda$  sexa finita, entón verificase que  $g - h \in \mathcal{L}^1(\mu)$  e ademais tense que  $\int_A (g - h) d\mu = 0$ , polo tanto  $g - h = 0$  c.t.p  $[\mu]$ .

No caso de que  $\lambda$  sexa  $\sigma$ -finita, emprégase que dada a partición  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para a cal cada elemento ten medida finita sobre  $\lambda$ . Podemos restrinxir as funcións  $g_n$  e  $g$  a cada  $B_n$  para todo  $n$  e polo argumento empregado para medidas finitas, tense que  $g$  e  $h$  coinciden en case todo punto de  $B_n$ , en consecuencia coinciden en case todo punto de  $X$ .  $\square$

**Observación 3.11.** Esta segunda demostración require uns coñecementos máis accesibles que a de Von Neumann, sendo unha proba totalmente construtiva. Porén, permite entender o resultado dende unha perspectiva máis directa e intuitiva, así como achegarse mellor á orixe do teorema.

<sup>3</sup>Nótese que pola definición, a función  $g$  podería tomar un valor non finito solo nun conxunto de medida nula para  $\mu$ , de onde pode ser redefinida para tomar unicamente valores finitos.

Ambas vías demostran a riqueza do teorema, ofrecendo achegamentos complementarios: un, desde a abstracción e o formalismo funcional; outro, desde a construción explícita e a intuición. A súa coexistencia amplía a comprensión e valor do resultado.

### 3.2. Propiedades da derivada de Radon-Nikodym

No ámbito da derivación usual, xa desde os primeiros cursos de Matemáticas preséntanse certas propiedades fundamentais: a linearidade, a regra da cadea, a regra do cociente ou o teorema da inversa son algunhas das máis coñecidas e utilizadas.

Curiosamente, a derivada no sentido de Radon-Nikodym tamén goza de propiedades análogas, o que reforza a súa interpretación como unha xeneralización da derivada clásica. Nos teoremas que se presentan a continuación recóllense algunhas das propiedades máis relevantes desta derivada, cuxa demostración pode consultarse en [1].

Traballarase no marco teórico empregado ao longo deste traballo, é dicir, supoñendo que  $(X, \mathcal{M})$  é un espazo medible. A continuación, enúncianse as principais propiedades da derivada de Radon-Nikodym:

**Teorema 3.12.** [Cambio de medida] Sexan  $\lambda$  e  $\mu$  medidas positivas en  $\mathcal{M}$ ,  $\lambda \ll \mu$  e  $\mu$  é unha medida  $\sigma$ -finita. Sexa  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  unha función  $\mathcal{M}$ -medible tal que existe a integral  $\int_X f(x) d\lambda$  (isto é,  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ). Polo tanto,  $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f(x) d\lambda = \int_E f(x) \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu. \quad (3.7)$$

**Teorema 3.13.** [Medidas proporcionais] Sexan  $\lambda$  e  $\mu$  medidas  $\sigma$ -finitas en  $\mathcal{M}$ , tal que para todo  $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) = c\lambda(E), \quad (3.8)$$

sendo  $c$  unha constante positiva. Entón para case todo  $x \in X$ ,

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(x) \stackrel{c.t.p.}{=} \frac{1}{c} \quad e \quad \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \stackrel{c.t.p.}{=} c. \quad (3.9)$$

**Teorema 3.14.** [Regra da cadea] Sexan  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  medidas positivas e  $\sigma$ -finitas en  $\mathcal{M}$ , tal que  $\lambda \ll \mu$ ,  $\mu \ll \nu$ . Polo tanto,

$$\frac{d\lambda}{d\nu} \stackrel{c.t.p.}{=} \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu}. \quad (3.10)$$

**Teorema 3.15.** [Inversa multiplicativa] Sexan  $\lambda$  e  $\mu$  medidas positivas en  $\mathcal{M}$ , mutuamente absolutamente continuas. Supóñase que  $\frac{d\mu}{d\lambda}(x) > 0$  para todo  $x \in X$ . Entón,

$$\frac{d\lambda}{d\mu} \stackrel{c.t.p.}{=} \left( \frac{d\mu}{d\lambda} \right)^{-1}. \quad (3.11)$$

**Teorema 3.16.** [Linearidade] *Sexa  $\lambda$  unha medida  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{M}$  e tamén sexan  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  medidas finitas en  $\mathcal{M}$ , tales que  $\mu_i \ll \lambda$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sexan  $n$  constantes reais,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , entón*

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i\right)}{d\lambda} \stackrel{\text{c.t.p}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \frac{d\mu_i}{d\lambda}. \quad (3.12)$$

Estas propiedades pretenden servir de xustificación a que a derivación de medidas comparte propiedades co concepto clásico de derivada.

### 3.3. Algunhas consecuencias do Teorema de Radon-Nikodym

O Teorema de Radon-Nikodym ten múltiples aplicacións e consecuencias fundamentais na teoría da medida e integración. A continuación, preséntanse algunhas delas:

**Teorema 3.17** (Representación polar dunha medida complexa). *Sexa  $\lambda$  unha medida complexa sobre  $(X, \mathcal{M})$ . Entón existe unha función medible  $h$  tal que  $|h(x)| = 1$  para todo  $x \in X$  e  $d\lambda = h d|\lambda|$ . É dicir,*

$$\lambda(E) = \int_E h d|\lambda|, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

*Demostración.* Como  $\lambda$  é unha medida complexa,  $|\lambda|$  é unha medida positiva finita e ademais  $\lambda \ll |\lambda|$ . Grazas ao Teorema de Radon-Nikodym pódese garantir a existencia dunha única función  $h \in L^1(|\lambda|)$  que verifica

$$\lambda(E) = \int_E h d|\lambda|, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Isto último equivale a que  $d\lambda = h d|\lambda|$ . Para rematar a proba tense que probar que  $|h(x)| = 1$  para todo punto de  $X$ , o que se pode obter demostrando que  $|h(x)|$  en case todo punto de  $X$  e redefinindo a función  $h$  para a igualdade se teña en todo punto. Probarase que se verifica,  $|h(x)| \leq 1$  e  $|h(x)| \geq 1$  simultaneamente.

**Proba de  $|h(x)| \geq 1$ .** Sexa  $A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$ , con  $r$  unha constante positiva e sexa  $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(A_r)$ . Polo Teorema da Acotación Modular e pola descrición do conxunto  $A_r$  tense que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda(E_j)| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \int_{E_j} h d|\lambda| \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \int_{E_j} |h| d|\lambda| \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} r |\lambda|(E_j) = r \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda|(E_j) \right) = r |\lambda|(A_r).$$

Polo tanto coma  $|\lambda|(A_r) = \sup \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda(E_j)| : \{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_m(A_r) \right\}$ , verificase que

$$|\lambda|(A_r) \leq r|\lambda|(A_r).$$

En consecuencia, se  $r \in (0, 1)$  entón  $|\lambda|(A_r) = 0$ , logo  $|h(x)| \geq 1$ .

**Proba de  $|h(x)| \leq 1$ .** Xa que  $|\lambda|$  é unha medida positiva finita, a desigualdade  $|h(x)| \leq 1$  será certa se para case todo punto de  $X$ , os valores medios de  $h$  pertencen ao disco pechado  $\bar{D}(0, 1) \subset \mathbb{C}$ . Se  $E \in \mathcal{M}$  e  $|\lambda|(E) > 0$ , como  $\lambda(E) = \int_E h d|\lambda|$ , tense que  $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ , entón

$$\left| \frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E h d|\lambda| \right| = \left| \frac{\lambda(E)}{|\lambda|(E)} \right| = \frac{|\lambda(E)|}{|\lambda|(E)} \leq \frac{|\lambda|(E)}{|\lambda|(E)} = 1,$$

tal e como queriamos probar. □

**Teorema 3.18** (Representación da medida de variación total). *Sexa  $\mu$  unha medida positiva sobre  $(X, \mathcal{M})$ ,  $g \in L^1(\mu)$  e*

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entón

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

*Demostración.* Polo teorema anterior, existe unha función  $h$  de módulo 1 tal que  $d\lambda = h d|\lambda|$ . Por hipótese  $d\lambda = g d\mu$ , polo tanto

$$h d|\lambda| = g d\mu \iff \int_E h d|\lambda| = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (3.13)$$

Probarase que

$$|\lambda|(E) = \int_E \bar{h} g d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (3.14)$$

Isto quere dicir que

$$\left[ \int_E h d|\lambda| = \int_E g d\mu, \forall E \in \mathcal{M} \right] \implies \left[ \int_E \bar{h} h d|\lambda| \equiv |\lambda|(E) = \int_E \bar{h} g d\mu, \forall E \in \mathcal{M} \right]. \quad (3.15)$$

Con máis xeneralidade, véxase que, grazas a (3.13), pódese deducir que

$$\int_X f g d\mu = \int_X f h d|\lambda|, \quad \text{para cada función } f \text{ medible e limitada.} \quad (3.16)$$

Tomando  $f = \bar{h} \chi_E$ , con  $E \in \mathcal{M}$ , chegarase á igualdade requirida. Ademais, grazas a que  $|\lambda|$  e  $\mu$  son medidas positivas, dedúcese que  $\bar{h} g \geq 0$  e ademais  $\bar{h} g = |\bar{h} g| = |g|$ , (ambas conclusións en case todo punto de  $X$  respecto  $\mu$ ).

**Proba de (3.16).** Farase por etapas

Etapa I) (**Funcións características**) Sexa  $f = \chi_E$  con  $E \in \mathcal{M}$ . Este caso redúcese á hipótese, pois

$$\int_X \chi_E g d\mu = \int_E g d\mu = \int_E h d|\lambda| = \int_X \chi_E h d|\lambda|.$$

Etapa II) (**Funcións simples e medibles**) Sexa  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  con  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  e  $A_i \in \mathcal{M}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Pola Etapa I) e a linearidade da integral tense que:

$$\int_X f g d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \chi_{A_i} g d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} g d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} h d|\lambda| = \int_X f h d|\lambda|.$$

Etapa II) (**Funcións complexas, medibles e limitadas**). Sexa  $f$  unha función complexa medible e limitada, entón

- Existe unha sucesión de funcións complexas medibles e simples  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
- A sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$ .
- Existe unha constante positiva tal que  $|s_1| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots \leq |f| \leq M$  en  $X$ .

Tendo en conta que  $\{s_n \cdot g\} \rightarrow \{f \cdot g\}$  e  $\{s_n \cdot h\} \rightarrow \{f \cdot h\}$  e ademais as sucesións están dominadas en grazas á constante  $M$ .

- $|s_n \cdot g| \leq |f| |g| \leq M |g|$  e  $M |g| \in L^1(\mu)$ .
- $|s_n \cdot h| \leq |f| |h| \leq M$  e  $M \in L^1(|\lambda|)$ .

Polo tanto en virtude do Teorema da Convergencia Dominada e a etapa II:

$$\int_X f g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \cdot h d|\lambda| = \int_X f h d|\lambda|$$

□

Ademais, agora xa se pode demostrar o Teorema 2.28 da Descomposición de Hahn.

**Teorema 3.19** (Teorema da Descomposición de Hahn). *Sexa  $\mu$  unha medida real no espazo medible  $(X, \mathcal{M})$ . Entón  $\mu$  orixina unha descomposición de Hahn en  $(X, \mathcal{M})$ .*

*Demostración.* Tense que probar a existencia de conxuntos  $A$  e  $B \in \mathcal{M}$  tales que  $A \cup B = X$  e  $A \cap B = \emptyset$ , e tales que as variacións positivas e negativas  $\mu^+$  e  $\mu^-$  de  $\mu$  verifiquen

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A), \quad \mu^-(E) = \mu(E \cap B), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Isto afirma que  $X$  é a unión de dous conxuntos disxuntos medibles  $A$  e  $B$  tales que  $A$  acumula toda a masa positiva de  $\mu$  e  $B$  soporta toda a masa negativa de  $\mu$ .

Polo Teorema de Representación polar,  $d\mu = h d|\mu|$ , con  $|h(x)| = 1$ , ademais como  $\mu$  é unha medida real, entón  $h$  é unha función real (en case todo punto de  $X$ , e entón en todo  $X$  redefiníndoa nun conxunto de medida nula), en consecuencia  $h = \pm 1$ .

Sexan  $A = \{x \in X : h(x) = 1\}$  e  $B = \{x \in X : h(x) = -1\}$ . Como  $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$  e

$$\frac{1}{2}(1 + h) = \begin{cases} h & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in B; \end{cases}$$

entón tense que  $\forall E \in \mathcal{M}$ ,  $\mu^+(E) = \frac{1}{2} \int_E (1 + h) d|\mu| = \int_{E \cap A} h d|\mu| = \mu(E \cap A)$ .

Como  $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$  e  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ , séguese que  $\mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$ , como se quería probar.  $\square$

**Corolario 3.20** (Minimalidade da Descomposición de Jordan). *Se  $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$  con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dúas medidas positivas, entón  $\lambda_1 \geq \mu^+$  e  $\lambda_2 \geq \mu^-$ .*

*Demostración.* Como  $\mu \leq \lambda_1$ , tense que  $\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leq \lambda_1(E \cap A) \leq \lambda_1(E)$ .  $\square$

### 3.4. Exemplo ilustrativo

A continuación desenvolverase un exemplo académico que permite pór en práctica os coñecementos desenvolto neste traballo.

Sexan  $X = [-1, 2]$ ,  $\mathcal{M}$  a  $\sigma$ -álgebra dos conxuntos Lebesgue medibles de  $X$ ,  $m$  a medida de Lebesgue en  $\mathcal{M}$  e  $f, g$  as funcións:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} & g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} & x &\longmapsto g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

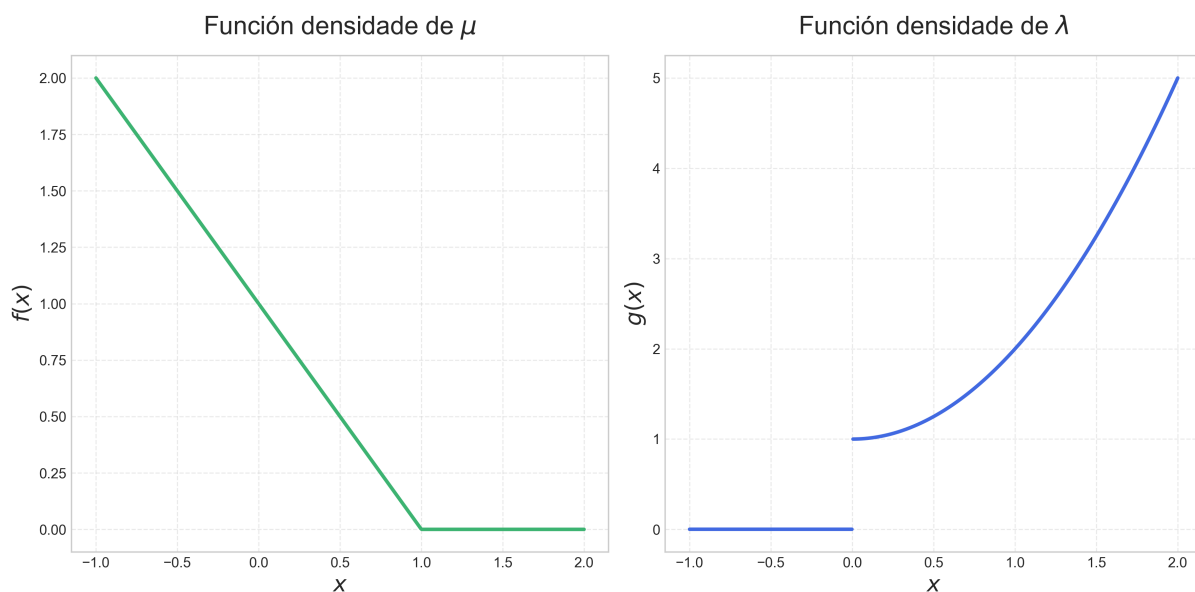


Figura 3.1: Gráfica de  $f(x)$  e  $g(x)$

Claramente,  $f$  e  $g$  son funcións medibles e non negativas, polo que as funcións de conxunto,  $\mu$  e  $\lambda$  definidas mediante:

$$\mu(E) = \int_E f \, dm, \quad \forall E \in \mathcal{M}, \quad (3.17)$$

$$\lambda(E) = \int_E g \, dm, \quad \forall E \in \mathcal{M}, \quad (3.18)$$

son medidas positivas.

Plantéxanse as seguintes cuestións:

- Obter a descomposición de Lebesgue de  $\lambda$  relativa a  $\mu$ .
- Sexa  $\nu = \mu - \lambda$ , obter a descomposición de Hahn de  $X$  relativa a  $\nu$  e a descomposición de Jordan de  $\nu$ .

### Análise das medidas $\mu$ e $\lambda$ .

A continuación analizamos a natureza de ambas medidas definidas.

Sendo  $f$  e  $g$  funcións limitadas en  $X$ , que ten medida de Lebesgue finita, sucede que  $\lambda$  e  $\mu$  son medidas finitas. O teorema de Radon-Nikodym, na súa primeira versión 3.7, esixe que as dúas medidas sexan positivas e finitas, e estanse verificando tales condicións. Pódese afirmar que:

- $\lambda$  admite descomposición de Lebesgue  $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$  respecto a  $\mu$  e, ademais,  $\lambda_a$  ten derivada de Radon-Nikodym respecto de  $\mu$ .
- $\mu$  admite descomposición de Lebesgue  $\mu = \mu_a + \mu_s$  respecto a  $\lambda$  e, ademais,  $\mu_a$  ten derivada de Radon-Nikodym respecto de  $\lambda$ .

### Descomposición de Lebesgue de $\lambda$ respecto $\mu$

Obtéñase a descomposición de Lebesgue de  $\lambda$  respecto de  $\mu$ . Búscase, entón, expresar (de modo único)

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s,$$

tal que  $\lambda_a \ll \mu$ ,  $\lambda_s \perp \mu$  e  $\lambda_a \perp \lambda_s$ .

Como  $\lambda_s$  debe ser ortogonal a  $\mu$ , parece razoable tomar como  $\lambda_s$  a medida  $\lambda$  concentrada en  $[1, 2]$  (pois nos subconxuntos medibles dese intervalo a medida  $\mu$  é nula).

Sexa, entón  $\lambda_s$  dada por:

$$\lambda_s(E) = \lambda(E \cap [1, 2]) \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Obviamente  $\lambda_s \perp \mu$ , pois  $\mu$  está concentrada en  $[-1, 1)$ . De ser esta  $\lambda_s$  a parte de  $\lambda$  mutuamente singular con  $\mu$ , entón  $\lambda_a$  deberá ser a medida diferenza:  $\lambda_a = \lambda - \lambda_s$ .

En concreto, terase que  $\lambda_a$  se escribe do xeito:

$$\lambda_a(E) = \lambda(E) - \lambda_s(E) = \lambda(E) - \lambda(E \cap [1, 2]) = \lambda(E \cap [-1, 1)) \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Así, se  $\lambda - \lambda_s$  é absolutamente continua respecto a  $\mu$ , teremos a descomposición buscada.

Pero isto é obvio, pois se  $E \in \mathcal{M}$  é tal que  $\mu(E) = 0$  entón  $\lambda_a(E) = 0$ .

En efecto, pola definición de  $f$ ,

$$\mu(E) = 0 \implies \mu(E \cap [-1, 1)) + \mu(E \cap [1, 2]) = 0 \implies \mu(E \cap [-1, 1)) = 0.$$

Pola definición da medida  $\mu$ , sendo  $f$  non negativa chégase a que

$$\mu(E \cap [-1, 1)) = \int_{E \cap [-1, 1)} f = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p. } (m) \text{ de } E \cap [-1, 1).$$

Agora, como  $f > 0$  en  $[-1, 1)$ , o anterior é equivalente a que  $m(E \cap [-1, 1)) = 0$ , e grazas a que  $\lambda \ll m$  tense que  $\lambda(E \cap [-1, 1)) = 0$ .

Polo tanto, obtívose a descomposición de Lebesgue de  $\lambda$  respecto de  $\mu$ :

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \text{ tal que } \begin{cases} \lambda_a(E) = \lambda(E \cap [-1, 1)), & \forall E \in \mathcal{M} \\ \lambda_s(E) = \lambda(E \cap [1, 2]), & \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Dado que  $\lambda$ , e, con ela,  $\lambda_a$  e  $\lambda_s$  son medidas positivas finitas, o Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym garante a existencia dunha única  $h \in L^1(\mu)$  tal que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Como  $\mu$  é a medida definida mediante

$$\mu(E) = \int_E f dm \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

terase entón, grazas ao Teorema 1.33 e como  $f = 0$  en  $[1, 2]$

$$\lambda_a(E) \equiv \int_E h d\mu = \int_E h f dm = \int_{E \cap [-1, 1)} h f dm, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Por outra banda,

$$\lambda_a(E) \equiv \lambda(E \cap [-1, 1)) = \int_{E \cap [-1, 1)} g dm = \int_E g \chi_{[-1, 1)} dm$$

$$\text{Así, } \lambda_a(E) = \int_E h f dm = \int_E g \chi_{[-1, 1)} dm, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Polo tanto chégase a que  $h f = g \chi_{[-1, 1)}$  c.t.p. ( $m$ ) de onde se obtén que a expresión de  $h$ , a derivada de Radon-Nikodym de  $\lambda_a$  respecto de  $\mu$  é:

$$h(x) = \frac{d\lambda_a}{d\mu}(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 1}{1 - x}; & x \in [-1, 1) \\ 0; & \text{no resto} \end{cases} \quad \text{c.t.p.}(\mu)$$

Nótese que  $h \notin L^1(m)$  pero  $h \in L^1(\mu)$  pois o denominador anúlase nun conxunto de medida nula para  $\mu$ .

**Análise da medida  $\nu = \mu - \lambda$ .**

A medida  $\nu = \mu - \lambda$  é unha medida real por ser a diferenza de dúas medidas positivas finitas. En base ás definicións das medidas  $\mu$  e  $\lambda$ , tense que se pode expresar  $\nu$  como a integral respecto unha densidade, en particular, adquire a seguinte expresión:

$$\nu(E) = \mu(E) - \lambda(E) = \int_E f(x) dm - \int_E g(x) dm = \int_E (f(x) - g(x)) dm$$

Polo tanto a densidade da medida  $\mu$  é a función  $f - g$ , definida do seguinte xeito:

$$f - g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ 1 - x - (x^2 + 1) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

No que segue denotarase á densidade de  $\nu$  por  $h(x)$ .

### Descomposición de Hahn de $X$ relativa a $\nu$ .

Recórdase que unha descomposición de Hahn de  $X$  é un par  $(P, N)$  de subconxuntos disxuntos  $P, N$  de  $X$  tal que  $P$  é positivo para  $\nu$  e  $N$  é negativo para  $\nu$ . Isto vén dicir que  $\nu(A) \geq 0 \forall A \subseteq P$  e  $\nu(B) \leq 0 \forall B \subseteq N$ . Polo tanto, grazas á expresión da densidade de  $\nu$ , pódese analizar directamente o signo desta, pois

$$P = \{x \in X / h(x) > 0\}, \quad N = \{x \in X / h(x) \leq 0\}.$$

Calcúlase o signo e os posibles puntos de cambio en cada subdominio.

- Se  $x < 0$ , entón  $h(x) = 1 - x$ . Esta función non se anula en  $[-1, 0)$ , polo tanto é de signo constante. En  $[-1, 0)$  a función é positiva.
- Se  $0 \leq x \leq 1$  entón  $h(x) = -x^2 - x$ . Esta función presenta puntos de cambio de signo en  $x = 0$  e  $x = -1$ , polo tanto no que atinxe ao intervalo  $[0, 1]$ , é de signo constante negativo.
- Por último se  $x > 1$ , tense que  $h(x) = -x^2 - 1$ . A función é de signo constante, e no intervalo de definición é negativa.

En consecuencia a estes razoamentos tense que  $X = P \cup N = [-1, 0) \cup [0, 2]$ .

### Descomposición de Jordan de $\nu$ .

Aproveitando a descomposición de Hahn de  $X$  relativa a  $\nu$ , pódese obter directamente a descomposición de Jordan.

Defínese a parte positiva e negativa de  $\nu$  como

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = \nu(E \cap N), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Polo tanto, para calquera  $E \in \mathcal{M}$ , tense que

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E \cap [-1,0)} h(x) dm = \int_{E \cap [-1,0)} (1-x) dm.$$

$$\nu^-(E) = \nu(E \cap N) = \int_{E \cap [0,2]} h(x) dm = \int_{E \cap [0,1]} (-x^2 - x) dm + \int_{E \cap (1,2]} (-x^2 - 1) dm.$$

Da definición séguese que para todo subconxunto medible  $E \in \mathcal{M}$ .

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E).$$

**Observación 3.21.** Como utilidade desta descomposición, pódese obter a variación total de  $\nu$ , como segue.

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_{E \cap [-1,0)} (1-x) dm - \left( \int_{E \cap [0,1]} (-x^2 - x) dm + \int_{E \cap (1,2]} (-x^2 - 1) dm \right).$$

Polo tanto a densidade de  $|\nu|$  é

$$h' : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto h'(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 0 \\ x^2+x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

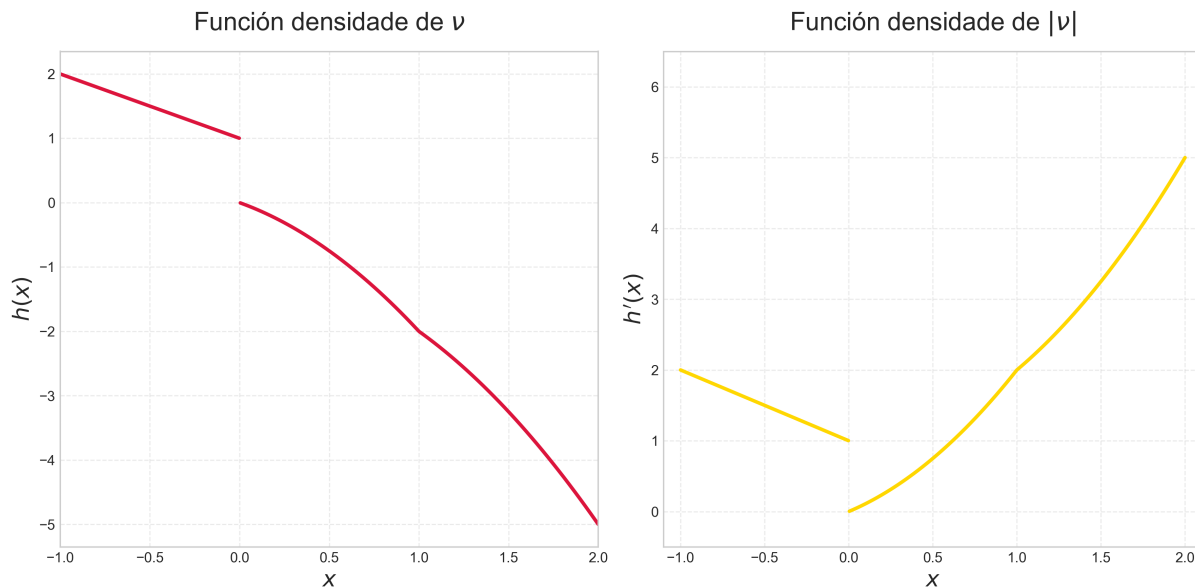


Figura 3.2: Gráfica de  $h(x)$  e  $h'(x)$ .

Aínda que, por outra banda, tamén se podería empregar o Teorema 3.18, chegando a que

$$|\nu|(E) = \int_E |f - g| dm, \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

### 3.5. Recensión histórica

O Teorema de Radon-Nikodym ten unha orixe moi recente, mesmo a teoría na que se encadra provén de comezos do século XX, polo tanto coñecer as súas orixes semellaba un reto asumible. Farase unha revisión histórica comentando cualitativamente os avances que se foron acadando. Non se pretende chegar a formalismos nesta sección senón máis ben a dar unha idea do proceso deste teorema, como nace e como foi desenvolto.

#### 3.5.1. Henri Lebesgue

**Henri Léon Lebesgue** (1875–1941) foi un matemático francés considerado un dos grandes renovadores da **análise matemática moderna**. As súas achegas permitiron avances decisivos en diversas áreas das matemáticas, grazas a unha visión profundamente conceptual e unha tendencia a resolver os problemas dunha maneira natural, evitando hipóteses innecesarias.

O seu nome está intimamente ligado á **Teoría da Medida**, da cal é considerado un dos pais fundadores xunto con **Émile Borel**. A súa tese doutoral, titulada *Intégrale, longueur, aire* (1902), marcou un antes e un despois na análise matemática ao formular unha nova teoría da integración que superaba as limitacións da **integral de Riemann**.

Nos seus escritos, Lebesgue defendía unha matemática con contido e significado, afirmando que: “*réduites à des théories générales, les mathématiques seraient une belle forme sans contenu*” (reducidas a teorías xerais, as matemáticas serían unha bela forma sen contido).

Na súa monografía *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1903), Henri Lebesgue recolle as leccións impartidas no Collège de France centradas no desenvolvemento da noción de integral. Nos **Capítulos VIII e IX** desta obra obsérvase unha aproximación que presenta claras conexións co contido do presente traballo.

Segundo Lebesgue, unha integral indefinida dunha función de variable real pode ser considerada baixo diversas interpretacións: como unha función dunha variable real ( $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ <sup>4</sup>), como unha función definida sobre intervalos  $\Psi(\delta)$ , sendo  $\delta \subset \mathbb{R}$  un intervalo do tipo  $[\alpha, \beta]$ , ou como unha función definida sobre conxuntos  $\Phi(E)$ , sendo  $E$  un subconxunto medible de  $\mathbb{R}$ . A

---

<sup>4</sup>Lebesgue fai referencia a un conxunto de funcións clasificadas por **René Baire** como *funcións de primeira clase*, é dicir, funcións límites de sucesións de funcións continuas.

pesar das diferenzas formais, Lebesgue considera estas tres representacións como equivalentes, no senso de que dada unha delas poden obterse as outras dúas.

No transcurso desta análise introdúcese o concepto de función de conxunto  $\sigma$ -aditiva, establecéndose que toda función dese tipo é de **variación acotada**, e desenvólvese a noción de **variación total** e **continuidade absoluta**, chegando mesmo a propoñerse unha descomposición da función  $F$  segundo as súas partes singular, continua e absolutamente continua, o que anticipa o **Teorema de descomposición de Lebesgue**.

A obra amosa unha clara vontade de interpretar, de xeito o máis amplo posible, o significado da integral, o que se pode considerar como o xermolo do **Teorema Fundamental do Cálculo**<sup>5</sup>.

Así mesmo, afirmase que coñecendo a integral indefinida dunha función de variable real, pódese recuperar a **función orixinal** baixo certas condicións. Considerando a integral como unha función definida sobre conxuntos, preséntase a seguinte expresión:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi([x_0, x_0 + h])}{m([x_0, x_0 + h])},$$

na que se relaciona a derivada da función  $F$  co cociente entre o valor da función de intervalo,  $\Psi$ , e a medida de Lebesgue do intervalo correspondente. Esta formulación podería interpretarse hoxe como

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^t f(x) dx \right) = f(t),$$

o que constitúe unha versión inicial do **Teorema Fundamental do Cálculo** para funcións absolutamente continuas. O que tamén se pode interpretar como un antecedente directo do **Teorema de Radon-Nikodym**: a medida  $\lambda$ , absolutamente continua respecto da medida de Lebesgue, admite unha función derivada  $f$  tal que, para todo intervalo  $[a, t]$ , se cumpre

$$\lambda([a, t]) = \int_a^t f(x) dx.$$

Deste xeito, a igualdade derivativa presentada por Lebesgue pode entenderse como unha primeira formulación do concepto de **densidade dunha medida** con respecto a outra.

---

<sup>5</sup>Se  $F$  é absolutamente continua, entón existe  $f \in L^1([a, b])$  tal que  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  para todo  $x \in [a, b]$ , e  $F'(x) = f(x)$  case en toda parte.

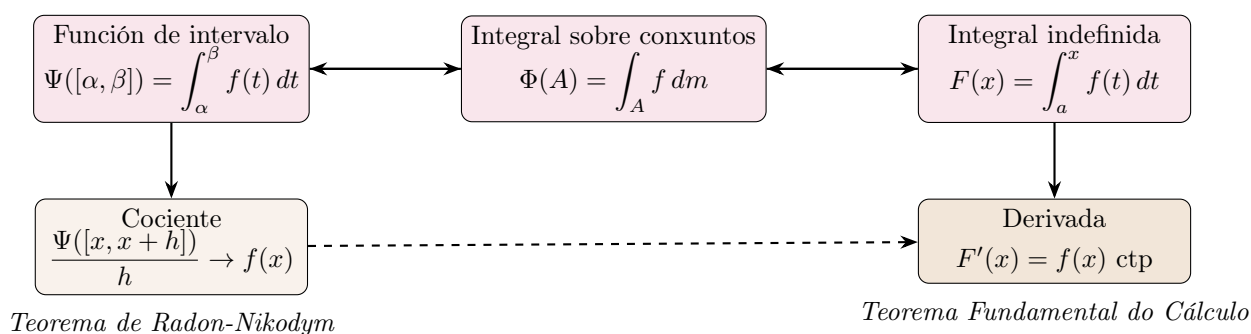


Figura 3.3: Relación entre integración e derivación segundo a formulación de Lebesgue.

### 3.5.2. Johann Radon

**Johann Radon** (1887–1956) foi un matemático austríaco cuxas achegas resultaron fundamentais no desenvolvemento da análise funcional e da teoría da integración. É lembrado pola introdución da transformación e integral que leva o seu nome, así como polo teorema de Radon-Nikodym. Ao longo da súa traxectoria académica, exerceu como docente e investigador en diversas universidades austríacas, deixando unha profunda pegada na matemática do século XX.

En *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen* (Teoría e aplicacións das funcións de conxuntos absolutamente aditivas), artigo extenso publicado en 1913, Johann Radon desenvolve unha teoría xeral sobre as funcións de conxunto que presentan a propiedade de aditividade absoluta –notación que emprega Radon para denotar a  $\sigma$ -aditividade–. O texto anticipa de forma notábel conceptos centrais da análise funcional e da integración abstracta.

O marco sobre o que constrúe a súa teoría é un subconxunto compacto  $J \subset \mathbb{R}^n$ , usualmente en dimensión dous, sobre o que define unha colección de conxuntos,  $T$ : pechada fronte a unións disxuntas numerables, interseccións finitas e complementacións. Sobre esa clase de conxuntos introduce as denominadas *funcións de conxunto absolutamente aditivas*, que son aplicacións  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para toda familia numerable de conxuntos disxuntos  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset T$  se cumpre

$$f \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(E_i),$$

e tal que a serie do segundo membro converxe absolutamente. Este tipo de funcións hoxe identifícanse coas **medidas reais de variación finita**.

Unha das contribucións máis relevantes do artigo, cunha interpretación actual, é o estudo das condicións baixo as cales unha función de conxunto absolutamente aditiva,  $f$ , pode ser expresada

como

$$f(E) = \int_E \varphi(x) dm,$$

onde  $m$  é a medida de Lebesgue e  $\varphi$  é unha función integrable respecto de  $m$ , o que resulta nunha medida real nas condicións de Lebesgue. Para que esta representación sexa válida, é necesario que  $f$  sexa **absolutamente continua** respecto de  $m$ , isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $m(E) < \delta \Rightarrow |f(E)| < \varepsilon$ . Realmente, Radon quería obter unha representación dos operadores lineais continuos, mediante o uso da **integral de Stieltjes**. O traballo de Radon é, así, pioneiro tanto na formulación dunha integración abstracta asociada a funcións de conxunto como na representación de funcionais lineais mediante integración, sendo este último aspecto desenvolvido formalmente nos capítulos centrais da obra.

### 3.5.3. Otto Nikodym

**Otto Marcin Nikodym** (1887–1974) foi un matemático e físico polaco que viviu nun período marcado polas dúas guerras mundiais. Formouse en numerosas ciencias e humanidades, consolidando o seu coñecemento matemático grazas á asistencia a clases de figuras de renome, tales coma Leopold **Kronecker**, Gyula **Farkas** ou Waclaw **Sierpiński**. Foi tamén un dos **promotores da creación da Sociedade Matemática Polaca**, xunto con outros matemáticos relevantes, entre os que se atopa Stefan **Banach**.

No seu artigo *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon* (1930), Nikodym retoma a extensión proposta por **Fréchet** da teoría da medida e da integración de **Radon**, en consonancia co enfoque de **Lebesgue**.

Traballa en “corpos de conxuntos” ( $\mathcal{M}$ ): unha familia non baleira de subconxuntos dunha 1-variedade<sup>6</sup> que é pechada respecto á unión numerable e á complementación. Este tipo de estrutura é similar a unha  $\sigma$ -álgebra, base da nosa teoría da medida, mais non exactamente igual. Nikodym argumenta que o espazo de traballo que considera non é menos xeral ca aquel empregado por outros autores.

No seu estudo, Nikodym considera medidas  $\varphi(E)$  **non negativas** (funcións de conxunto  $\sigma$ -aditivas, –tal propiedade, Nikodym denotábaa por aditividade perfecta–), ademais se  $\lambda$  é absolutamente continua respecto  $\mu$ , entón denotábao coma que  $\lambda$  é  $\mu$ -continua.

No artigo, Nikodym recolle o seguinte: “A teoría [de integración que se desenvolverá neste artigo] comeza cunha decena de teoremas... e lemas fáciles de demostrar. O que resulta algo máis interesante é o seguinte teorema”:

---

<sup>6</sup>Unha **1-variedade topolóxica** é un espazo topolóxico  $M$  tal que para todo punto  $p \in M$ , existe unha veciñanza aberta  $U \subseteq M$  de  $p$  e un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow I$ , onde  $I$  é un intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . É dicir,  $M$  é localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.22.** *Unha condición necesaria e suficiente para que unha función  $\varphi(E)$  sexa perfectamente aditiva e  $\mu$ -continua é que exista unha función  $\mu$ -sumable  $f(x)$  tal que*

$$\varphi(E) = \int_E f(x) d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (3.19)$$

A continuación, Nikodym comenta como Lebesgue demostrou este teorema e como foi posteriormente xeneralizado por Radon no caso particular dun subconxunto do espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . No seu artigo, obsérvase unha certa similitude na estrutura teórica con respecto á teoría que se presenta neste traballo, presentando versións dalgúns teoremas, como os Teoremas 1.33, 2.22 ou 2.28.

Finalmente, Nikodym xustifica un caso máis xeral, definindo os conxuntos positivos e negativos,  $P$  e  $N$ , respectivamente. Argumenta que unha medida pode separarse en partes positiva e negativa,  $\varphi^+(E)$  e  $\varphi^-(E)$ , definidas sobre os subconxuntos de  $P$  e  $N$ . Con isto, afirma que existen funcións  $\mu$ -sumables  $f^+$  e  $f^-$  tales que

$$\varphi^+(E) = \int_E f^+(x) d\mu, \quad \varphi^-(E) = \int_E f^-(x) d\mu, \quad (3.20)$$

onde  $f^+$  toma valores no conxunto positivo e  $f^-$  no negativo, e conclúe que se pode definir unha función que acumule os valores de  $f^+$  e  $f^-$ , xa que, se  $x \in P \cap N$ , entón  $f^+(x) = f^-(x) = 0$ .

Nikodym formalizou e ampliou os resultados de Lebesgue e Radon, establecendo as condicións para a existencia dunha función integrable que representa unha medida como a integral dunha función  $\mu$ -sumable. Este traballo proporcionou unha formulación máis xeral e precisa do teorema, que serve como base para a súa comprensión moderna.

## Referencias bibliográficas

Nas seccións 3.1 e 3.3 empréganse os libros de [3] e [10], que ofrecen un tratamento rigoroso do Teorema de Radon-Nikodym. O estudo das condicións necesarias para a súa validez baséase principalmente nestas dúas fontes. A primeira demostración do teorema, de inspiración funcional e baseada no Teorema de Riesz-Fréchet, aparece en [10], mentres que a segunda, de carácter máis construtivo, séguese a [3]. Na sección 3.3, retómase o uso de [10], para unha exposición das consecuencias do teorema e dos seus corolarios principais, facendo unhas demostracións máis pormenorizadas.

Na sección 3.5, na que se presenta unha recensión histórica do desenvolvemento do resultado, utilízase o libro de [5], que contén información contextual e biográfica sobre Lebesgue. Ademais, recórrese á obra orixinal de Lebesgue [4] para identificar as ideas precursoras do teorema. Para a figura de Johann Radon utilízase directamente o seu artigo orixinal [9], mentres que as achegas de Otto Nikodym fórmanse a partir dos traballos [7] e [8].



# Bibliografía

- [1] Y. Bermudez, G. Bisson, I. Esnaola, and S. M. Perlaza, *Proofs for Folklore Theorems on the Radon-Nikodym Derivative*, Arxiv, 2025.
- [2] S. B. Chae, *Integration*, Springer-Verlag, 1992.
- [3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2 ed., Birkhäuser New York, 2013.
- [4] H. L. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [5] François Le Lionnais, *Henri Lebesgue: Renewer of Modern Analysis*, vol. 1, Dover Publications, 1971.
- [6] J. Muscat, *Functional analysis*, Springer Nature, 2024.
- [7] O. M. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, *Fundamenta Mathematicae* **15** (1930), 131–179.
- [8] MacTutor History of Mathematics Archive, *Otton Marcin Nikodym*, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nikodym/>.
- [9] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut stetigen Funktionen*, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse* **122** (1913), 1295–1438.
- [10] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1979.
- [11] R.M. Trinchet, *Apuntamentos de teoría da medida*, Universidade de Santiago de Compostela, 2023.



## Anexo A

# Información complementaria

### A.1. A recta real ampliada, $\overline{\mathbb{R}}$

A recta real ampliada,  $\overline{\mathbb{R}}$ , obtémola engadindo á  $\mathbb{R}$  dous novos puntos, que designaremos por  $-\infty$  e  $\infty$ , respectivamente:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

e considerando neste conxunto a relación de orde, as operacións e a topoloxía que se describen a continuación.

#### Relación de orde

A relación de orde habitual dos números reais esténdese a  $\overline{\mathbb{R}}$  mediante os seguintes convenios:

$$-\infty < a < \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(Enténdese que os números reais compáranse do xeito habitual).

Deste xeito, empregando a notación de intervalos, escribiremos tamén  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ .

#### Operacións alxébricas

As operacións de  $\mathbb{R}$  esténdense tamén a  $\overline{\mathbb{R}}$ , con algunhas restricións. As operacións con números reais realízanse do xeito habitual. Ademais, convimos que:

- $\infty + a = a + \infty = \infty$ , se  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \infty$ .
- $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$ , se  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = -\infty$ .

- Non se definen as expresións:  $\infty - \infty$  e  $-\infty + \infty$ .
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ , se  $a \in \mathbb{R}^+$  ou  $a = \infty$ .
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$ , se  $a \in \overline{\mathbb{R}}^-$  ou  $a = -\infty$ .
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$ , se  $a \in \mathbb{R}^+$  ou  $a = \infty$ .
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = \infty$ , se  $a \in \overline{\mathbb{R}}^-$  ou  $a = -\infty$ .
- $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$ .

## Topoloxía

A topoloxía usual de  $\overline{\mathbb{R}}$  queda determinada considerando como **abertos básicos** os conxuntos das seguintes clases:

$$(a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, a < b; \quad [-\infty, a), \text{ con } a \in \mathbb{R}; \quad (b, \infty], \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

Polo tanto, os abertos usuais de  $\overline{\mathbb{R}}$  serán aqueles conxuntos que se expresan como unións de conxuntos dalgunha destas tres clases.

En particular, os abertos de  $\mathbb{R}$  (respecto da topoloxía usual) son abertos en  $\overline{\mathbb{R}}$ , mais non ocorre o mesmo cos conxuntos pechados. Por exemplo,  $\mathbb{R}$  non é pechado en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## A.2. Nocións de espazos normados e espazos de Hilbert.

Do mesmo xeito que o concepto de espazo métrico xorde cando se fai abstracción da distancia da Xeometría euclidiana, o concepto de norma aparece cando se ten en conta que as estruturas de espazo vectorial e de espazo métrico de  $\mathbb{R}^n$  están ligadas polas seguintes propiedades:

- a)  $d(x, y) = d(x + z, y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$
- b)  $d(x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} (= \mathbb{K})$

Deste xeito, para coñecer as distancias entre puntos de  $\mathbb{R}^n$ , chega con coñecer as distancias á orixe e, por exemplo, as bólas quedan determinadas unha vez que se coñeza a respectiva bóla unitaria. A abstracción destas ideas permite definir o concepto de norma e de espazo normado.

Sexa  $V$  un espazo vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definición A.1.** Unha **norma** en  $V$  é unha aplicación  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ , cumprindo:

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$  (desigualdade triangular)

**Definición A.2.** Un **espazo normado** é un par  $(V, \|\cdot\|)$ , onde  $V$  é un espazo vectorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $\|\cdot\|$  é unha norma en  $V$ .

**Observación A.3.** Se  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$  cumpre soamente as propiedades 2 e 3 da definición A.1, dirase que  $\|\cdot\|$  é unha **seminorma**.

**Proposición A.4.** *Todo espazo normado pode considerarse como un espazo métrico, mediante a métrica inducida pola norma, que vén dada por:*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

Recórdese a seguinte definición.

**Definición A.5.** Un espazo normado  $(V, \|\cdot\|)$  dise **completo** se toda sucesión de Cauchy en  $V$  converxe a un punto en  $V$ .

**Definición A.6.** Un espazo normado completo denomínase **espazo de Banach**.

Unha clase particularmente relevante de espazos normados é a constituída por aqueles espazos nos que a norma está inducida por un produto interior. Nestes casos, é posible xeneralizar numerosas propiedades xeométricas dos espazos euclidianos, xa que a presenza do produto interior permite definir conceptos fundamentais como o ángulo entre vectores ou a noción de perpendicularidade. Así, cobran sentido ferramentas como as proxeccións ortogonais ou a descomposición en subespazos ortogonais.

**Definición A.7.** Un **produto interior** ou **produto escalar** en  $V$  é unha aplicación

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow K,$$

cuxas propiedades son as seguintes:

1.  $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ , para todo  $x, y, z \in V$ .
2.  $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ , para todo  $x, y \in V$  e  $\lambda \in K$ .
3.  $(x|y) = (y|x)$ , para todo  $x, y \in V$ .

4.  $(x|x) \geq 0$ , para todo  $x \in V$ ;  $(x|x) = 0$  se e só se  $x = 0$ .

**Observación A.8.** Así, cando  $K = \mathbb{R}$ , un produto interior é unha forma bilinear simétrica definida positiva, mentres que, cando  $K = \mathbb{C}$ , é unha forma sesquilineal, hemisimétrica, definida positiva.

**Definición A.9.** Un espazo vectorial  $V$  dotado dun produto interior chámase **espazo prehilbertiano**.

**Proposición A.10.** *Todo espazo prehilbertiano pode considerarse como un espazo normado, sen máis que dotalo da norma inducida polo produto interior, que vén dada por*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{para todo } x \in V.$$

Unha propiedade directa dos espazos prehilbertianos é a seguinte:

**Proposición A.11** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se  $(\cdot|\cdot)$  é un produto interior en  $V$ , daquela,*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y), \quad \forall x, y \in V.$$

Esta motivación conduce de maneira natural á definición dos chamados espazos de Hilbert.

**Definición A.12.** Cando un espazo prehilbertiano, dotado da norma inducida polo produto interior, é un espazo completo, denominarase un **espazo de Hilbert**

Sexan  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  e  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  dous espazos vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$

**Definición A.13.** Un funcional lineal (ou transformación lineal) é unha función  $T : V_1 \rightarrow V_2$  verificando:

1.  $T(v + w) = T(v) + T(w)$ ,  $\forall v, w \in V_1$ .
2.  $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ ,  $\forall v \in V_1$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ .

**Definición A.14.** Un funcional dise continuo se para todo  $a \in V_1$  e para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|v - a\|_1 < \delta$  entón  $\|f(v) - f(a)\|_2 < \varepsilon$ .

Empregando a desigualdade de Cauchy-Schwarz A.11, se  $E$  é un espazo prehilbertiano e  $a \in E$ , a aplicación

$$F : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad F(x) = (x|a),$$

é un funcional lineal continuo en  $E$  e, ademais,  $\|F\| = \|a\|$ .

Ademais, o seguinte resultado afirma que os únicos funcionais lineais continuos son da forma que se vén de describir.

**Teorema A.15** (Teorema de representación de Riesz-Fréchet). *Se  $H$  é un espazo de Hilbert, e  $F : H \rightarrow \mathbb{K}$  é un funcional lineal continuo, entón existe un único elemento  $a_F \in H$  tal que*

$$F(x) = (x|a_F) \quad \text{para todo } x \in H.$$

*Ademais,  $\|F\| = \|a_F\|$ .*

