FACULTAD DE CIENCIAS DA EDUCACIÓN

Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais

Área de Didáctica da Matemática

UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL

TESIS DOCTORAL

2011

Mª Teresa Fernández Blanco

Santiago de Compostela, septiembre de 2011

UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL

Tesis Doctoral presentada por

Dña. Mª TERESA FERNÁNDEZ BLANCO

para aspirar al grado de Doctora

por la Universidad de Santiago de Compostela,

dirigida por el Dr. JOSÉ ANTONIO CAJARAVILLE PEGITO

y el Dr. JUAN DÍAZ GODINO

Santiago de Compostela, 16 de septiembre de 2011

Fdo. Mª Teresa Fernández Blanco

JOSÉ ANTONIO CAJARAVILLE PEGITO, Profesor Titular de Didáctica de la Matemática:

INFORMA FAVORABLEMENTE, la presentación de la tesis doctoral realizada por Dª Teresa Fernández Blanco, de la que soy codirector, en el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentais de la Universidade de Santiago de Compostela, con el título:

Una aproximación ontosemiótica a la visualización y al razonamiento espacial

Santiago de Compostela, a 1 de Setiembre de 2011.

Dr. José Antonio Cajaraville Pegito
Profesor Titular de Didáctica de la Matemática.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Dpto de Didáctica de la Matemática

Dr. Juan Díaz Godino
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus de Cartuja
18071 Granada
Dir. Electrónica: jgodino@ugr.es
http://www.ugr.es/local/jgodino

JUAN DÍAZ GODINO, Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada,

INFORMA FAVORABLEMENTE la presentación de la tesis doctoral realizada por Dª Teresa Fernández Blanco, de la cual he sido codirector, en el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Santiago de Compostela, con el título,

Una aproximación ontosemiótica a la visualización y al razonamiento espacial

Granada, 1 de Septiembre de 2011

Dr. Juan Díaz Godino
Catedrático de Didáctica de la Matemática

DEPARTAMENTO "DIDACTICA DE LA MATEMATICA" * UNIVERSIDAD DE GRANADA

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mis dos directores, el Dr. José Antonio Cajaraville Pegito de la Universidad de Santiago de Compostela y el Dr. Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada, el apoyo y la valiosa ayuda profesional que me han prestado todos estos años, sin la que no habría sido posible la elaboración de esta Tesis Doctoral.

En segundo lugar, debo agradecer al Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Santiago de Compostela, en especial al director del mismo, José Manuel Domínguez Castiñeiras, haber puesto a mi disposición todos los medios técnicos y humanos que facilitaron, entre otras cosas, la realización de diversas estancias en la universidad de Granada, fundamentales para la conclusión de esta investigación.

En tercer lugar, y no por ello menos importante, a los alumnos de la Facultad de Ciencias de la Educación de las diferentes especialidades de Maestro de la Universidad de Santiago de Compostela durante los años 2005-2009 por su preciada colaboración en el trabajo de campo, núcleo central sobre el que se apoya esta tesis.

Un agradecimiento especial a mi compañera y amiga Mª Jesús Salinas Portugal por sus aportaciones profesionales, pero sobre todo por haber sido mi guía emocional y la persona que me ha dado la fuerza necesaria para seguir adelante con este trabajo.

A todos mis amigos y familia por saber comprender los momentos de estrés y perdonarme las ausencias motivadas por la realización de este trabajo.

Por último, a mis hijos y a mi marido por su ayuda y cariño incondicional. Por todas esas horas que no pude compartir con ellos.

A Raquel, Helena y Alberto

No importa hacia donde mire, siempre los veo a ellos

UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN GENERAL 1

CAPITULO 1: ÁREA PROBLEMÁTICA. ANTECEDENTES

1.1. Introducción 5

1.2. Conexiones entre Visualización y Razonamiento Espacial 6

1.3. Nociones teóricas y enfoques metodológicos usados en VRE 9

1.3.1. Imágenes mentales 11

1.3.2. Representaciones externas 17

1.3.3. Procesos 22

1.3.4. Habilidades 25

1.4. La visualización y el razonamiento espacial como campo de investigación en Educación Matemática 29

1.4.1. Faceta Epistémica 32

1.4.1.1. Tipos de problemas que se ponen en juego en VRE 38

1.4.2. Faceta Cognitiva 45

1.4.2.1. Teorías pertinentes para el desarrollo del aprendizaje geométrico 48

1.4.2.2. Creación y representación mental del conocimiento geométrico y espacial. 54

1.4.2.3. Aprendizaje de conceptos 58

1.4.2.4. Procesos y estrategias 64

1.4.2.5. Preferencia del método: visualizadores y no visualizadores 71

1.4.3. Faceta Instruccional 77

1.4.3.1. Experiencias de enseñanza y aprendizaje en VRE 78

1.4.3.2. Recursos en la resolución de tareas de VRE 88

1.4.3.3. Demostración 97

1.4.4. Faceta Ecológica 99

1.4.4.1. Aspectos curriculares 99
1.4.4.2. Diferencias de género 106
1.4.4.3. Diferencias culturales 108
1.4.4.4. Conexiones con otros contenidos matemáticos, áreas curriculares y profesionales 111
1.5. Síntesis de las investigaciones sobre VRE en formación de profesores 115
1.6. Caracterización de la VRE en los enfoques cognitivos usuales de investigación en Educación Matemática 120
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA
2.1. Introducción 125
2.2. Marco teórico: enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático 127
2.2.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas 128
2.2.2. Configuraciones de objetos y procesos 129
2.2.3. Los significados como contenidos de funciones semióticas 135
2.2.4. Comprensión y conocimiento en el EOS 137
2.3. Perspectiva de la visualización en el marco del EOS 137
2.3.1. Objetos visuales primarios 140
2.3.2. Visualización y especificaciones contextuales 144
2.3.3. Tipos de configuraciones visuales 148
2.4. Objetivos e hipótesis de la investigación 150
2.5. Metodología 152
2.6. Población y muestra 156
2.6.1. Variables y técnicas de análisis 157
CAPÍTULO 3: ELABORACIÓN DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
3.1. Introducción 159
3.2. Selección de los ítems de los cuestionarios piloto 160
3.3. Estructura técnica de los cuestionarios 162
3.4. Aplicación de los cuestionarios piloto a una muestra de estudiantes para maestros 163

3.4.1. Cuestionario piloto 1 163
3.4.2. Valoración global del cuestionario piloto1 169
3.4.3. Cuestionario piloto 2 169
3.4.4. Valoración global del cuestionario piloto 2 176
3.5. Criterios de revisión de los ítems y elaboración del cuestionario definitivo 176
3.6. Clasificación de las tareas del cuestionario definitivo 180
3.6.1. Familia 2: tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales 184
3.7. Componentes de la VRE puestos en juego en cada ítem 189

CAPÍTULO 4: ELABORACIÓN DE LOS MODELOS EPISTÉMICOS DE REFERENCIA DE LOS ITEMS DEL CUESTIONRIO

4.1. Introducción 201
4.2. Modelo epistémico de referencia del ítem 1: Cubo truncado 202
4.2.1. Solución experta 202
4.2.2. Identificación de objetos y procesos 202
4.2.3. Relaciones ontosemióticas 203
4.3. Modelo epistémico de referencia del ítem 2: Simetrías en el plano 207
4.3.1. Solución experta 208
4.3.2. Identificación de objetos y procesos 208
4.3.3. Relaciones ontosemióticas 210
4.4. Modelo epistémico de referencia del ítem 3: Ortoedro encajable 214
4.4.1. Solución experta 214
4.4.2. Identificación de objetos y procesos 214
4.4.3. Relaciones ontosemióticas 216
4.5. Modelo epistémico de referencia del ítem 4: Desarrollo del cubo sin vértice 219
4.5.1. Solución experta 219
4.5.2. Identificación de objetos y procesos 220
4.5.3. Relaciones ontosemióticas 221
4.6. Modelo epistémico de referencia del ítem 5: Cubo perforado 225
4.6.1. Solución experta 226
4.6.2. Identificación de objetos y procesos 226
4.6.3. Relaciones ontosemióticas 227

4.7. Modelo epistémico de referencia del ítem 6: Componer formas con dos piezas iguales 231
4.7.1. Solución experta 231
4.7.2. Identificación de objetos y procesos 232
4.7.3. Relaciones ontosemióticas 233
4.8. Modelo epistémico de referencia del ítem 7: Generación de cuerpos mediante rotaciones en el espacio 237
4.8.1. Solución experta 237
4.8.2. Identificación de objetos y procesos 237
4.8.3. Relaciones ontosemióticas 239
4.9. Síntesis de los objetos geométricos puestos en juego en el cuestionario 243
CAPITULO 5: COMPETENCIAS INICIALES DE LOS ESTUDIANTES DE MAGISTERIO SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL
5.1. Introducción 249
5.2. Resultados globales 250
5.2.1. Análisis de varianza 253
5.3. Resultados por ítems y análisis de respuestas 257
5.3.1. Ítem 1: Cubo truncado 258
5.3.1.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 258
5.3.1.2. Configuraciones cognitivas asociadas 259
5.3.1.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 268
5.3.1.4. Análisis de errores 271
5.3.2. Ítem 2: Simetrías en el plano 274
5.3.2.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 274
5.3.2.2. Configuraciones cognitivas asociadas 274
5.3.2.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 285
5.3.2.4. Análisis de errores 287
5.3.3. Ítem 3: Ortoedro encajable 295
5.3.3.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 295
5.3.3.2. Configuraciones cognitivas asociadas 296
5.3.3.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 308
5.3.3.4. Análisis de errores 310

5.3.4. Ítem 4: Desarrollo del cubo sin vértice 314
5.3.4.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 314
5.3.4.2. Configuraciones cognitivas asociadas 314
5.3.4.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 328
5.3.4.4. Análisis de errores 330
5.3.5. Ítem 5: Cubo perforado 334
5.3.5.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 334
5.3.5.2. Configuraciones cognitivas asociadas 335
5.3.5.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 344
5.3.5.4. Análisis de errores 347
5.3.6. Ítem 6: Componer formas con dos piezas iguales 352
5.3.6.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 353
5.3.6.2. Configuraciones cognitivas asociadas 353
5.3.6.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 365
5.3.6.4. Análisis de errores 367
5.3.7. Ítem 7: Generación de cuerpos mediante rotaciones en el espacio 372
5.3.7.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas 373
5.3.7.2. Configuraciones cognitivas asociadas 373
5.3.7.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas 390
5.3.7.4. Análisis de errores 392

CAPITULO 6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

6.1. Introducción 407
6.2. Conclusiones sobre los objetivos 407
6.2.1. Objetivo específico 1: Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos puestos en juego en la resolución de tareas de VRE 407
6.2.2. Objetivo específico 2: Determinar los principales conflictos manifestados por los sujetos ante la resolución de las tareas seleccionadas de VRE 411
6.2.3. Objetivo específico 3: Conocer en qué medida es posible explicar los conflictos en la realización de tareas de VRE en términos de la complejidad ontosemiótica de dichas tareas 414
6.3. Conclusiones sobre las hipótesis 414

6.3.1. Hipótesis 1: El EOS permitirá operativizar nociones cognitivas y aportará explicaciones complementarias de los conflictos de los sujetos al resolver tareas de VRE 414
6.3.2. Hipótesis 2: Las configuraciones cognitivas de los estudiantes permitirán describir niveles de habilidad sobre VRE 423
6.3.3. Hipótesis 3: Las configuraciones cognitivas de alto nivel con relación a la habilidad VRE serán significativamente inferiores a las de bajo nivel 429
6.3.4. Hipótesis 4: La alta incidencia de las configuraciones cognitivas de bajo nivel se puede explicar en términos de la complejidad de los objetos y procesos 431
6.4. Aportaciones y limitaciones del trabajo 432
6.4.1. Aportaciones del trabajo 433
6.4.2. Limitaciones del trabajo 436
6.5. Algunas cuestiones abiertas 437

REFERENCIAS 439

ANEXO 1: CUESTIONARIO PILOTO 1
ANEXO 2: CUESTIONARIO PILOTO 2
ANEXO 3: CUESTIONARIO DEFINITIVO
ANEXO 4: TAREAS DE LAS INVESTIGACIONES (en CD)

INTRODUCCIÓN GENERAL

La visualización ha sido objeto de numerosas investigaciones en Educación Matemática, especialmente en el área de la geometría (Battista, 2007; Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006a). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos. Este tema también ha recibido atención desde el punto de vista del propio trabajo del matemático, en momentos de abordar la resolución de problemas, en la formulación de conjeturas y en otras áreas diferentes de la geometría (Guzmán, 1996).

En estas investigaciones se ha resaltado el papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático en general y, de manera especial, en el aprendizaje de la geometría, por lo que su evaluación y desarrollo debe ser un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos. Esta importancia se ve reflejada en los currículos oficiales de Educación Primaria de varios países (NCTM, 2000; MEC, 2006) y debería suponer además una presencia paralela en la formación de profesores. Sin embargo, el tratamiento de la visualización en la formación del profesorado de Primaria ha sido abordado en un menor número de investigaciones.

El objetivo principal de nuestra investigación se centra en la evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial (VRE) de futuros profesores de Educación Primaria. Con dicho fin ha sido necesario, en primer lugar, realizar un amplio "estado de la cuestión" que sirva de base para la selección de tareas adecuadas para construir un cuestionario, así como para interpretar los resultados, y relacionarlos con los correspondientes a otras investigaciones.

El enfoque de nuestro trabajo es de índole cognitivo, en el sentido de que pretendemos evaluar conocimientos, formas de razonar y habilidades de pensamiento de los estudiantes. Teniendo en cuenta la diversidad de planteamientos y de nociones cognitivas usadas en las investigaciones, así como la finalidad educativa de nuestro estudio, hemos optado por utilizar un marco teórico integrativo sobre el conocimiento y la instrucción matemática, como es el "enfoque ontosemiótico" (EOS) que Godino y colaboradores vienen desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Con nuestro trabajo nos proponemos no solo aplicar este marco teórico, sino contribuir también a su desarrollo en el campo de la evaluación de los aprendizajes geométricos. Aplicaremos las categorías de objetos matemáticos primarios que propone el EOS (objetos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos, situaciones-problemas), y las dualidades cognitivas (ostensivo – no ostensivo, particular – general, unitario – sistémico, expresión – contenido y personal – institucional) para elaborar una caracterización de la visualización espacial, la cual servirá de base para describir las habilidades de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y comprender los conflictos que manifiestan.

Hemos organizado la memoria en seis capítulos.

En el Capítulo 1 describimos el área problemática sobre visualización y razonamiento espacial en Educación Matemática y hacemos una síntesis de las investigaciones realizadas en dicho campo desde cuatro facetas: la epistemológica, la cognitiva, la instruccional y la ecológica.

En el Capítulo 2 presentamos el marco teórico, los objetivos específicos de la investigación formulados en términos de las nociones del enfoque ontosemiótico, las fases y metodología de investigación. Incluimos también una sección en la que interpretamos la problemática de la visualización desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico.

El Capítulo 3 contiene el estudio piloto realizado para la elaboración del cuestionario de evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial, objetivo principal del trabajo. Se describen, además, los componentes de la VRE puestos en juego en cada uno de los ítems que conforman el cuestionario definitivo y se enmarcan dentro de la tipología de tareas encontradas en las investigaciones.

En el Capítulo 4 realizamos un análisis a priori y sistemático de los objetos y procesos puestos en juego en cada uno de los ítems del cuestionario definitivo (análisis epistémico), lo cual servirá de base para interpretar las respuestas de los estudiantes a los cuales se aplicó el cuestionario.

El Capítulo 5 contiene los análisis cuantitativos y cualitativos de las respuestas dadas por los 400 estudiantes que respondieron al cuestionario. Dichos análisis han permitido evaluar las habilidades iniciales de los futuros profesores sobre visualización y razonamiento espacial en las tareas propuestas, información necesaria para el diseño de acciones formativas fundamentadas sobre este contenido curricular.

Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones sobre los objetivos e hipótesis formuladas y una síntesis de las aportaciones realizadas en nuestra investigación, así como las limitaciones del estudio y cuestiones abiertas.

CAPÍTULO 1:

ÁREA PROBLEMÁTICA. ANTECEDENTES

1.1. INTRODUCCIÓN

La posición relevante de la visualización como campo de investigación ha sido reconocida por los educadores matemáticos desde hace más de 100 años, interesándose en la representación figural y visual de las ideas matemáticas tanto desde el punto de vista del trabajo con los estudiantes como en el proceso de enseñanza de dichas ideas. Desde entonces se ha incrementado el uso de elementos visuales como parte de la enseñanza tradicional de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, poniendo más atención en el uso de dibujos, diagramas, ilustraciones y analizando el efecto que estos pueden tener en la comprensión y aprendizaje de conceptos matemáticos. También se han incorporado, como objetos de análisis, nuevos elementos y entornos de aprendizaje que provienen del mundo altamente tecnológico en el que vivimos.

En las dos últimas décadas se ha producido un resurgimiento de la investigación sobre la visualización (Arcavi, 2003; Battista, 1990, 2007; Bishop, 1983, Clements, 1983; Gutiérrez, 1991, 1996a; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Lean y Clements (1981); Presmeg, 1989, 1991, 2006a, 2008; Zimmerman y Cunningham, 1991) debido a dos razones principales. La primera de ellas tiene que ver con la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades a través de los ordenadores, lo que implica que estas máquinas se conviertan en una potente herramienta matemática y científica al inferir dinamismo a muchas de estas entidades que antes se presentaban por medio de tablas, fórmulas y símbolos. La visualización jugará un papel importante a la hora de comprender, analizar y predecir situaciones en este nuevo entorno. La otra razón tiene que ver con cambios en la concepción de la propia naturaleza de la matemática, según los cuales la matemática es entendida como una búsqueda de patrones y la visualización será una herramienta fundamental para reconocer esos patrones (Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p. 163).

La principal característica que le atribuye Arcavi (2003, p. 216) a la visualización es que “ofrece un método de ver lo invisible”, tanto entendiendo la visualización como nombre (el producto, la imagen visual) o bien como verbo (el proceso, la actividad). Cuando Arcavi (2003) habla de “ver lo invisible”, en su sentido más profundo y figurativo, se refiere a percibir un mundo abstracto que la tecnología (ni óptica ni electrónica) no puede ver por nosotros. Las matemáticas tratan con objetos y entidades bastante diferentes de los fenómenos físicos, y dependen en gran medida de la visualización en sus diferentes formas y diversos niveles, mucho más allá del cuerpo de la geometría y la visualización espacial.

1.2. CONEXIONES ENTRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

Gutiérrez (1998b), Usiskin (1987) y Yakimanskaya (1991) manifiestan que la mayor parte de los educadores matemáticos e investigadores coinciden en la importancia de la visualización porque mejora la visión global e intuitiva y la comprensión en muchas de las áreas de las matemáticas (geometría, cálculo, álgebra, estadística). En particular, dado que la geometría tiene un soporte muy fuerte en elementos visuales, esta ha sido una de las áreas en las que más se ha investigado esta relación, sobre todo su influencia en la comprensión y aprendizaje de conceptos geométricos (Duval, 1999; Gal y Linchevski, 2010; Hershkowitz,1990).

Para Clements y Battista (1992, p. 420) “El razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos por los cuales las representaciones mentales para los objetos espaciales, las relaciones y las transformaciones son construidas y manipuladas”.

Usiskin (1987) describe cuatro dimensiones de la geometría: a) visualización, dibujo y construcción de figuras, b) el estudio de los aspectos espaciales del mundo físico, c) su uso como vehículo para representar conceptos matemáticos no visuales y las relaciones entre ellos, d) representación de un sistema matemático formal. Según este autor las tres primeras requerirían el uso del razonamiento espacial.

Battista (2007, p. 843), considera que “el razonamiento espacial, como capacidad de “ver”, examinar y reflexionar sobre objetos, imágenes, relaciones y transformaciones espaciales, es la base de la mayor parte del pensamiento geométrico. Además, el razonamiento espacial incluye la transformación y actuación sobre las imágenes y la generación y el mantenimiento de éstas al servicio de otras operaciones mentales (Clements y Battista, 1992; Presmeg 1997; Wheatley, 1997). Todo ello hace que el razonamiento espacial ofrezca, por un lado, una base sólida para el razonamiento geométrico formal y, por el otro, herramientas cognitivas fundamentales para los análisis geométricos formales". Así mismo, el constructo *visualización* aparece en la mayoría de los estudios (Bishop, 1980, 1983; Clements, 1981, 1982; Clements y Battista, 1992) para referirse a las habilidades espaciales, independientemente de la conceptualización de habilidad espacial subyacente al estudio.

En general, los objetos de estudio en geometría están relacionados casi siempre con una entidad física o visual, de ahí que la relación entre geometría y visualización sea más complicada de lo que, a priori, parece. Por otra parte, debemos tener en cuenta que la actividad geométrica implica de manera conjunta habilidades visuales y no visuales, sobre todo en la resolución de tareas, lo que hace que sea necesario estudiar que tipo de estrategias son utilizadas y para que tipo de tareas son importantes dichas estrategias (Gorgorió, 1998, p. 209).

Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989, pp. 54-55) nos muestran que la visualización juega un papel importante en el razonamiento matemático, especialmente en lo que concierne al razonamiento deductivo/inductivo y al razonamiento proporcional. Cuando se trabaja con patrones numéricos sirve como un catalizador para la comprensión y desarrollo del razonamiento inductivo (por ejemplo, la representación gráfica de la suma de los *n* primeros números impares). Muchas de estas situaciones de búsqueda de patrones se hallan habitualmente representadas por configuraciones geométricas (por ejemplo, en los números poligonales). Los estudiantes necesitan visualizar esas configuraciones, generar y organizar datos, buscar patrones, formular conjeturas y después validarlas a través de un soporte argumentativo.

El trabajo de Hershkowitz (1989, p. 61) nos informa sobre algunas de las líneas de investigación que trabajan en esa dirección y que se han seguido manteniendo en la actualidad:

- La Teoría de van Hiele es el marco teórico dominante cuando se trabaja en didáctica de la geometría. La teoría e investigación desde la perspectiva de Van Hiele tiene fuertes implicaciones en la instrucción en geometría de cara a organizar unidades de enseñanza y para evaluar el progreso de los estudiantes (Clements y Battista, 1992, p. 433; Gutiérrez, 1998b, p. 3). Siguiendo esta teoría, la visualización aparece en primer plano en el primer nivel de razonamiento, imprescindible en la jerarquía del pensamiento geométrico. En el trabajo de Clements y Battista (1990, pp. 368-369) podemos ver un ejemplo de estudio acerca de la comprensión de ángulos y medida de ángulos a través de los niveles. En Battista (1994, p. 88) se hace un paralelismo de los dominios conceptuales con los niveles de van Hiele y en Battista (1998, 2001) se muestra cómo las unidades “Shape Makers” centran su atención en que los alumnos pasen de los niveles 0 y 1 a los niveles 2 y 3 de van Hiele. De Villiers (1994), Jones (2000) y Markopoulus y Potari (1996), lo utilizan para el análisis teórico de la clasificación jerárquica, Guillén (2000, 2004) lo aplica a la geometría de los sólidos. Gutiérrez (1992) aplica este modelo para comprender y organizar la adquisición de habilidades de visualización espacial en geometría tridimensional. Pallascio, Allaire y Mongeau (1993), en la secuencia de enseñanza que proponen para la generación de figuras tridimensionales, también establecen diferentes conexiones con esta teoría.

- Diversas investigaciones muestran que existen estrechas relaciones entre la habilidad espacial y el éxito geométrico (Arrieta, 2006; Bishop, 1983; De Guire, 1982). El papel de la visualización dentro de los logros conceptuales geométricos tiene una doble vertiente: por un lado, no es posible formar una imagen de un concepto y sus ejemplos sin visualizar sus elementos, y por otro lado, estos elementos visuales pueden limitar el concepto - imagen (Vinner, 1983).
- Implicaciones curriculares: Los educadores matemáticos involucrados en el currículum recomendaban, desde hace ya más de dos décadas, que se debería impartir un curso de intuición visual en geometría antes de empezar con el curso deductivo (Del Grande, 1987; Freudenthal, 1973; Schoenfeld, 1986; Usiskin, 1987). La educación visual es fundamental para una buena adaptación a esta nueva sociedad tecnológica y debe estar recogida desde propuestas curriculares (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Guillén, 2000; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, Laborde, 1993, 1998; Mariotti 1995, 2001, Parzysz, 1991; Stylianou, 2001).

1.3. NOCIONES TEÓRICAS Y ENFOQUES METODOLÓGICOS USADOS EN VRE

En esta sección trataremos de mostrar diversas nociones teóricas asociadas a la visualización y razonamiento espacial (VRE), así como los principales enfoques metodológicos en los que se cimientan. No existe un acuerdo general sobre la terminología usada en la visualización espacial y de ahí que este campo haya recibido diferentes nombres como “percepción espacial”, “imaginación espacial”, imaginería, razonamiento visual, “visión espacial” “visualización” o “pensamiento espacial”. En los siguientes párrafos se verá como, a través de la literatura específica, autores diferentes han desarrollado distintos significados para los mismos términos, o bien que atribuyen el mismo significado a términos distintos.

Para Hershkowitz (1990, p. 75), la visualización es aquello que “generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual”. Por su parte, Presmeg (1997, p. 304) considera la visualización como “el proceso implicado en la construcción y transformación de imágenes mentales”.

Lean y Clements (1981, pp. 267-268) definen *capacidad espacial* como la capacidad de formular imágenes mentales y manipularlas en la mente. Por *imaginería*, interpretan la ocurrencia de actividad mental que corresponde a la percepción de un objeto, pero cuando no se presenta el objeto al órgano sensorial y por *imaginería visual* se refieren a la imaginería que se produce como una imagen en "el ojo de la mente".

Otros autores como Guay, McDaniel y Angelo (1978), consideran que la verdadera esencia de la capacidad espacial es la formación y transformación de imágenes visuales consideradas como un todo.

Desde el punto de vista de Yakimanskaya (1991, p. 21), el “pensamiento espacial es una forma de actividad mental la cual hace posible crear imágenes mentales y manipularlas cuando se están resolviendo problemas prácticos y teóricos”, esto incluye operaciones verbales y conceptuales y varias situaciones perceptivas necesarias para la formación de imágenes mentales. Generalmente, en didáctica de las matemáticas, cuando el objeto de estudio es la geometría tridimensional, se emplean los términos *visualización* o *visualización espacial* (Gutiérrez, 1991, 1996a) para indicar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren “ver” o “imaginar” mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

Arcavi (2003) combina las definiciones dadas por Hershkowitz (1989) y Zimmermann y Cunningham (1991) para proponer la siguiente definición de visualización:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión (p. 217).

La definición de Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) nos presenta la visualización como el medio para viajar entre el contexto externo (las representaciones externas) y la mente:

> La visualización es un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo a lo que se accede a través de los sentidos. Tal conexión puede ser hecha en ambas direcciones. Un acto de visualización puede consistir en la construcción mental de objetos o procesos que un individuo asocia con objetos o eventos percibidos como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, sobre algunos medios externos como el papel, la pizarra o la pantalla del ordenador, de objetos o eventos que el individuo identifica con objetos o procesos en su mente (p. 441).

Según Nemirovsky y Noble (1997, p. 99), esta definición, aunque coherente con la literatura clásica, es más precisa que la mayoría de ellas, permitiendo que sea el individuo el que perciba esos objetos como externos o internos.

Duval (1999) da una definición centrada en la idea de proceso, refiriéndose a ella como uno de los tres procesos cognitivos que cubren las funciones epistemológicas específicas en geometría (visualización, construcción y razonamiento). Este autor distingue entre visión y visualización. La visión, desde el punto de vista psicológico, se refiere a la percepción visual y como tal consta de dos funciones. La función "epistemológica" consiste en dar acceso directo a cualquier objeto físico y en ese sentido la visión es opuesta a la representación ya que en términos de Peirce (1992), la representación es aquello que se pone en el lugar de algo. La segunda función la llama "función sinóptica", en este sentido, la visión consiste en aprehender simultáneamente varios objetos o una situación entera y, por lo tanto, tiene un significado opuesto a discurso, a deducción. Como consecuencia, la percepción visual proporciona un acceso directo al objeto y necesita exploración a través de movimientos físicos para obtener una aprehensión completa del objeto. Sin embargo, la visualización no muestra las cosas como en realidad son en un entorno tridimensional ni como pueden ser proyectadas en un soporte bidimensional, la visualización es una actividad cognitiva que se basa en la producción de una representación semiótica, no es ni mental ni física: "La visualización hace visible todo aquello que no es accesible a la visión por ello no debe ser reducida a esta" (Duval, 1999, p. 13). Por otra parte, algunas representaciones semióticas como los dibujos aspiran a ser representaciones icónicas (es decir, hay una relación de semejanza entre el objeto representado y la representación); sin embargo, la visualización no trabaja con ellas ya que no basta con ver, hay que comprender qué es lo que ahí se representa, captando directamente la configuración entera de relaciones y discriminando lo que es relevante o no (figuras geométricas, gráficos cartesianos, etc.).

Como se puede observar, en todas las concepciones de la visualización espacial descritas en los párrafos anteriores, el concepto de imagen juega un papel central. Así, se pueden distinguir cuatro elementos básicos en todas ellas que se analizarán detalladamente en las secciones siguientes:

- Las imágenes mentales.
- Las representaciones externas.
- Los procesos para manipular esas imágenes.
- Las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes.

1.3.1. IMÁGENES MENTALES

Desde el marco de la psicología cognitiva, algunos autores como Kosslyn (1980) hablan de "imagen mental" como una pseudo-ilustración creada en la mente desde la memoria, sin soporte físico. Otros psicólogos cognitivos, conducidos por Pylyshyn (1986), no están de acuerdo con este concepto mental de imagen pero, en cualquier caso, unos y otros están interesados sobre todo en la forma en que las imágenes mentales se crean y cómo son almacenadas en la mente de los individuos.

Según Gutiérrez (1996a, p. 6), los significados dados por Pylyshyn (1986) o Kosslyn (1980) para los términos visualización e imágenes mentales no son compartidos por la comunidad matemática ni por la mayor parte de los psicólogos educadores. Esto es debido a que el uso de dibujos, figuras, diagramas o representaciones en el ordenador es parte de la actividad diaria en clase de matemáticas y, además, muchas representaciones mentales que se usan en matemáticas están basadas en diagramas u otras formas visuales de representación de conceptos o incluso información textual o simbólica y no sólo gráfica.

Para Zimmermann y Cunningham (1991, p. 3), la visualización es el contexto donde tiene lugar la interacción entre las imágenes mentales y las representaciones externas. Los educadores matemáticos sostienen que estos dos elementos deben interactuar para lograr una mejor comprensión y resolver los problemas, aunque esta idea no es compartida por los psicólogos cognitivistas.

Para Yakimanskaya (1991, p. 21), "el pensamiento espacial es una forma de actividad mental que hace posible crear imágenes espaciales y manipularlas en el curso de la resolución de problemas prácticos y teóricos". Una *imagen espacial* se crea desde la cognición sensorial de las relaciones espaciales, y esto puede ser expresado con una variedad de formas verbales o gráficas, incluyendo diagramas, gráficos, dibujos, contornos, etc. lo que establece la relación entre imágenes mentales y representaciones externas. En ese sentido, las imágenes son las unidades básicas operativas del pensamiento espacial y como tales deben ser dinámicas, flexibles y operativas.

Siguiendo las teorías psicológicas dominantes, Lean y Clements (1981, pp. 267-268), basándose en la idea de que el concepto de imagen como representación en la mente es válida en educación matemática, definen *imágenes mentales* como la incidencia de la actividad mental correspondiente a la percepción de un objeto, siempre que el objeto no es presentado al órgano sensorial, e *imágenes visuales* como imágenes mentales que tienen lugar como una representación en la imaginación. Más tarde, Clements y Battista (1992, p. 446) definen las *imágenes* como "representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas". Según su particular visión describen la geometría escolar como

> El estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se

> construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales (p. 420).

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que deben ser entendidos como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con claridad por Fischbein (1993) con la introducción de la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales.

> Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (Fischbein, 1993, p. 143).

Como afirma Fischbein, en las teorías cognitivas actuales los conceptos y las imágenes interactúan para originar razonamiento productivo, pero se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

Desde la concepción de que las propiedades geométricas de una figura son impuestas o derivadas de las definiciones dentro de un cierto sistema axiomático, una figura geométrica tiene una naturaleza conceptual. Sin embargo, eso no significa que sea un mero concepto ya que posee una propiedad que no poseen los conceptos usuales, incluye una representación mental de propiedades espaciales. Así como un concepto no puede ser girado o ser movido, una imagen no posee la perfección, la generalización, la abstracción que se supone cuando se realizan las operaciones geométricas (Fischbein, 1993, p. 141).

Fischbein (1990, p. 149), considera el término *figura* para referirse a imágenes espaciales. Si usualmente una figura posee una cierta estructura o forma, las figuras geométricas corresponden a esa descripción pero hay que hacer ciertas observaciones: a) una figura geométrica es una imagen mental cuyas propiedades son controladas por una definición, b) un dibujo no es una figura geométrica por sí misma, sino un gráfico o una realización material de ella, c) la imagen mental de una figura geométrica es, normalmente, la representación de un modelo materializado de ella. Así, la figura geométrica es sólo la correspondiente idea de una entidad figural purificada, idealizada y abstracta, estrictamente determinada por su definición.

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos *imagen conceptual* (concept image) y *definición del concepto* (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual en relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p. 152). La definición del concepto, se refiere a la definición verbal que se tiene para una noción concreta, que no siempre recoge lo que sabe el individuo y que, además, no tiene que coincidir con la definición matemática.

Al igual que Yakimanskaya (1991) y Dreyfus (1995 p. 3), Presmeg (1986b, p. 42) incluye dentro del concepto de imagen visual todas aquellas imágenes que tienen un soporte gráfico diferente de una imagen en la mente, y así, define *imagen visual* como un esquema mental que representa información visual o espacial, con o sin requerir la presencia de un objeto o de otra representación externa. Según dicha autora, esta definición permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos se puedan disponer espacialmente, lo que amplía la mayoría de las definiciones dadas por Clements (1982) y Lean y Clements (1981).

Así pues, Presmeg (1986b, pp. 43-44) describe diversos tipos de imágenes mentales que encontró en los trabajos de sus estudiantes y que luego refuerza en Brown y Presmeg (1993):

1. Imágenes concretas pictóricas ("Concrete imagery"). Imágenes figurativas de objetos físicos. Este tipo de imágenes se pueden entender como "un dibujo en la mente", llegando a ser reproducciones con alto nivel de detalle aunque sin

movimiento. En las conceptualizaciones clásicas se consideraba el único tipo de imágenes mentales. Otros autores como Johnson (1987) y Piaget e Inhelder (1966) han usado los términos imágenes "estáticas" e "imágenes ricas" respectivamente para referirse a este tipo de imágenes. Según Brown y Wheatley (1990) este es el tipo de imaginería que menos influencia tiene en la comprensión relacional de las matemáticas.

2. Imágenes de fórmulas ("Memory images"). Se trata de la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas tal y como se las vería en un libro de texto, en un encerado, etc. Piaget e Inhelder (1966) las llaman imágenes "reproductivas".
3. Imágenes cinéticas ("Kinaesthetic imagery"). Las imágenes de este grupo son aquellas que involucran actividad muscular de cualquier tipo. Se refiere a imágenes en parte físicas y en parte mentales, al tener un papel importante el movimiento de manos, de cabeza, etc. son imágenes creadas, transformadas o comunicadas con la ayuda de movimientos físicos. Owens (1993) las denomina "imaginería en acción".
4. Imágenes dinámicas ("Dynamic imagery"). Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan, es decir, imágenes con movimiento en la mente. Implican la habilidad para transformar o desplazar una imagen visual concreta. Brown y Wheatley (1993) han identificado varios componentes individuales de este tipo de imaginería y, además, consideran que son esenciales para la comprensión matemática.
5. Imágenes de patrones ("Pattern imagery"). Son imágenes de esquemas visuales que corresponden a relaciones abstractas. La diferencia con el tipo de imágenes de fórmulas es que no se visualiza la relación propiamente dicha sino alguna representación gráfica de su significado. Es el tipo de imaginería más abstracta y, por tanto, es considerada como la más importante para la comprensión matemática. Este tipo de imaginería es denominado por Johnson (1987) como imagen-esquema ("image schemata"), diferenciando varias categorías dentro del mismo.

Una imagen puede pertenecer simultáneamente a dos grupos de los antes descritos: puede ser clasificada como cinética o dinámica independientemente de ser pictórica, patrón o de fórmula.

Dörfler (1991) propone cuatro tipos de imágenes-esquema que están basados en los escritos de Johnson (1987) y Lakoff (1987) y que según Presmeg (1992, p. 606; 2006a, p. 208) tienen cierto paralelismo con los cuatro tipos de imágenes que ella propone, además de la imaginería concreta. De esta manera, la imagen-esquema operativa se asocia con las imágenes cinéticas, la imagen-esquema relacional incluye las imágenes dinámicas, la imagen-esquema simbólica se liga a las imágenes de fórmulas y por último, la imagen.-esquema figurativa contiene algunos de los atributos de imágenes de patrones.

Para Piaget e Inhelder (1956, p. 18), es fundamental la distinción entre percepción y representación. La percepción es el conocimiento de los objetos desde un contacto directo con ellos, en cambio, la representación o imaginación implica la evocación de los objetos en su ausencia o cuando corre paralelo a la percepción en su presencia. Así, la representación mental de una figura, es decir, su imagen, es vista como una imitación interna de acciones.

Desde el punto de vista del modelo propuesto por Goldin (1998, p. 147), se consideran representaciones internas (o mentales) los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. Goldin incluye también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las configuraciones cognitivas internas pueden tener o no semejanza estructural con los sistemas externos, además, la relación simbólica se puede establecer con sistemas externos o entre sistemas internos.

Como tipos de representaciones cognitivas Goldin (2002, pp. 211-212) describe los siguientes:

- Verbales o sintácticas, que se refieren a capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los individuos, vocabulario matemático y no matemático, incluyendo el uso de la gramática y la sintaxis.
- Sistemas figurales (imagistic) y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales, visuales y esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación)

- Procesos estratégicos y heurísticos: "ensayo y error", "descomposición en fases", etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a las matemáticas que no sólo ocurren de manera global, sino también cambios puntuales (locales) de estado afectivo en el momento en que se están resolviendo problemas.

Siguiendo a Goldin (2002), las representaciones cognitivas internas se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

1.3.2. REPRESENTACIONES[1] EXTERNAS

Según Goldin, (1998, 2002), una *representación*, en el sentido más general, es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar). El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación (por ejemplo, el caso de un gráfico cartesiano, que puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica).

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, lenguajes de programación, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas de coordenadas cartesianos o polares, diagramas geométricos; incluso las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micromundos basados en el uso de ordenadores (Goldin, 1998, p. 147). Este autor señala que tradicionalmente las representaciones externas eran

[1] Según Kaput (1987) es bastante difícil dar una definición exacta para el término "representación" debido a que la mayoría de las definiciones incluyen la palabra "representa". El concepto de representación incluye varias componentes: una entidad representacional, la entidad que la representa, los particulares aspectos de la entidad representacional, los aspectos particulares de la entidad que la representa que forman la representación y, por último, la correspondencia entre las dos entidades.

estáticas pero ahora con la utilización de recursos informáticos esas representaciones externas se convierten en dinámicas y han de ser, por tanto, procesadas también internamente. Según este autor "es el nivel interno el que determina, en gran medida, la utilidad de tales sistemas de representaciones externas, de acuerdo a como el individuo las comprende e interactúa con ellas", Goldin (2002, p. 211).

Mesquita (1998, p. 183) usa el término *figura* como sinónimo de representación externa o icónica de un concepto o situación geométrica. Esta autora considera representación externa en el sentido de que se puede plasmar en papel u otro soporte. Por representación icónica o figurativa entiende que se centre en imágenes visuales en oposición a otros posibles sistemas semióticos. Las representaciones externas de cualquier concepto geométrico conllevan una ambigüedad que se traslada en lo que Mesquita (1992, 1998) llama el *doble status de los objetos geométricos* (particular o abstracto): todo lo que se apoya en objetos generales y abstractos sólo puede ser expresado por una configuración específica, que implica objetos concretos y particulares. Por lo tanto, la misma figura puede representar un objeto geométrico abstracto o bien una concreción particular del mismo. Este es uno de los obstáculos más primitivos encontrados en el aprendizaje de la geometría y del que, como consecuencia, surgirán otros errores. El doble status proviene del hecho de que en Geometría todo concepto, aún siendo distinto de sus representaciones externas, corre el riesgo de ser difícilmente disociable de las mismas. En este sentido, los expertos suelen ver las representaciones externas como una objetividad ideal y los estudiantes como algo concreto (finito). La idea de tipicidad (typicality) de una representación externa utilizada por Mesquita (1998, p. 187) (prototipos de Hershkowitz (1990) que se verá más adelante) se refiere, en el contexto geométrico, al hecho de que algunos individuos asocian más fácilmente a un problema dado algunas representaciones externas que otras, es decir, que algunos elementos de una determinada categoría son mejores ejemplos de la categoría que otros. La tipicidad está asociada a dos aspectos anteriores: por un lado al doble estatus, ya que resulta del hecho de que un individuo tiende a ver una objetividad ideal como una concreción y, por otro lado, a la heterogeneidad del espacio representativo (podemos ver que la representación de un triángulo con base horizontal es más típico que uno que no esté en esa situación). Así, llama figuras prototípicas a aquellas que tienen una organización regular del contorno, orientación y forma: preferentemente bordes cerrados, privilegian algunas direcciones, formas que tienden a ser regulares, simples y simétricas y las componentes de las figuras (lados, ángulos) con dimensiones aproximadas. Además la estabilidad y la estética pueden reforzar la percepción de esas figuras prototípicas.

Para un estudio de las representaciones externas es fundamental analizar tanto el papel como la naturaleza de tales representaciones (Mesquita, 1998, pp. 190-191). El papel de las representaciones externas depende del tipo de problema geométrico. Desde ese punto de vista, podemos hablar de que estas pueden tener una función descriptiva o bien heurística. En el primer caso, la representación externa ilustra las múltiples relaciones y propiedades implicadas en el problema, la figura es una traslación al registro figurativo del estamento verbal del problema. En el segundo caso, la propia representación externa actúa como soporte para la intuición, sugiriendo transformaciones que conducen a la solución. En cuanto a la naturaleza de las representaciones, estas pueden aparecer como objeto o como ilustración. Se dice que la representación externa tiene la naturaleza de objeto cuando las relaciones geométricas utilizadas en la construcción de una representación son reutilizadas. La naturaleza de la representación externa es de ilustración cuando aparece como un tipo de esquema topológico desde el cual no es posible extraer propiedades directamente. Los alumnos no comprenden de forma automática estas diferencias entre la naturaleza de las representaciones externas (objeto o ilustración) y ello puede llevar a obstáculos en la comprensión de las mismas.

Laborde (1996, p. 70) habla del *dominio de funcionamiento* para referirse al conjunto de propiedades geométricas representadas por ciertas propiedades espaciales del dibujo; y del *dominio de interpretación* para referirse a que todas las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como propiedades del objeto. Esto mismo lo caracterizan Vinner y Hershkowitz (1983, p. 22) cuando hablan de distractores de orientación y de configuración. La relación entre un objeto real y un dibujo no es una relación directa, sino que esta relación está incluida en una imagen mental. Además, Laborde (1996) considera que los dibujos de objetos geométricos forman con el tiempo modelos prototipo de objetos geométricos, como resultado de influencias perceptivas y culturales.

Desde el punto de vista del aprendizaje, Duval (1999, p. 15) considera que la complejidad de la visualización consiste en la selección implícita de que valores visuales son relevantes o no dentro de la configuración de unidades. Es decir, un estudiante puede tener éxito al construir una figura pero ser incapaz de ver la configuración global más allá de una representación icónica. Este autor establece la diferencia entre los gráficos y las figuras geométricas en términos de aprehensión local y aprehensión global. Esta diferencia está más marcada en las figuras geométricas porque cada una tiene varias configuraciones posibles y no siempre las características relevantes son las que se ven a primera vista.

Parzysz (1988, 1991) emplea el término *figura* para definir una creación de la imaginación, como una idea, y lo diferencia del término *dibujo*, que utiliza para referirse una ilustración. Este investigador dice que hay una pérdida de información cuando se hace un dibujo de un objeto geométrico y, de igual manera, cuando leemos un dibujo tendemos a considerar las propiedades del dibujo como propiedades del propio objeto geométrico, produciéndose un conflicto que él llama "Knowing vs Seeing". Distingue entre dos niveles de representación de una figura (el nivel 0 sería la propia figura) (Parzysz, 1988, p. 80):

- Nivel 1 (representación *cercana*), la representación se parece a la figura geométrica, tienen la misma dimensión y producen un movimiento de lo abstracto a lo concreto. En geometría 2D, la representación de una figura sería un dibujo y en geometría 3D sería un modelo.
- Nivel 2 (representación *distante*), corresponde a aquella en donde la dimensión de la representación es estrictamente inferior a la de la figura. En el caso de la Geometría 2D no tendríamos esta situación y para la geometría 3D la representación sería el dibujo del objeto.

El paso de un nivel a otro más alto produce una pérdida de información que, según este autor, se podría compensar añadiendo una descripción discursiva que caracterice el objeto geométrico para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo.

Por otra parte, el uso que se le da a las representaciones gráficas en la enseñanza del espacio geométrico, en la escuela secundaria, usualmente tiene únicamente la función de ilustrar las figuras (como muestran los libros de texto) sin un estatus matemático real. Esta visión sesgada del uso de las representaciones gráficas favorece la aparición de concepciones erróneas de conceptos geométricos (Parzysz, 1991, p. 578).

Según Battista (2007, p. 845) los ejemplos de objetos físicos, y en particular los diagramas, desempeñan dos papeles fundamentales en geometría: como datos para la conceptualización geométrica, pues es a través del análisis de dichos datos de donde se derivan los conceptos de las formas geométricas, y como representación de conceptos geométricos formales. Este último papel, que se corresponde con una visión representacional de los diagramas, es el que siguen la mayoría de los investigadores y que proviene de un enfoque tradicional de la enseñanza de la geometría. Yerushalmy y Chazan (1993, p. 25) se refieren a los diagramas como "modelos dispuestos para entenderse como la *representación* de una clase de objetos. Todos los diagramas poseen características que son individuales y no *representativas* de la clase". Estos mismos autores exponen que esta visión corresponde a un enfoque axiomático tradicional de la enseñanza de la geometría, donde los diagramas no se ven como objeto de estudio en sí mismos sino como apoyos para la intuición.

Diezmann y Lowrie (2009, p. 418) utilizan el término *gráficos* para referirse a las representaciones visuales. En matemáticas, la interpretación de los gráficos es una tarea rutinaria que se exige a los estudiantes tanto como la interpretación de texto y de símbolos. Sin embargo, esa interpretación, según la investigación llevada a cabo por estos autores, puede ser problemática para los estudiantes debido a tres razones. La primera es que la interpretación de los gráficos es compleja y requiere un conocimiento particular y habilidades específicas. Implica la interacción entre un sistema de símbolos visual (compuesto por elementos visuales que representan objetos o ideas y las relaciones espaciales entre los elementos dentro del gráfico) y un proceso cognitivo y perceptual. La segunda razón hace referencia a las dificultades propias de cada uno de los seis sistemas de símbolos visuales (*lenguajes gráficos*) que estos autores consideran. Por ejemplo, en ítems de la recta numérica (Axis Languages) una dificultad sería buscar la posición relativa de una marca para identificar el valor numérico a que hace referencia. Los estudiantes han de saber emplear el proceso cognitivo adecuado a cada lenguaje gráfico particular. Por último, la tercera razón es la poca orientación que existe para que los profesores apoyen la interpretación de los gráficos de los alumnos en matemáticas.

Por otra parte, la investigación llevada a cabo por Bills y Gray (1999, p. 120) sugiere que el conocimiento conceptual y procedimental de los alumnos se construye, en parte, desde las representaciones mentales que hacen de las representaciones externas de los profesores. Así, las imágenes que forman los niños deben ser analizadas dentro del contexto del aula y teniendo en cuenta la interacción profesor-alumno. La relación entre las imágenes de los alumnos y las representaciones de los profesores se muestra en este trabajo: la imagen que el alumno usa cuando piensa sobre una cuestión de matemáticas es una amalgama de información verbal y no verbal que se deriva directamente de la experiencia perceptual de las representaciones de los profesores.

En Clements y Battista (1990, p. 447) se pueden ver varios ejemplos que ponen de manifiesto las discrepancias entre las interpretaciones de un simple diagrama por parte de los profesores, alumnos e incluso los libros de texto.

1.3.3. PROCESOS

Según Bishop (1989, p. 177), las imágenes visuales, mentales o físicas, son aquellos objetos que se manipulan en la actividad de la visualización. Esa manipulación se realiza según dos tipos de procesos.

- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Esto incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales. Esta capacidad implica la comprensión de representaciones visuales y de vocabulario espacial usado en el trabajo geométrico, gráficos, tablas y diagramas de todos los tipos. Se trata de una capacidad de contenido y de contexto, y particularmente se refiere a la forma del estímulo material. Para Bishop (1983) esta capacidad es, probablemente, responsable de las relaciones entre espacio y geometría establecidas en la literatura.
- *El procesamiento visual* (VP) es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Se trata de una capacidad de proceso y no se refiere a la forma del estímulo del material presentado. Esto conecta con la teoría Piagetiana porque el aumento de las imágenes en el niño parece depender de la interiorización de la acción y no de la forma. Su naturaleza es privada y personal, siendo el proceso inverso del anterior.

Según Gorgorió (1998), el uso del constructo *capacidad del procesamiento espacial* en vez del constructo capacidad del procesamiento visual, clarifica la diferencia entre la habilidad para resolver alguna situación a través de una estrategia de procesamiento visual y la capacidad para hacer frente a una tarea espacial, aunque tenga raíces visuales, utilizando cualquier tipo de estrategia. La habilidad de procesamiento espacial se entiende como la habilidad necesaria para realizar las operaciones mentales combinadas que se requieren para resolver una tarea espacial. Lo que incluye, no sólo la habilidad para imaginar objetos espaciales, relaciones y transformaciones y descifrarlos visualmente, sino también la habilidad para codificarlos en términos verbales o mixtos. El procesamiento de la habilidad espacial incluye:

- Por lo menos tantas habilidades diferentes como transformaciones espaciales diferentes hay: rotaciones, secciones transversales, desarrollos, etc.
- La habilidad para interpretar información espacial, que incluye no sólo descripciones gráficas y modelización de datos espaciales y transformaciones y relaciones, sino también la verbal o mixta, y vocabulario específico usado en el trabajo geométrico.
- La habilidad para comunicar información espacial, que necesita producir descripciones de objetos espaciales, relaciones y transformaciones, siendo el contenido de aquellas descripciones, figural, verbal o mixto.

Yakimanskaya (1991, pp. 101-103) distingue dos niveles de actividad en pensamiento espacial, la creación de imágenes mentales y su manipulación o uso, como dos procesos similares a VP e IFI. A pesar de que estos dos procesos están íntimamente relacionados, la adquisición de la habilidad para crear imágenes, posiblemente debido a la acumulación de representaciones, no proporciona necesariamente la capacidad de poder manipularlas adecuadamente.

Por su parte, McGee (1979, pp. 896-897) describe dos tipos de capacidad espacial que también guardan una similitud dicotómica con VP e IFI:

- *Visualización espacial*, que recoge "la capacidad para manipular, rotar, retorcer o invertir mentalmente un objeto bi o tridimensional presentado gráficamente".
- *Orientación espacial*, que implica "la comprensión de la disposición de elementos dentro de un patrón de estímulo visual y la aptitud de no confundirse por el cambio de orientaciones en las que una configuración espacial puede ser presentada".

Si analizamos los cuatro procesos aplicables a la visualización y a las imágenes mentales que identifica Kosslyn (1980) tenemos los siguientes:

- Generando una imagen mental desde alguna información dada.
- Examinando una imagen mental para observar su posición o la presencia de partes o elementos.
- Transformando una imagen mental por rotación, translación, cambios de escala o descomposición.

- Usando una imagen mental para responder cuestiones.

El primer proceso que él define es equivalente al proceso VP, y los otros tres son parte del proceso más general IFI. Según Gutiérrez (1996a, p. 8) se puede observar que Kosslyn, Yakimanskaya y Bishop se refieren al mismo proceso de visualización, aún siendo el concepto de imagen mental de Kosslyn diferente al que utilizan la mayor parte de los educadores matemáticos y, su modelo, más detallado y completo que el de los otros dos.

En cuanto a la visualización y al procesamiento figural, Duval (1999, p. 18) distingue tres operaciones visuales para modificar una figura: *forma mereológica*, que consiste en dividir una figura dada en partes de diversas formas, combinando después esas formas pero siempre sin perder el marco inicial (por ejemplo, se puede dividir un cuadrado en cuatro rectángulos o en dos rectángulos y dos triángulos); la *forma óptica* consiste en hacer que las formas parezcan más largas, estrechas o inclinadas pero sin aplicarles ningún cambio (por ejemplo, se puede hacer que figuras bidimensionales parezcan tridimensionales al añadir ciertos elementos a la composición). La *forma de lugar* se refiere a cambio de orientación de las figuras en el plano. En resolución de problemas, aplicar alguna de estas operaciones puede ser fundamental para resolver la tarea. Estas tres operaciones constituyen lo que Duval llama *aprehensión operativa*, y la habilidad para pensar en dibujar algunas unidades más de la figura dada es uno de los signos de este tipo de aprehensión. Esta aprehensión es independiente de la aprehensión discursiva, pues de no ser así, las figuras no llevarían a cabo una función heurística sino sólo ilustrativa. Esto ocurre cuando se dota a las figuras de medidas de lados o segmentos que son cuestiones de la aprehensión discursiva, neutralizando así la aprehensión operativa, lo que puede llegar a ser un obstáculo tanto para el razonamiento como para la visualización (Duval, 1999, p. 21). Según este autor, la mayoría de las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes no tienen en cuenta este hecho, si no que son concebidas como si la aprehensión operativa, la perceptual y la discursiva no se pudieran separar.

Piaget e Inhelder (1956) hacen distinciones entre el pensamiento *perceptual* que está relacionado con acciones sensorio motoras y el pensamiento *representacional*, necesario para la manipulación interna de las imágenes. Estos autores también distinguen entre pensamiento *figurativo* y *operativo*. El pensamiento *figurativo* concierne a modelos estáticos e imágenes, mientras que el pensamiento *operativo* trata con modelos de movimiento de objetos o de manipulación de imágenes visuales.

1.3.4. HABILIDADES

En relación a las habilidades, fue a partir de los años cuarenta y cincuenta cuando los educadores matemáticos comenzaron a interesarse en ese campo y empezaron a preocuparse de las relaciones entre el espacio y las habilidades matemáticas. Como describe Bishop (1983, p. 181), algunos investigadores como Murray (1949), Wrigley (1958) y Barakat (1951) observaron que los test de habilidades espaciales tenían una correlación más alta con las habilidades en geometría que en álgebra y MacFarlane Smith (1964) expuso que las habilidades espaciales eran esenciales para las habilidades matemáticas.

Los test espaciales casi siempre utilizan estímulos figurativos y el uso de estos posee sus propias convenciones y vocabulario visual para expresarse, lo cual es una fuente potencial de problemas para algunos estudiantes. Además, el tiempo programado para la resolución de dichos test no permite mostrar como los sujetos alcanzan su respuesta, lo que motiva el planteamiento de cuestiones relativas a qué es lo que están midiendo esos test de habilidad espacial (Bishop, 1983). En ese sentido, Clements, (1981) afirma que será muy difícil tener una "verdadera" definición de *capacidad espacial*, mientras los problemas de definición y de lo que constituye una prueba espacial sigan siendo objeto de debate, por lo que se deben buscar definiciones y descripciones de habilidades y procesos que ayuden a resolver los problemas desde una óptica particular.

Varios investigadores sugieren que el factor determinante más importante en la visualización espacial es el mantenimiento y manipulación de alta calidad de la imagen del estímulo. Otros investigadores sostienen que el rendimiento en tareas espaciales se entiende mejor en términos de razonamiento y resolución de problemas que en términos de imágenes. Según Clements y Battista (1992, p. 443) muchos analistas están de acuerdo con el hecho de que las personas que tienen bien desarrolladas las habilidades espaciales deberían ser capaces de imaginar disposiciones espaciales de objetos desde diferentes puntos de vista y manipular imágenes visuales.

Si se analiza la capacidad espacial desde el punto de vista de las diferencias individuales, Kutetskii (1976) identifica una distinción importante entre el tipo *analítico* de persona y el tipo *geométrico* (esta distinción también ha sido identificada por Lean y Clements, 1981). El primero muestra

> Una obvia predominancia de un desarrollo muy bueno del componente lógico-verbal sobre un débil del componente pictórico visual. Operan fácilmente con

> esquemas abstractos, no necesitan un soporte visual para visualizar objetos o modelos en la resolución de problemas, incluso cuando las relaciones matemáticas dadas en el problema sugieren conceptos visuales (p. 317).

El segundo manifiesta un pensamiento que

> Se caracteriza por un muy buen desarrollo de la componente pictórica-visual… estos sujetos sienten la necesidad de expresar visualmente una relación matemática abstracta y demuestran un gran ingenio en este aspecto; en este sentido, relativamente hablando, en estos sujetos la figuración a menudo sustituye a la lógica (p. 321).

Parte de las dificultades encontradas en relación a este tema provienen, de nuevo, de definiciones insuficientes relativas a habilidades espaciales y de la falta de orientación para evaluarlas.

Desde el punto de vista de Kosslyn (1983) y Poltrock y Brown (1984), la imaginería parece estar compuesta de componentes independientes, algunos de los cuales presentan una relación directa con la comprensión matemática. Entre esas componentes están las llamadas habilidad de descomponer/recombinar y la habilidad de transformar imágenes. Cada una de ellas depende de la imagen que ha sido construida, y es esa imagen sobre la que actúan la que determina la naturaleza de dichas componentes. Brown y Wheatley (1997, p. 47), pese a que en un principio pensaron que ambas formaban una única componente de la imaginería (Presmeg, 1985, 1986a, 1986b) al existir numerosos ejemplos en los que se usan juntas, observaron en su investigación que en realidad se trataba de dos componentes independientes, por lo que su contribución a la comprensión matemática seguramente se hiciera de forma diferente. Brown y Wheatley (1997) describen la habilidad de descomposición/recombinación de la siguiente forma: "habilidad de descomponer una imagen visual es la habilidad para romper esa imagen en partes simples y entonces recombinar aquellas partes en una nueva imagen que es más útil para la solución de un problema, pero manteniendo una equivalencia fundamental" (p. 47); mientras que por habilidad de transformación entienden las transformaciones geométricas básicas (giro, traslación, simetría, homotecia).

Lean y Clements (1981) ofrecen una definición bastante general de "habilidad espacial" como la habilidad para formular imágenes mentales y manipularlas en la mente. Desde el punto de vista psicológico, la lista de habilidades necesarias para procesar imágenes mentales puede ser muy larga.

McGee (1979, p. 891), por ejemplo, reúne resultados de investigaciones previas de habilidades espaciales y, en base a ellas, describe 10 habilidades diferentes, distribuidas en dos grupos que provienen de la distinción que este autor hace entre visualización y orientación espacial:

- Habilidades de visualización espacial: 1) habilidad para imaginar la rotación de un objeto, la representación de un objeto, el desarrollo de un sólido, y de cambios relativos de posición de objetos en el espacio; 2) habilidad para visualizar una configuración en la cual hay un movimiento entre sus partes; 3) habilidad para comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones, y para manipular objetos en la imaginación; 4) habilidad para manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otra disposición.
- Habilidades de orientación espacial: 1) habilidad para determinar relaciones entre diferentes objetos espaciales; 2) habilidad para reconocer la identidad de un objeto cuando es visto desde diferentes ángulos o cuando el objeto se mueve; 3) habilidad para considerar relaciones espaciales donde la orientación del observador es esencial; 4) habilidad para percibir patrones espaciales y para compararlos entre ellos; 5) capacidad para permanecer sin confusiones por las diversas orientaciones en las que un objeto espacial puede ser presentado; 6) habilidad para percibir patrones espaciales o mantener la orientación respecto de los objetos en el espacio.

Por otra parte, Hoffer (1977) identifica varias capacidades físico-psicológicas relevantes para el aprendizaje de las matemáticas: coordinación ocular, percepción de una figura dentro de un trasfondo, constancia perceptual, percepción de posiciones en el espacio, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Del Grande (1987, p. 127) las describe como sigue:

- Coordinación motriz de los ojos. Es la habilidad de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. Sólo si hay esa coordinación el niño puede ser capaz de poner atención al acto de aprender. En otro caso, el esfuerzo para realizar la acción es suficiente para absorber toda la atención del niño.
- Identificación visual. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza cuando la figura está formada por varias partes o cuando hay varias figuras superpuestas.

- Constancia perceptual. Es la habilidad para reconocer que algunas propiedades de un objeto (real o una imagen mental) son independientes del tamaño, color, textura o posición y a reconocer que un objeto o imagen mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque se haya girado u ocultado.
- Percepción de posiciones espaciales (Reconocimiento de las posiciones en el espacio). Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto o imagen mental con uno mismo o con otro objeto, que actúa de punto de referencia.
- Percepción de relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos, dibujos, imágenes mentales entre ellos o dentro de uno mismo. Por ejemplo, identificar que están girados, son perpendiculares, simétricos. Está estrechamente relacionada con la percepción anterior en muchas tareas.
- Discriminación visual. Es la habilidad para comparar varios objetos, dibujos, imágenes e identificar similitudes o diferencia entre ellos.
- Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.
- Rotación mental. Es la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración en movimiento.

Otras habilidades resultan de la combinación de varias de las anteriores. Por ejemplo, la habilidad de “conservación de las relaciones espaciales” sería una combinación de las habilidades de reconocimiento de las posiciones espaciales y de conservación de la percepción de relaciones espaciales, puesto que permite reconocer que las posiciones relativas de varios objetos no varían cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación).

Según Del Grande (1987, p. 129), las habilidades de percepción son importantes para tener éxito en la escuela; pero, además, tienen una fuerte influencia en la estabilidad general del niño, siendo esenciales para escribir, deletrear, leer, hacer aritmética, geometría, pintar, hacer deporte, leer música, etc.

En estas listas podemos observar algunas capacidades que hacen referencia a habilidades generales y otras que son más específicas para su utilización en contextos matemáticos, en particular para el campo de la geometría.

1.4. LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los psicólogos se han interesado por la importancia de la visualización desde hace mucho tiempo y han desarrollado teorías detalladas para fundamentar su trabajo, instrumentos para la observación y test individuales. Este campo de la visualización espacial también ha interesado a diversos grupos de investigadores de distintas áreas de conocimiento (matemáticas, educación matemática, medicina, economía, arte, química, ingeniería) pese a que cada uno de ellos se ha centrado en habilidades y entornos relacionados estrictamente con sus problemas de investigación. Se pueden citar cuatro grandes documentos que revisan los trabajos, investigaciones y literatura relacionada con la visualización en educación matemática: Battista (2007), Bishop (1989), Gutiérrez (1996a) y Presmeg (2006a, 2008).

Bishop (1989) hace una revisión de la investigación sobre visualización en educación matemática e incorpora algunas anteriores hechas por él mismo (Bishop, 1980, 1983, 1986), o por otros como Clements (1982) y Presmeg (1986b). Hasta 1988 la visualización no había sido un área de investigación significativa en la educación matemática, como lo demostraba la baja cantidad de artículos centrados en ese tema e incluso los pocos trabajos que podrían estar relacionados con él.

Los primeros estudios sobre visualización y capacidad espacial en el campo de la educación matemática fueron aportados por Bishop (1973), Clements (1982), Krutetskii (1976), Lean y Clements (1981), Moses (1977), Presmeg (1985) y Suwarsono (1982). En la década de los 80 el constructivismo va ganando terreno al conductismo y la investigación cualitativa empieza a considerarse un método adecuado para hacer frente a determinadas cuestiones en la educación matemática. De este modo, la investigación cualitativa se convierte en un vehículo apropiado para analizar los procesos de pensamiento asociados al uso de imágenes mentales y el papel del pensamiento visual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Presmeg (2006a) hace un recorrido por todas las actas del grupo PME desde 1988 hasta la actualidad, analizando y describiendo los trabajos, informes y artículos que tratan el tópico de la visualización o están relacionados con él. Como se refleja en las actas del PME-12, en 1988, se inicia la renovación pero no fue hasta 1991, en el PME-15, cuando la visualización se presentó como una categoría independiente en la lista de tópicos en las actas (*Imagery and Visualization*). Dreyfus (1991) proporcionó numerosos ejemplos que mostraban el poder de la visualización en el razonamiento matemático; aunque existían ciertas dificultades asociadas al uso de ese razonamiento visual por parte de los estudiantes. Este autor afirmaba que, pese a que era probable que los estudiantes generaran imágenes visuales, no era tan seguro que las utilizaran para el razonamiento analítico, ya que operar holísticamente crea más carga cognitiva que los modos secuenciales de razonamiento. La investigación de Presmeg (1985) no confirmaba esa afirmación y se apoyaba en la evidencia empírica para sugerir que modificando ciertos aspectos de la instrucción sería posible fomentar en los estudiantes el uso de la visualización y conseguir un uso óptimo de la fuerza de los procedimientos visuales. A excepción del trabajo de Presmeg (1991), los demás informes de investigación tenían un claro matiz psicológico en el PME-15 y así continuaron hasta 1994. A partir de ese año la atención de la visualización se concentró esencialmente en aspectos del desarrollo curricular. En 1996, la conferencia plenaria del PME estaba directamente relacionada con la visualización (Gutiérrez, 1996a) y muchos trabajos de los que se presentaron fuera de la categoría específica para la visualización estaban relacionados con ella. A partir de este momento, la investigación en esta área tendría peso y vida propia.

En 1998 (PME-22) los centros de interés en visualización matemática se diversifican, abarcando áreas como geometría, representación, ordenadores, resolución de problemas, medida, pensamiento espacial, funciones, probabilidad, números complejos, etc. De este modo se subraya la visualización como una poderosa herramienta no sólo para los tópicos visuales matemáticos como la geometría sino también para el álgebra (Parzysz, 1999; Yerushalmy, Shternberg y Gilead, 1999).

Examinando los artículos de investigación y libros publicados en los últimos 10 años relacionados con la visualización en educación matemática, se verá que tocan casi todos los tópicos matemáticos: fracciones, decimales, funciones, trigonometría, geometría plana y espacial, pre-álgebra, sistemas numéricos, estadística, notaciones y representaciones, resolución de problemas, etc. Sin embargo, en esas revisiones se observa que no existe un número importante de trabajos sobre geometría plana (Matsou, 2000; Mitchelmore, 1986, 1992; Orton, 1997; Owens, 1992; White y Mitchelmore, 2003) y sobre geometría espacial (Cohen, 2003; Lawrie, Pegg y Gutiérrez, 2000; Owens, Reddacliff, y McPhail, 2003; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009; Stylianou, Leikin, y Silver, 1999). Esto puede ser debido a que la visualización siempre ha sido considerada como una componente necesaria para el aprendizaje y enseñanza de la geometría y sólo recientemente ha adquirido el mismo reconocimiento que otras partes de las matemáticas. Este reconocimiento ha sido impulsado, probablemente, por la revolución tecnológica (ordenadores, herramientas multimedia, etc.) que proporciona a los investigadores nuevos elementos para la enseñanza de la geometría espacial.

Tal y como indica Presmeg (2006a, p. 233) un tema que no ha sido tratado en profundidad hasta ahora es la manera en que la visualización interactúa con la didáctica de las matemáticas. De hecho, los pocos trabajos que hay sobre ello son el de la citada Presmeg (1991) y el de Woolner (2004).

En el PME-29, en 2005, se consolida una tendencia que relaciona los gestos con la construcción del significado matemático, en particular, la conexión entre los gestos y la imaginería visual, de manera que el uso de gestos por parte de profesores y estudiantes se considera como uno de los indicadores más seguros de la presencia de pensamiento visual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (ya observado por Presmeg en 1985).

El interés por las teorías semióticas y, con ello, la necesidad de teorías generales que unifiquen el cuerpo de la visualización en educación matemática se hizo cada vez más evidente (Presmeg, 2006a, p. 233). Goldin (1992) esbozó un modelo unificado para la psicología del aprendizaje de las matemáticas en el que incluía atributos cognitivos y afectivos de la visualización como componentes esenciales en sistemas de representación en procesos de resolución de problemas. Por su parte Gutiérrez (1996a) incide sobre la necesidad de un marco para la visualización en el aprendizaje de la geometría tridimensional. Marcou y Gagatsis (2003) desarrollan una primera aproximación a la taxonomía de las inscripciones matemáticas basada en la distinción entre lo externo y lo interno, polísémico y monosémico, descripciones y representaciones tal como se utilizan en la resolución de problemas matemáticos.

Kadunz y Strässer (2004) también sugieren esa necesidad de un mayor desarrollo de la teoría relacionada con la visualización y consideran que este desarrollo debería contemplar conexiones con la semiótica en relación a gestos y otros signos. Estos autores (p. 241) argumentan que el aprendizaje de las matemáticas puede ser descrito mediante un juego continuo de diagramas e imágenes, en los que estas dos formas de signos se complementan entre sí. La parte heurística del aprendizaje viene dada por las imágenes y la parte algorítmica reposa en los diagramas, siendo las metáforas el puente, el enlace entre ellos. Según su particular punto de vista, describen la visualización como la vinculación de imágenes y diagramas mediante las metáforas.

En la búsqueda de un marco teórico para la visualización en educación matemática, Presmeg (2008) afirma que las teorías anteriores han resultado útiles como lentes para interpretar los resultados de investigaciones empíricas y propone ampliar la taxonomía sugerida por Marcou y Gagatsis (2003) en términos de la semiótica triádica de Peirce (1998) y aspectos relacionados de la teoría lingüística que incluye metáfora y metonimia. Según esta autora, la base teórica descrita anteriormente puede proporcionar un punto de inicio para interpretar fenómenos de visualización matemática en muchas áreas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a muchos niveles; pero aún falta que esta teoría siga evolucionando y que pueda nutrirse de futuras investigaciones empíricas (Presmeg, 2008, pp. 9-10).

La revisión de la bibliografía en este campo de estudio se hará a través de cuatro facetas descritas en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) que permitirán una visión del estado de la cuestión desde una perspectiva diferente a la habitual, analizando las facetas epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional y, por último, la ecológica, implicadas todas ellas en el estudio de contenidos matemáticos.

1.4.1. FACETA EPISTÉMICA

El trabajo de Dreyfus (1991) se centra, sobre todo, en el estatus concedido a la visualización en la educación matemática, es decir, en su componente epistemológico. Para analizar dicho componente nos vamos a centrar en dos aspectos fundamentales, uno de ellos se sitúa en la argumentación y demostración y el otro se deriva de la ambigüedad de la palabra representación.

Según este trabajo (Dreyfus, 1991), una evidencia del estatus otorgado a la argumentación visual es la clasificación establecida por los educadores matemáticos para las demostraciones. Así, Blum y Kirsch (1991, p. 187) clasifican las demostraciones que tienen contenido formal como demostraciones *pre-formales*, al estar desarrolladas por medio de una cadena válida de conclusiones aunque no presentadas formalmente. El mensaje subyacente en esta clasificación es que la visualización es una herramienta muy útil y eficiente para el aprendizaje de tópicos en la secundaria y en la universidad; pero no deja de ser una ayuda, incluso en aquellas ocasiones en las que resulte fundamental no deja de ser un paso hacia la matemática pura (Dreyfus, 1991, p. 34). Si esta es la situación que un educador matemático transmite, estará eliminando la versatilidad de una herramienta de razonamiento que puede prevenir algunas de las debilidades de la resolución de problemas. Así, la investigación llevada a cabo por Bondesan y Ferrari (1991) muestra que los estudiantes que no son muy buenos resolutores de problemas en configuraciones geométricas son capaces de inventar y adaptar nuevas estrategias, mientras que en situaciones algebraicas no ocurre lo mismo. Presmeg (1986b) encontró que a los niños no les resulta difícil generar imágenes visuales del tipo concreto pictórico; sin embargo, casi no producen patrones de imágenes e imágenes dinámicas, siendo estas dos últimas las más adecuadas para ser conectadas con el riguroso proceso de pensamiento analítico. Esta afirmación quiere decir que aunque generen imágenes visuales no es probable que las usen para el razonamiento analítico.

Los propios matemáticos son responsables del bajo estatus otorgado al razonamiento visual (Dreyfus, 1991, p. 36). La mayoría de ellos confían fuertemente en este tipo de razonamiento en su trabajo, demostraciones y argumentación; sin embargo, en general, son reacios a mostrar la forma en que alcanzan sus resultados y presentan el proceso sin incluir algunos pasos intermedios de la argumentación o, en algún caso, sólo el resultado final. Así, si en las conferencias emplean diagramas, indican que su función se limita a ilustrar algún argumento y resaltan que la demostración se presentará utilizando un riguroso formalismo algebraico. Coincidiendo con esta línea de argumentación, Hadamard (1945, p. 82) señala que la mayoría de los matemáticos cuando piensan, evitan el uso de palabras y símbolos algebraicos, utilizando imágenes vagas que son generalmente de naturaleza geométrica.

Dreyfus (1991) expone algunas razones que pueden llevar a que los matemáticos oculten sus visualizaciones. Una de ellas es la posibilidad de que sus imágenes sean tan nítidas que resulte difícil describirlas. Otra de las razones se puede deber a que los estándares para la publicación de trabajos durante los siglos XIX y XX se basaban en un pensamiento lógico y formalista, lo que implicaba cierta hostilidad hacia las argumentaciones visuales. Hacia finales del siglo XX parece que los matemáticos redescubren el poder del razonamiento visual, llegando incluso a sugerir la existencia de demostraciones y teoremas puramente visuales y haciendo hincapié en que el excesivo énfasis en aspectos analíticos y abstractos del pensamiento podría traer consecuencias graves para la profesión (Davis y Anderson, 1979; Rival, 1987). Una vez que se admiten este tipo de argumentaciones visuales, la cuestión que preocupa a los matemáticos se centra en quién juzga la validez de un argumento visual.

Juzgar argumentos no visuales no debería ser más fácil que juzgar los visuales, sobre todo si se tiene en cuenta que la validez de un argumento es juzgada por un experto en la materia, de manera que no habría ninguna razón a priori para no aceptar una argumentación basada en diagramas o en elementos visuales (Dreyfus, 1991, pp. 38-39). El tercero y último aspecto se refiere a la necesidad de desarrollar criterios que permitan una mejor resolución de los argumentos visuales.

Barwise y Etchemendy (1991) señalan que la experiencia para validar un razonamiento lingüístico está basada en una tradición muy cuidada y duradera y que carecen de experiencia para evaluar razonamientos visuales. Por ello estos autores, como Dreyfus (1991), abogan por preparar programas heterogéneos que proporcionen igual legitimidad al razonamiento visual que al algebraico y permitan aprovechar el potencial que ofrecen los ordenadores para impulsar un razonamiento visual y dinámico.

A pesar de que los estudios cognitivos corroboran que los expertos hacen un uso amplio del razonamiento visual en su proceso creativo y de que los educadores matemáticos parecen reconocer el potencial de ese tipo de razonamiento, su implementación en el campo educacional está siendo lenta. Esto se debe a varios factores (Dreyfus, 1991, pp. 42-43): el primero de ellos es la tendencia de los estudiantes a evitar el razonamiento visual, el segundo se debe a que, aunque el razonamiento visual esté contemplado en los currículos, los profesores lo presentan como un argumento auxiliar, como un accesorio o le dan un carácter introductorio, sin asignarle el valor y el estatus que debería tener. Como consecuencia, esas creencias son transmitidas a sus alumnos que asumen que no se trata de un tipo de argumento básico en su formación. La tercera razón de que el cambio educacional sea lento se debe a las propias dificultades del razonamiento visual ya que este necesita de un duro y reflexivo trabajo. En muchas ocasiones un trabajo irreflexivo, descuidado y demasiado rápido de las representaciones visuales motivan un fracaso en el uso de tal razonamiento. Existe gran variedad de presentaciones visuales utilizadas en matemáticas (árboles, figuras geométricas, diagramas, recta numérica, planos cartesianos, etc.) encontrándose diferencias considerables entre los distintos tipos: unas son dinámicas, otras estáticas, otras implican la idea de dinamismo, las hay pictóricas y la mayoría representan objetos matemáticos bajo una consideración simbólica, incluso algún objeto matemático puede tener diferentes formas en distintas visualizaciones (una función puede ser representada en un gráfico cartesiano o puede hacerlo por medio de valores de algunos parámetros en un espacio parametrizado). Sin embargo, todas ellas tienen algunas características comunes como el que las entidades figurales representan elementos de una estructura conceptual y que las relaciones espaciales se utilizan para expresar relaciones entre estos elementos.

Otra cuestión epistemológica que adquiere un papel importante en el campo de la visualización es la noción de *representación*. Según Vergnaud (1987, p. 227), la representación es un elemento crucial para una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no sólo por la gran importancia del uso de sistemas simbólicos en matemáticas, sino por dos razones epistemológicas de peso: la primera se deriva del importante papel que juegan las matemáticas como conceptualización del mundo real, y la segunda se debe al amplio uso que las matemáticas hacen de los homomorfismos, en los que la reducción de estructuras de una a otra es esencial.

La noción abstracta de representación implica una relación entre dos o más configuraciones, en la cual una representa a la otra en un sentido que se determine (Goldin, 2002, p. 207). En el contexto de la psicología del aprendizaje matemático y de la resolución de problemas, es preciso considerar por un lado las configuraciones internas del individuo (configuraciones verbales y sintácticas, visual imaginería, reglas y algoritmos, esquemas, heurísticos, etc.) y por otro las configuraciones externas, generalmente observables a través del entorno (objetos de la vida real, gráficos, figuras geométricas, palabras escritas y habladas, etc.). Además, debemos considerar las posibles relaciones que representan o pueden representar.

El rechazo de la corriente conductista a las configuraciones internas y por su parte, el rechazo de los constructivistas radicales a las configuraciones externas motiva que esta definición de representación no sea aceptada por ninguno de estos dos grupos. Estas visiones se ven reflejadas en dos puntos de vista en la educación matemática: el primero de ellos de ellos, el punto de vista tradicional, tiende a centrarse en las producciones de los estudiantes, su rendimiento matemático, sus logros matemáticos, rechazando o no enfatizando los aspectos relacionados con lo interno. Por su parte, el otro punto de vista se centra en procesos cognitivos y cualitativos de la comprensión matemática, sin acentuar lo externo. Estos dos puntos de vista se sustentan bajo un desequilibrio que provoca que la noción de representación como una interacción descriptiva de lo externo y lo interno no sea aceptada. Sin embargo, según Goldin (2007), la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El interés primario del proceso de instrucción se centra en la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden sustentar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación. Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Presmeg (2006a, p. 206), siguiendo a Piaget e Inhelder (1971), afirma que la imaginería visual (representación interna) es subyacente a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama, por lo que no tiene sentido la separación entre representación interna y representación externa. Esta autora prefiere utilizar los términos *imaginería* e *inscripciones* (Roth, 2004) puesto que capturan de una manera muy concisa los aspectos visuales de esos dos tipos de representaciones. De esta manera, se consideran ambas, la imaginería visual y las inscripciones, *signos vehículos* (Peirce, 1998) al ser instancias de la visualización en matemáticas, en la medida que representan la estructura de un objeto matemático. Para Presmeg (2006b, p. 21) un signo es "la relación interpretada de algún significante, llamado signo vehículo, y un objeto al que representa o se pone en lugar de él". En matemáticas, al trabajar con objetos que no pueden ser aprendidos directamente por los sentidos (punto, línea, etc.), es necesario aprender a "ver" estos objetos y a comunicarnos con otros a través de sus signos vehículos. Debido a que la naturaleza de los objetos matemáticos es más general que su particular signo vehículo, puede ocurrir que más de un signo vehículo se pueda referir a un objeto particular.

Nemirosvsky y Noble (1997, p. 102) consideran que "el constructo dentro *versus* fuera de la mente es limitado debido a que no permite la posibilidad de no ser ni dentro ni fuera, o ser dentro y fuera al mismo tiempo". El punto de vista de significado matemático de Cobb, Yackel y Wood (1992) evita describir qué es lo que está dentro o fuera de la mente de los estudiantes, ya que las matemáticas escolares no existen en ningún lugar salvo en la actividad colectiva entre el profesor y los estudiantes, y que las herramientas y los materiales que los estudiantes usan adquieren significado sólo a través de la actividad de estos con dichas herramientas. Esta actividad colectiva debe implicar una actividad constructiva individual y consideran los dispositivos externos como herramientas para la negociación de significado más que dispositivos para el transporte de significado.

Duval (1999, pp. 4-5) señala que la distinción entre representaciones internas y externas se realiza atendiendo al modo de producción y no a su forma o naturaleza y que, en ese sentido, los signos no son ni una cosa ni la otra. Por ese motivo, este autor sostiene que la distinción debería hacerse entre un tipo de representaciones cognitivas que son producidas de forma intencional por un sistema semiótico (mental o externo), llamadas representaciones semióticas, y aquellas representaciones cognitivas que son producidas de forma casual o automática por un dispositivo físico (fotografías, reflexiones) o por un sistema orgánico (sueños, memoria visual de imágenes), que reciben el nombre de representaciones físicas/orgánicas. El progreso en matemáticas ha estado ligado históricamente al desarrollo de los sistemas semióticos, de manera que cada nuevo sistema semiótico proporciona significados específicos de representación y, por ello, este autor los llama "registros de representación". Además, el pensamiento matemático a menudo requiere activar a la vez varios de ellos y cambiar de uno a otro dependiendo de que sea más adecuado o más conveniente.

Duval (1999, p. 8) distingue dos tipos de transformaciones de representaciones dentro de cada proceso matemático. Por un lado están aquellas transformaciones que se realizan dentro del mismo registro de representación y, por otro lado, están aquellas que tienden a cambiar de registro de manera que la representación de un objeto se traslada a una representación diferente del mismo objeto. Al primer tipo de transformación le llama "procesamiento" y un ejemplo de ella podría ser la realización de acciones de hacer y rehacer en una figura geométrica. El segundo es el denominado "conversión", y ocurre, por ejemplo, cuando una ecuación es trasladada a formato de gráfico cartesiano. Según este autor, pocos alumnos son capaces de realizar este segundo tipo de operación debido, fundamentalmente a dos factores: cualquier conversión puede ser congruente (la conversión es vista como una traslación unidad a unidad) o no congruente, y la congruencia o no congruencia depende de su dirección (lo que significa que una conversión puede ser congruente en una dirección y no serlo en la otra).

"Desde un punto de vista didáctico, sólo los estudiantes que realizan cambios de registro no confunden un objeto matemático con su representación y pueden trasferir su conocimiento matemático a otros contextos diferentes del de aprendizaje" (Duval, 1999, p. 10). Este mismo autor sostiene que la coordinación de registros es una condición esencial para el aprendizaje y no una consecuencia del mismo. Además, estos cambios de registros semióticos de representaciones también conducirán al estudiante a establecer las conexiones necesarias entre las matemáticas empíricas y las deductivas que Shoenfeld (1986) ya había detectado.

En el caso particular de la geometría, Poincaré (citado por Mesquita, 1998, p. 185) establece la distinción entre dos espacios, el espacio geométrico y el espacio de representación, que son de naturaleza distinta y por tanto tienen propiedades diferentes. Ambos espacios son continuos e infinitos pero el espacio geométrico es tridimensional, homogéneo (en el sentido de que todos los puntos tienen la misma importancia) e isotrópico (en el sentido de que no hay direcciones privilegiadas), en cambio el espacio de las representaciones es bidimensional, heterogéneo y anisótropo. Aunque las conexiones entre ambos espacios son fáciles de establecer para los matemáticos, no resultan tan claras para los estudiantes. Los matemáticos trabajan en el espacio geométrico y conocen y son capaces de controlar las limitaciones de la información que proviene del espacio de representación. Las diferencias entre ambos espacios aportarán implicaciones didácticas, ya que la mayor parte de los estudiantes trabajan en el espacio de las representaciones. Las dificultades surgen porque el espacio de las representaciones no es puramente visual, sino que está relacionado con la posición de nuestro cuerpo en el espacio, es el marco de nuestras representaciones y sensaciones.

1.4.1.1. Tipos de problemas que se ponen en juego en VRE

En esta sección la atención se centrará en el tipo de tareas y contenido matemático contenidas en los estudios e investigaciones sobre visualización y razonamiento espacial que forman parte de la bibliografía revisada. Esta descripción mostrará de forma explícita cuales son contenidos geométricos puestos en juego en los diferentes tipos de problemas o tareas.

El estudio de los distintos documentos revisados nos ha llevado a establecer seis categorías teniendo en cuenta el tipo de contenido propiamente matemático en el que se centran: representaciones planas de objetos tridimensionales, desarrollos planos de cuerpos espaciales, clasificación de figuras, comprensión de conceptos y propiedades, transformaciones geométricas y validez de la demostración o argumentación visual. Los instrumentos utilizados en las diversas investigaciones son: lápiz y papel, ordenadores, software geométrico y materiales manipulativos (en el caso de geometría tridimensional, poliedros de caras opacas o transparentes, cubos decorados, módulos construidos con cubos encajables multilink o con varillas). Numerosas investigaciones se centran en el estudio de las habilidades, estrategias, conocimientos y dificultades puestas en juego al resolver dichas tareas. Además, los estudios sobre diferencias culturales o de sexo, sobre la utilidad de ciertas herramientas tecnológicas, sobre el uso de imaginería y su efecto también recurren a diversas tareas de las anteriormente citadas.

No es nuestro objetivo tratar de proponer una clasificación de las tareas, sino que lo que se pretende en los próximos párrafos es presentar un agrupamiento de las investigaciones según los tópicos geométricos encontrados en la revisión bibliográfica. Se ha hecho una separación según las tareas se refieran a conceptos de geometría tridimensional o a tareas de geometría plana.

Geometría espacial

Tipos de tareas en las que intervienen contenidos de la geometría espacial y diferentes investigaciones que abordaron dichos contenidos en el contexto de la visualización y razonamiento espacial:

E01) Identificar representaciones planas (o diferentes vistas) de sólidos (en perspectiva, proyección isométrica, vistas ortogonales, vistas ortogonales codificadas). Dado un sólido (presentado en papel o físicamente) reconocer una o varias vistas del mismo (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1985, 1988; Diezmann y Lowrie, 2009; Gorgorió, 1995; Guay y McDaniel, 1977; Gutiérrez, 1991, 1992; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Olkun, 2003).

E02) Realizar/comunicar la representación libre de un sólido. Se da un objeto físico o una representación en perspectiva de un sólido y se pide realizar una representación, un dibujo, de lo que se está observando (Bishop, 1983; Colmez y Parzysz, 1993; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Hazama y Akai; 1993; Mitchelmore, 1978, 1980a; Parzysz, 1988; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

E03) Dibujar/completar representaciones planas de sólidos. Dado un sólido (representación física, papel, o en la pantalla del ordenador) dibujar otra representación plana específica del mismo (vistas laterales, vistas laterales codificadas, isométrica, etc.) Dado un tipo de representación plana, hacer otra representación, o dada una de las vistas del objeto dibujar/completar otra diferente (Battista y Clements, 1996; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Cosío, 1997; Gaulin, 1985; Gutiérrez, 1991, 1992, 1996c, 1998a; Hesrkowitz, Parzysz y van

Dormolen, 1996; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Malara, 1998; Olkun, 2003; Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993).

E04) Construir un sólido a partir de una representación plana dada físicamente, en papel o en el ordenador (Battista y Clements, 1996; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Bishop, 1983; De Lange, 1988; Gaulin, 1985; Gorgorió, 1995, 1998; Gutiérrez, 1991, 1992, 1996c; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Olkun, 2003; Pittalis, Mousoulides y Andreou, 2009; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

E05) Dada una representación plana de una estructura multicubos, quitar/añadir algunos de ellos e identificar/dibujar/construir el sólido resultante (Lappan, Phillips y Winter, 1984).

E06) Realizar/Reconocer simetrías de sólidos. Dado un sólido, dibujar/hacer una representación plana de su simétrico (Bishop, 1983; Gorgorió, 1995; Malara, 1998; Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993; Sack y Vazquez, 2008).

E07) Inventar códigos para la representación de formas ortoédricas (Gaulin, 1985).

E08) Identificar diferentes vistas de una situación en la que intervienen varios elementos/situar algún elemento. La diferencia de este grupo con las tareas del punto E01) es que aquí se representan diferentes objetos de una situación (real o imaginaria) y en aquella sólo un objeto (Bishop, 1983; De Lange, 1988; Gaulin, 1985; Hesrkowitz Parzysz y Van Dormolen, 1996).

E09) Realizar algún tipo de representación plana (mapas) de una construcción o composición de varias. Se incluye aquí la representación de espacios reales con sus elementos (Bishop, 1983; Gaulin, 1985; Hesrkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996).

E10) Reconocer figuras en diferentes posiciones o desde diferentes puntos de vista. Dadas diferentes representaciones, en cualquier tipo de perspectiva, reconocer cuales representan a una figura determinada (Gutiérrez, 1992, 1996b; Parzysz, 1991).

E11) Rotar/Mover (mentalmente, físicamente o en un ordenador) un sólido desde una posición actual a otra dada. También identificar un sólido en diferentes posiciones; dadas varias imágenes identificar cuales corresponden al mismo objeto en otra posición, etc. (Cosío, 1997; Gorgorió, 1995, 1998; Gutiérrez, 1991, 1992, 1996a, 1996b; Olkun, 2003).

E12) Identificar elementos en la línea de visión de otro (Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996).

E13) Describir/Realizar trayectos (Bishop, 1983; Gaulin, 1985; Gorgorió, 1998; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996).

E14) Componer/Descomponer en partes. Dadas dos o más piezas combinarlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes (Bishop, 1983; Cosío, 1997; Gaulin, 1985; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993).

E15) Encajar piezas en una estructura. Dada una estructura con uno o más agujeros (huecos) y dadas varias piezas ver cuales podrían colocarse/apoyarse en ella. (McLeay y Piggins, 1996).

E16) Dibujar/marcar las líneas escondidas para crear un sólido (Malara, 1998).

E17) Contar/completar/quitar elementos (enumeración de elementos). Dado un sólido (cualquier tipo de representación plana, física, en la pantalla del ordenador) contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, diagonales, etc). (Battista, 2007; Battista y Clements, 1996; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1985, 1988; Bishop, 1983; Brown y Presmeg; 1993; Cosío, 1997; Gorgorió, 1995; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Mariotti, 1995).

E18) Construir sólidos a partir de una descripción verbal, con lenguaje posicional (construcciones multilink con palabras "arriba, abajo, encima, a la izquierda, a la derecha) (Del Grande, 1987; Gutiérrez, 1998a; Sack y Vazquez, 2008).

E19) Combinar un número determinado de cubitos para realizar diferentes construcciones (Freudenthal, 1980; y Vazquez, 2008).

E20) Identificar "la representación correcta" del exterior de un objeto construido con cubitos, sin marcar los cubitos que lo forman (Gorgorió, 1995).

E21) Realizar una representación plana de un objeto dado en otra posición diferente a la proporcionada. Dado un objeto, hacer la representación de dicho objeto tumbado, girado (Gorgorió, 1995; Malara, 1998).

E22) Reconocer un movimiento aplicado a una figura dada y aplicación a otra figura distinta ("esto es a esto como esto otro es a…") (Battista, Wheatley y Talsma, 1982).

E23) Identificar desarrollos planos de cuerpos tridimensionales (del plano al espacio y del espacio al plano). Dados varios desarrollos planos seleccionar aquel o aquellos que corresponden al desarrollo plano del cuerpo a identificar (Cohen, 2003; Cosío, 1997; Diezmann y Lawrie (2009); Gorgorió, 1995; Guay y McDaniel, 1977; Meissner, 2001; Olkun, 2003).

E24) Dibujar/Completar desarrollos planos de cuerpos tridimensionales (Bishop, 1983; Cohen, 2003; Fischbein, 1993; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Meissner, 2001; Pittalis, Mousoulides y Andreou, 2009; Potari y Spiliopoulou, 2001).

E25) Construir el cuerpo tridimensional que procede de un desarrollo plano (Fischbein, 1993; Potari y Spiliopoulou, 2001).

E26) Identificar cortes de sólidos por medio de diferentes planos (Battista, 1990; Gorgorió, 1995; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Mariotti, 1995).

E27) Crear/dibujar cuerpos de revolución. Dada una forma plana construir/dibujar el cuerpo que se genera al hacerla girar alrededor de un eje (Gorgorió, 1995).

E28) Encontrar la figura plana que genera un determinado cuerpo de revolución (Pittalis, Mousoulides y Andreou, 2009).

E29) Comprensión/Aprendizaje de conceptos y propiedades de sólidos: clasificación, propiedades de sólidos (Gorgorió, 1995; Guillén, 2000, 2001; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Yakimanskaya, 1991); proporción (Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996); perpendiculares y paralelas (Mitchelmore, 1986).

E30) Analizar la situación de puntos, planos y rectas en el espacio. Analizar la pertenencia o no pertenencia de elementos (puntos, rectas) a diferentes planos, posiciones de rectas y planos en el espacio, etc. (Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Kopelman y Vinner, 1994; Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993; Parzysz, 1988, 1991).

E31) Memoria visual. Se presentan objetos en diferentes posiciones, luego se esconden o revuelven y deben ser devueltos a la posición inicial (Bishop, 1983; Del Grande, 1987).

E32) Identificar figuras, objetos que tienen cierto porcentaje borrado (Bishop, 1983).

E33) Reconocer un movimiento aplicado a un cuerpo tridimensional y marcar/dibujar/completar alguna característica del objeto inicial (Bishop, 1983; Gutiérrez, 1991).

E34) Identificar nudos. Dado un diagrama de cuerdas, identificar si es o no un nudo o dados varios diagramas identificar si se trata o no del mismo nudo (Jones, 1998; Mcleay y Piggins, 1996).

Geometría plana

P01) Comprensión/reconocimiento de conceptos geométricos elementales y propiedades: altura de un triángulo (Gutiérrez y Jaime, 1996; Herhskowitz,1989); círculo/circunferencia (Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996); clasificación jerárquica (De Villiers, 1994); altura de un triángulo, identificación de cuadriláteros, bitriángulos (Gutiérrez y Jaime, 1998; Hershkowitz, 1989; Vinner y Hershkowitz, 1983); paralelas, perpendiculares y ángulos (Clements y Battista, 1989, 1990; Fischbein, 1993; Mitchelmore, 1986, 1992; Mariotti, 2001; Mitchelmore y White, 2000; Owens, 1992); altura de triángulo, identificación de cuadriláteros y ángulos (Fischbein y Nachlieli, 1998; Gal y Linchevski, 2010; Jones, 2000).

P02) Aplicación para la demostración/prueba, demostraciones visuales y resolución de problemas (Arcavi, 2003; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989; De Villiers, 1994; Duval, 1999; Fischbein, 1993; Fischbein y Nachlieli, 1998; Gal y Linchevski, 2010; Gutiérrez y Jaime, 1998; Soto-Andrade, 2008; Yakimanskaya, 1991).

P03) Comparar/relacionar/encontrar medidas (longitudes, áreas, ángulos, etc.) (Battista, 2007; Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009; Dreyfus, 1991; Duval, 1995; Fischbein, 1993; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Mesquita, 1998; Presmeg, 1986b; White y Mitchelmore, 2003).

P04) Contar nº de elementos: triángulos, ejes de simetría, cuadriláteros, diferentes figuras, puntos de corte, diagonales, ángulos, cuadraditos, etc. (Battista, 2007; Battista y Clements, 1998; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Yakismankaya, 1991).

P05) Identificación visual. Dada una composición compuesta por diferentes tipos de figuras con intersección común, contar el número de figuras de un determinado tipo (cuadrados, triángulos, círculos) que aparecen en la misma o dibujar las diferentes figuras que se pueden ver (Del Grande, 1987; Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009; Fischbein y Nachlieli, 1998; Gal y Linchevski, 2010; Guay y McDaniel, 1977; Gutiérrez, 1991; Presmeg, 1989).

P06) Reconocer/describir la intersección de varias figuras. Dadas dos o más figuras que se intersecan, reconocer la figura intersección (Yakimanskaya, 1991).

P07) Reconocimiento/creación de patrones con figuras geométricas (Arcavi, 2003; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989; Brown y Presmeg; 1993; Del Grande, 1987; Guay y McDaniel, 1977; Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, Orton, 1997).

P08) Doblado de papel. En un papel se realizan diversos cortes imaginarios y hay que identificar cómo sería el diseño que se forma una vez que deshechas las dobleces (Cosío, 1997, Jaime y Gutiérrez, 1990; Olkun, 2003).

P09) Dada una figura/o parte de ella hacer su simétrica con respecto a distintos ejes, o dadas dos figuras simétricas entre sí construir/indicar el eje de simetría (Gutiérrez y Jaime, 1987; Hoyles y Healy, 1997; Jaime y Gutiérrez, 1996).

P10) Identificar/Reconocer si una figura es simétrica. En muchos casos se pide señalar o contar los ejes de simetría que tiene (Jaime y Gutiérrez, 1996; Presmeg, 1989).

P11) Identificar una figura en diferentes posiciones (giros, simetrías, traslaciones) (Clements y Battista, 1989; Del Grande, 1987; Olkun, 2003; Orton, 1997; Owens, 1992; Wheatley, 1978).

P12) Reconocimiento de un movimiento aplicado a una figura dada y/o aplicación a otra figura distinta ("esto es a esto como esto otro es a") (Orton, 1997; Yakimanskaya, 1991).

P13) Completar/marcar/dibujar los elementos que integran una figura a la que se aplica un determinado movimiento (giro, traslación o simetría) (Clements y Battista, 1989; Del Grande, 1987; Orton, 1997 Yakimanskaya, 1991).

P14) Completar/copiar una figura. Se da una figura completa y al lado la misma incompleta y se pide terminarla, o bien se pide copiarla sin más (Bishop, 1983; Brown y Wheatley, 1997; Del Grande, 1987; Gorgorió, 1995; Gutiérrez, 1996c; Lappan, Phillips y Winter, 1984).

P15) Comparar dos (o más) figuras ya terminadas, analizar si son iguales, si una es más grande/pequeña que la otra, en qué se diferencian, etc. (Clements y Battista, 1990; Del Grande, 1987; Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009).

P16) Llenado/composición/descomposición de figuras (puzles). Dada una composición en la que aparecen unos huecos, ver qué figuras (de un conjunto dado) cubren esos huecos; tareas de construir una figura con otras dadas (Brown y Wheatley, 1997; Del Grande, 1987; Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009; Olkun, 2003; Owens, 1992; Yakismankaya, 1991).

P17) Construir/seguir caminos. Seguir líneas de puntos para formar una figura, seguir un camino para llegar a un destino (Del Grande, 1987; Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009).

P18) Situar/describir verbalmente la situación de un elemento en el plano para que otro lo sitúe (Bishop, 1983).

Como se puede observar hay tareas similares en geometría plana y espacial, mientras que otras son específicas de cada uno de los espacios. También se encontraron tareas en diferentes contextos (no sólo geométrico) cuya finalidad es poner de manifiesto el uso, la funcionalidad y el interés de la visualización en la educación matemática: Arcavi, 2003; Bishop, 1983; Brown y Wheatley, 1990; Duval, 1999; Eisenberg, 1994; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Lean y Clements; 1981; Presmeg, 1989; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996.

La descripción detallada de cada una de las investigaciones anteriores, sus resultados y los efectos de las mismas se verán en las siguientes secciones, cuando se describan las demás facetas (cognitiva, instruccional y ecológica). En el anexo IV se mostrarán ejemplos de cada uno de los tipos citados.

1.4.2. FACETA COGNITIVA

Según Batista (2008a, p. 342) un "*objeto cognitivo* es una entidad mental sobre la que se opera durante el razonamiento y una *representación* es algo que se pone en el lugar de otra cosa". De esta manera, en geometría uno razona sobre objetos mediante representaciones. La mayor parte de los investigadores distinguen entre dos tipos de objetos cognitivos que se presentan durante el razonamiento geométrico: dibujo y figura. Este autor defiende que esta dicotomía es insuficiente para capturar la complejidad de los objetos del razonamiento geométrico y propone cuatro tipos de objetos geométricos:

> El objeto físico que es una entidad concreta (puerta, pelota, dibujo o figura arrastrable, etc.); el objeto perceptivo es una entidad mental percibida por un sujeto cuando está viendo un objeto físico; el objeto conceptual que es un modelo mental que es activado cuando un objeto es percibido, cuando una entidad es recordada mediante reflexión y análisis, o cuando se encuentra una descripción verbal. Por último, un objeto geométrico es una especificación

> verbal explícita formal de una relación espacial o de las características que definen una categoría de formas (p. 343).

Las cogniciones de los sujetos y las relaciones entre ellas sobre los distintos objetos básicos que se identifican en el razonamiento geométrico y espacial (descritos en la sección anterior) son las que van a permitir comprender este tipo de razonamiento. Para ello hay que tener en cuenta dos consideraciones: La primera está relacionada con la manera en que la concepción afecta a la percepción. “Lo que uno ve está afectado por lo que uno sabe y piensa” (Battista, 2007, p. 844). Según Battista (2008a), existen varias razones que motivan el que no sea fácil separar conceptualización de percepción. Una de ellas es el hecho de que los individuos tienden a categorizar conceptualizaciones, sobre todo bajo la influencia de la cultura y el lenguaje, y una vez que se forma la conceptualización es difícil darse cuenta de los objetos perceptuales. Otra razón reside en que la conceptualización afecta a la percepción, de modo que lo que percibimos puede estar muy influenciado por la conceptualización y el contexto. Un ejemplo se puede observar en geometría cuando un niño sólo reconoce un cuadrado cuando está con los lados paralelos a los márgenes de la hoja y no cuando aparece girado 45º; ello es motivado por la experiencia previa, que induce al alumno a atender a su posición y no a la relación entre las partes de la forma. El lenguaje también es otra de las formas en las que el contexto puede afectar a la percepción (llamar a la misma forma por diferentes nombres, por ejemplo, un cuadrado es un rombo y un rectángulo).

La segunda consideración está relacionada con el papel que pueden jugar los diagramas, según actúen como datos o como representaciones, como se vio en la Sección 1.3.2. Los estudiantes se encuentran con dificultades a la hora de trabajar con los diagramas en cualquiera de las dos situaciones: suelen atribuir características irrelevantes de los diagramas a los objetos que están representando, asocian una demostración sólo al tipo de figura empleado en ella, además de otras dificultades derivadas de dibujos que no capturan apropiadamente las relaciones geométricas.

Para Laborde (1993, p. 49), la distinción entre figura y dibujo está en que “el dibujo se refiere a la entidad material, mientras que la figura se refiere a un objeto teórico”. Esta distinción también la lleva al contexto de la geometría dinámica, donde una *figura* (como concepto geométrico abstracto) es invariante cuando pasa la prueba de arrastre (es decir, sigue manteniendo las mismas características que el objeto básico) mientras que un dibujo no las mantiene. Según esta autora (1998, p. 115), parte de las dificultades de los estudiantes son debidas a que estos suelen considerar los dibujos como el objeto de estudio, por lo que razonan sobre ellos y no sobre los conceptos que representan. Battista (2008a, pp. 348-349) sostiene que ambos, figura y dibujo, pueden ser representaciones u objetos dependiendo de la función que estén realizando. Este autor considera que la educación matemática no ha tenido en cuenta que los diagramas pueden ser objetos gráficos geométricamente analizables y se ha centrado en ellos como representaciones imperfectas de conceptos geométricos abstractos. Si se quiere conocer la forma en que los estudiantes utilizan y construyen las representaciones externas, sería preciso centrar la investigación en ver qué mecanismos mentales permiten a los estudiantes progresar del análisis de figuras particulares a abstracciones generales de clases de figuras y cuáles permiten que los estudiantes utilicen los conceptos geométricos formales abstractos para analizar figuras particulares.

De igual forma, Presmeg (1997, p. 305) observó que "Un dibujo o un diagrama es, por su naturaleza, un caso concreto, que incluso para el pensamiento matemático más trivial es necesario abstraer y generalizar". Esta autora sostiene que la concreción de un caso de dibujos e imágenes es el origen de muchas dificultades en el razonamiento matemático basado en la visualización. Otros autores, como Jones (2000, p. 58), aseguran que "los alumnos pueden quedarse *atascados* en algún sitio entre un dibujo y una figura".

El uso de diagramas y el efecto que pueden tener los dibujos en el aprendizaje geométrico en los niños fue abordado ya por Zykova (1969), quien se refiere a la rigidez asociada a los dibujos geométricos de los libros de texto y la poca habilidad de los alumnos para generalizar a partir de esos dibujos. Un problema en la enseñanza de la geometría es que resulta imposible trazar un esquema generalizado; así, por ejemplo, uno no puede dibujar un triángulo general ya que una vez dibujado es específico. Es necesario presentar muchos ejemplos diagramáticos de un concepto geométrico para que los estudiantes no estén limitados por lo específico de un diagrama concreto (Bishop, 1983).

Desde el punto de vista de Duval (1995) existen dos características por las cuales una figura geométrica no puede ser vista como un dibujo de un objeto físico: la primera surge de las limitaciones internas de organización que existen en las figuras geométricas y no existen en los dibujos físicos de los objetos (estas limitaciones se pueden descubrir en las actividades de construcción de la figura); la segunda es debida a diferencias funcionales, pues una figura debe ayudar o dar una clave para resolver un problema.

Esas diferencias se mantienen independientemente de si la representación es en papel o en la mente.

1.4.2.1. Teorías pertinentes para el desarrollo del aprendizaje geométrico

Hay dos teorías que se consideran pertinentes para el desarrollo del aprendizaje geométrico: la Teoría de van Hiele y la Teoría de la Abstracción.

La Teoría de van Hiele

La Teoría de van Hiele (véase Clements y Battista, 1992 para obtener una descripción completa) es considerada por la mayoría de las investigaciones como una descripción bastante exacta del desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos y, desde esa perspectiva, se hace necesario un resumen y una breve revisión de la misma para este trabajo. Según Battista (2007, p. 856) esta teoría tiene un círculo de validez muy fuerte debido a que los niveles describen una progresión del pensamiento que avanza a través de cuatro fases, lo que, desde el punto de vista científico, parece la forma natural en que el razonamiento intuitivo avance hasta un razonamiento científico formal. Sin embargo, numerosos autores consideran que esta teoría es demasiado general y no profundiza suficientemente, lo que conduce a nuevos planteamientos o ampliaciones de la misma. Dos de los aspectos en que se centran los nuevos avances relacionados con esta teoría son: la ampliación de los descriptores más allá de las formas bidimensionales y la revisión de la naturaleza de los niveles.

La ampliación de los niveles a la visualización en 3D fue llevada a cabo, principalmente, por Gutiérrez y colaboradores (Gutiérrez, 1992, Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). Esta ampliación es compleja pues intenta construir la relación entre la visualización y la conceptualización geométrica. Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991, p. 242) destacan que en el Nivel 1 los alumnos comparan sólidos usando la percepción global sin atender a sus propiedades y que son incapaces de visualizar sólidos, sus posiciones, o los movimientos que en realidad no pueden ver. En el Nivel 2, los alumnos son capaces de realizar un análisis visual de los componentes de los sólidos y describirlos de manera informal a través de sus propiedades, aunque no de relacionar unas propiedades con otras. Los alumnos pueden visualizar movimientos simples desde una posición visible a otra. En el Nivel 3, los alumnos realizan clasificaciones de sólidos y comparaciones entre ellos analizando matemáticamente sus componentes. En este nivel los alumnos ven las definiciones como condiciones necesarias y suficientes y son capaces de seguir una demostración formal. Además, visualizan movimientos que implican posiciones que no son visibles y razonan sobre dichos movimientos. En el Nivel 4, donde la visualización es elevada, los alumnos pueden analizar matemáticamente diversas situaciones, deducir formalmente propiedades de los sólidos y realizar demostraciones formales. Estos autores, al igual que Clements y Battista (2001), realizan una importante labor al demostrar de qué forma visualización y conceptualización geométrica pueden apoyarse mutuamente.

Battista (2007, p. 847) cree que “la complicación de ampliar los niveles a la visualización se debe a que la visualización es una capacidad que no tiene por qué estar ligada al conocimiento de propiedades”. De ahí que pueda ocurrir que algunos alumnos que no poseen grandes dotes visualizadoras compensen esa falta de habilidades desarrollando estrategias analíticas basadas en propiedades. Otros, sin embargo, pueden poseer una capacidad de visualización bastante elevada antes de desarrollar razonamientos que están basados en las propiedades de los sólidos. La investigación de Gorgorió (1998) arroja un poco de luz sobre este asunto.

En cuanto a la naturaleza de los niveles (Battista, 2007, p. 848), conceptualizados como períodos de desarrollo del razonamiento geométrico, el problema está en determinar si el pensamiento de los alumnos es continuo o no, es decir, si en un instante determinado está en un único nivel. Pese a que cada uno de los niveles está caracterizado por el pensamiento diferente desde el punto de vista cualitativo y por el procesamiento y la organización del conocimiento interno, surgen dificultades para clasificar el nivel de van Hiele de los alumnos debido a la oscilación de estos entre niveles y a alumnos que están en diferentes niveles para conceptos diferentes. Siguiendo la línea de que los alumnos desarrollan varios niveles de van Hiele simultáneamente, Gutiérrez et al. (1991) utilizaron un enfoque de vectores, en el que cada vector tenía cuatro componentes que representaban los grados de adquisición de cada uno de los niveles de van Hiele. Así, determinaron cinco períodos en la adquisición de un nivel (nula, baja, intermedia, alta y completa). Este enfoque vectorial, que puede interpretarse en función de los niveles de van Hiele originales (Clements y Battista, 1992), junto con las investigaciones de Lehrer, Henkins y Osana (1998) y las que han intentado reformular la teoría de van Hiele a través de la taxonomía SOLO sostienen que los alumnos desarrollan más de un nivel a la vez y que, por tanto, los niveles son continuos por naturaleza.

Lehrer et al. (1998) mantenían la idea de que la “mezcla de niveles” era propia de alumnos de primaria, que las justificaciones de los alumnos solían saltar entre niveles de van Hiele no contiguos, y que el razonamiento variaba en gran medida en función de la tarea. La investigación de Lehrer et al. ofrece una descripción más rica del razonamiento visual o de nivel 1, indicando que este tipo de razonamiento no es tan homogéneo y limitado como se muestra en los niveles de van Hiele originales.

De igual forma que los investigadores anteriores, Clements y Battista (2001) encontraron pocos indicios de la discontinuidad de los niveles en sus investigaciones. Entendiendo los niveles de van Hiele como tipos de razonamiento, estos autores consideran que el conocimiento visual-holístico, el conocimiento verbal descriptivo y, en menor medida al principio, el conocimiento simbólico abstracto crecen simultáneamente, de forma que un nivel tiende a hacerse ascendente o privilegiado dependiendo de la edad del niño, la experiencia, las intenciones, las tareas y la habilidad en el uso de los diversos tipos de razonamiento.

Battista (2007) y Borrow (2000) profundizan en los niveles de van Hiele originales para desmenuzar con más detalle el progreso de los alumnos al pasar de conceptualizaciones intuitivas informales de formas geométricas en 2D al sistema conceptual formal basado en las propiedades empleado por los matemáticos. Esta profundización se ve ampliada fundamentalmente en dos aspectos: el desarrollo del pensamiento basado en las propiedades y el desarrollo de la inferencia sobre las propiedades, estableciendo varios subniveles en los niveles ya existentes.

Otro aspecto a tener en cuenta en las investigaciones llevadas a cabo sobre la ampliación y profundización de los niveles de van Hiele es el relacionado con la evaluación. La evaluación en la teoría de van Hiele se hace necesaria para hacer operativas las concepciones de los niveles de los investigadores y para aplicar a la práctica educativa. Gutiérrez y Jaime (1998) diseñaron un instrumento para usar con alumnos de educación media y secundaria para el que definieron cuatro procesos (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) y el modo en que estos eran aplicados por los alumnos en los distintos niveles de van Hiele.

Clements y Battista (2001) y Lehrer et al. (1998) enfocaron la evaluación de los niveles de van Hiele a través de una tarea de clasificación de tríadas (triad-sorting) para alumnos de primaria en situaciones de entrevista. Los primeros se centraron en la “calidad” del razonamiento y del alumno y los segundos en el tipo de razonamiento que los alumnos utilizaban.

Como apunte final sobre la teoría de van Hiele, todas estas investigaciones sugieren que los niveles de van Hiele deben ser profundizados y ampliados, sin embargo, según Battista (2007, p. 848): “las profundizaciones actuales no poseen ni la coherencia conceptual ni la claridad de los niveles originales”.

Teoría de la abstracción

“El aprendizaje se produce a medida que los individuos se someten a ciclos de forma recurrente a través de fases de acción (físicas y mentales), reflexión y abstracción de forma que les permita desarrollar modelos mentales cada vez más sofisticados” (Battista, 2007, p. 859). Según esta teoría, el proceso de abstracción de objetos matemáticos se puede describir a través de los siguientes niveles:

- Abstracción perceptual. A este nivel perceptual, de reconocimiento, según von Glasersfeld (1991, p. 47), “la atención centrada elige un trozo de experiencia, lo aísla de lo que venía antes y de lo que sigue, y lo trata como una entidad cerrada”. Sobre los elementos que se abstraen sólo a nivel perceptual no se puede actuar de nuevo a menos que estén físicamente presentes.
- Internalización. La internalización ocurre cuando el material se ha abstraído suficientemente, de forma que puede volver a presentarse en ausencia de aportación perceptual. Según von Glasersfeld (1991), es en este nivel en el que se ha formado un concepto. Esta idea de concepto coincide con la de “objeto conceptual” de Battista. Así,

> Un concepto se refiere a alguna estructura que ha sido abstraída del proceso de construcción basada en la experiencia como utilizable de manera recurrente... Para llamarse “concepto”, estas construcciones deben ser suficientemente estables para volver a presentarse en ausencia de “aportación” perceptual. Sin embargo, sobre este material internalizado no se puede reflexionar ni analizar su estructura (Steffe y Cobb, 1988, p. 17).

- Interiorización. “Reflexionar sobre los resultados de una representación requiere separación y situar a una cierta distancia la actividad que vuelve a presentarse con el fin de analizar su estructura y composición” (Steffe y Cobb, 1988, p. 17). El reprocesamiento es la operación de la interiorización ya que para utilizar un elemento abstraído en una situación nueva requiere que el elemento no sea recordado tal y como apareció en situaciones anteriores sino que debe ser reprocesado para aplicarlo a otras nuevas. Un elemento se ha interiorizado cuando la abstracción lo ha separado de su contexto perceptual original y ya se puede actuar sobre él de una forma libre. Sin embargo, sigue habiendo vínculos con ese contexto y, de hecho, son esos vínculos los que podrían ser una parte muy importante de la aplicación de material interiorizado a una nueva situación. En los dos niveles anteriores de la abstracción el contexto es una parte inseparable de una abstracción.

- Segundo nivel de interiorización. En este nivel las operaciones pueden realizarse sobre el material sin necesidad de volver a presentarlo. También permite la utilización de símbolos para sustituir el material abstraído anteriormente.

Según Battista (2007, p. 860), para que esta teoría se pueda aplicar a los niveles de van Hiele tenemos que considerar que los procesos mentales basados en la acción permiten a los alumnos crear y reconocer imágenes de formas. En el primer nivel de van Hiele, para reconocer y visualizar formas comunes, estos procesos deben ser abstraídos a nivel perceptual e internalizados. El paso al segundo nivel de van Hiele supone que los procesos de reconocimiento de las formas deben situarse al nivel interiorizado, lo que permitirá establecer relaciones entre componentes de formas, así se inicia otro ciclo de abstracción centrado en las relaciones y no en el reconocimiento. Un alumno es capaz de tener un razonamiento de Nivel 2, descriptivo/analítico, cuando puede ver que una clase de formas tienen un grupo de propiedades que lo caracterizan, es decir, las operaciones relacionales se vuelven interiorizadas. El tercer nivel de van Hiele se alcanza cuando las operaciones relacionales consiguen un estatus de “símbolo” (von Glasersfeld, 1995) que correspondería al segundo nivel de interiorización. En este nivel los individuos son capaces de razonar de manera significativa sobre afirmaciones simbólicas/verbales, las cuales pueden actuar como sustitutas de esas operaciones relacionales, sin tener que volver a presentar las operaciones reales que representan.

Se identifican tres formas especiales de abstracción fundamentales para el aprendizaje y el razonamiento geométrico. La *estructuración espacial, los modelos mentales y los esquemas.* Estos últimos son secuencias organizadas de acciones y operaciones que se han abstraído de la experiencia y pueden aplicarse en respuesta a circunstancias similares. Los dos primeros se describirán en los próximos párrafos.

El aprendizaje de la geometría implica tres tipos de estructuración: (a) la *estructuración espacial* construye una organización o forma espacial para un objeto o un conjunto de objetos. Además, identifica los componentes espaciales del objeto combinando los diferentes componentes o compuestos espaciales y establece relaciones entre componentes y compuestos; (b) la *estructuración geométrica* describe estructuraciones espaciales en cuanto a conceptos geométricos formales. De este modo, para actuar y conceptualizar sobre una situación espacial, una persona debe utilizar conceptos geométricos (ángulos, inclinación, paralelismo, longitud, rectángulo, sistemas de coordenadas, y transformaciones geométricas); (c) la *estructuración lógica* organiza formalmente conceptos geométricos (estructuraciones geométricas) en un sistema estableciendo y describiendo las interrelaciones mediante deducción lógica. Este punto de vista de las estructuraciones proporciona otra perspectiva sobre la teoría de van Hiele: la estructuración espacial es la esencia principal del Nivel 1 de van Hiele y de la transición al Nivel 2, la estructuración geométrica es la esencia principal en el Nivel 2 una vez alcanzado ampliamente y la estructuración lógica es la esencia de los Niveles 3 y 4 (Battista, 2007, pp. 860-861).

Los *modelos mentales* son grupos de abstracciones que se integran para formar representaciones verbales no mentales, las cuales se activan para interpretar y razonar sobre situaciones. Los individuos comprenden o interpretan una situación, incluyendo un conjunto de proposiciones verbales que están conectadas describiendo esa situación, cuando activan o construyen un modelo mental para representar dicha situación. De este modo, "las partes del modelo corresponden a las partes pertinentes de lo que representa, y las relaciones estructurales entre las partes del modelo son análogas a las relaciones estructurales en el mundo" (Johnson-Laird, 1998, p. 447). Los modelos mentales que los individuos activan cuando razonan sobre una situación, y que están limitados por sus creencias y conocimientos, les permiten simular interacciones dentro de la situación de forma que pueden indagar sobre posibles soluciones a los problemas o sobre escenarios potenciales. Battista (2007, pp. 861-862) analiza varios ejemplos de razonamiento basado en modelos mentales, observando que los modelos mentales de los alumnos a veces no son adecuados para extraer información válida y que una cuestión clave para los investigadores es qué determina cuales son los modelos mentales activados durante la resolución de un problema y, además, qué tipos de instrucciones orientan a los alumnos para activar los modelos más útiles.

En la enseñanza de las matemáticas, los investigadores que utilizan la noción de imagen del concepto han llegado a conclusiones similares a los investigadores que aceptan la idea de los modelos mentales.

Varios investigadores distinguen dos tipos principales de imaginería: *imágenes ricas*, que son estáticas, fijas, con gran contenido visual e *imágenes de esquemas* que representan relaciones espaciales y pueden ser transformados de diferentes formas (Wheatley, 1998). Desde la teoría de modelos mentales también es posible explicar esta distinción. Así, Johnson-Laird (1998) y colegas distinguen por un lado entre *imágenes visuales* (que se corresponden con las imágenes ricas) y que provienen de la percepción o se generan a partir de modelos mentales. Las imágenes se pueden manipular mentalmente si se han construido modelos mentales a partir de éstas. Por otro lado están los *modelos mentales espaciales,* que se corresponden con los esquemas de imágenes. Por consiguiente, en el razonamiento visual puede ocurrir que las personas sólo construyan y exploren imágenes visuales, o bien que otras veces actúen sobre modelos mentales espaciales. Además, según Knauff, Fangmeier y Johnson-Laird (2003), la evocación de las imágenes visuales puede interferir con la construcción y utilización de un modelo mental apropiado e impedir el razonamiento cuando los aspectos de las imágenes visuales son irrelevantes para una tarea.

Battista, (2007, p. 863) muestra que desde la teoría de la abstracción esta distinción aparece de nuevo, ya que "volver a presentar una imagen visual se deriva de una internalización de una percepción de un objeto espacial y un modelo mental de una entidad espacial se deriva de la interiorización de los procesos mentales utilizados para concebir la entidad". Esto supone que para razonar geométricamente acerca de una imagen, es necesario construir un modelo mental adecuado de la imagen que capture la estructura espacial pertinente de la misma, de manera que será más profunda cuanto más sofisticados sean los conceptos usados en esta estructuración. Siguiendo en esta línea, Laborde (1993) afirma que para que los alumnos estén pensando en geometría formal deben ver las figuras como conjuntos de relaciones (utilizando modelos mentales) y no como dibujos (usando imágenes).

1.4.2.2. Creación y representación mental del conocimiento geométrico y espacial

Según Battista (2007, p. 856) "para comprender los procesos cognitivos que sirven de fundamento para el pensamiento geométrico, y el paso desde un nivel de pensamiento al siguiente, uno debe entender la forma en la que las personas crean y representan mentalmente el conocimiento geométrico y espacial". Este conocimiento se origina con la percepción y las imágenes, de modo que para abordarlo hay que tener en cuenta tres cuestiones fundamentales: la percepción de la forma, del todo a las partes y, por último, el paso de las imágenes a las relaciones explícitas.

Percepción de la forma

El modelo de Kosslyn (1994) para los procesos cerebrales implicados en la percepción consta de varios sistemas: el sistema del preprocesamiento, el sistema de activación de modelos que se divide en dos subsistemas, el subsistema de activación del modelo de categoría y el subsistema de activación del modelo de ejemplo. El primero produce tanto una imagen como propiedades extraídas de la imagen, el subsistema de activación del modelo de la categoría clasifica un estímulo como un elemento de una categoría y el subsistema de activación del modelo de ejemplo registra ejemplos específicos. De esta forma, las tareas geométricas elementales de percibir ejemplos y percibir categorías son diferenciadas.

El proceso de abstracción parece residir en la raíz de la creación de entidades en el subsistema de modelos de categoría. Según von Glasersfeld (1982, p. 197):

> La abstracción del material sensorial real a partir del cual se desarrollan determinadas secuencias o configuraciones, revela modelos figurales que tienen una cierta aplicabilidad general y puede asociarse semánticamente con nombres específicos. Así pues, por ejemplo, tenemos la idea de "triangularidad" que nos permite *ver* configuraciones espaciales como triángulos.

Además, esta abstracción perceptual es activa y no pasiva, es decir, los individuos forman caminos de exploración que les permiten reconocer objetos perceptuales similares. Por ejemplo, se crea una conceptualización temprana de triángulo cuando varios tipos diferentes de objetos perceptuales triangulares se extraen y se asocian con la palabra triángulo. Sin embargo, en esta fase temprana del reconocimiento, la "conceptualización" de triángulo del individuo normalmente se limita a un subgrupo pequeño de prototipos típicos y es holística por naturaleza (Battista 2007, p. 857).

Del todo a las partes

Kosslyn (1988, p. 1623) señala que en el procesamiento perceptual, la mente procesa primero la forma global de un objeto y después las partes y las características. Esta secuencia permite que la mente relacione el objeto con un modelo general y si eso no funciona, intenta establecer relaciones con representaciones de partes individualizadas.

Según lo anterior, aunque inicialmente las partes de una forma no están accesibles explícitamente, cuando dicha forma es procesada globalmente el sistema perceptual identifica las partes de la forma y calcula relaciones espaciales relativamente abstractas entre ellas.

Por otro lado, a medida que los niños crecen aumenta su capacidad para atender de forma selectiva a dimensiones únicas y de ahí a las características del todo. Desde una investigación centrada en la experiencia, la reflexión y el aprendizaje, Clements y Battista (1992, 2001), describen los procesos por medio de los cuales las partes de las formas se vuelven de manera gradual accesibles a la reflexión.

A pesar de lo anterior algunas investigaciones determinan que los observadores pueden centrarse en una forma visual, de manera selectiva, en características que sean o bien globales o bien locales. Según Coren, Ward y Enns (1994) "cuando estamos listos para atender a un nivel de detalle, nuestro procesamiento de las características en el otro nivel es más pobre" (p. 518). Aunque la separación de procesamiento global-local está presente en la arquitectura del cerebro, a medida que los individuos aprenden y se vuelven más sofisticados en cuanto a sus razonamientos, los procesos independientes se coordinan e integran en esquemas de reconocimiento de mayor nivel que son susceptibles al todo, sus partes, y las relaciones entre partes.

De las imágenes a las relaciones explícitas

Kosslyn (1994, p. 168) considera que el primer paso a seguir por los alumnos para progresar desde la visión de las formas como imágenes visuales al pensamiento sobre ellas, en términos de afirmaciones verbales sobre sus partes y relaciones entre las mismas, es obtener el acceso mental a las partes de las formas como partes de un todo para construir mentalmente relaciones espaciales entre estas. Esa falta de relación de inclusión entre las partes y el todo al que pertenecen es característica del pensamiento del nivel 1.

Para construir mentalmente relaciones espaciales explícitas entre las partes de una forma que le proporcionan su estructura espacial, es necesario que la mente "se introduzca" en los componentes del procesamiento perceptual de cara a identificar una forma y las relaciones espaciales estructurales abstractas que la caracterizan, e intente conscientemente conceptualizar estas relaciones. Para ello, según la teoría de la abstracción, se requiere una reflexión intencional sobre la naturaleza de la forma y que los procesos perceptuales se abstraigan en el nivel interiorizado.

Existen varios factores que pueden generar el movimiento desde las imágenes hasta las relaciones explícitas: uno de ellos es que la capacidad para introducirse en los procesos perceptuales puede verse afectada por el desarrollo y la experiencia. Otro factor se debe al hecho de que, aun cuando los niños se basan predominantemente en las imágenes al acceder y utilizar la información, como la capacidad de procesamiento para el conocimiento verbal aumenta con el desarrollo, los niños trasladan cada vez más las observaciones derivadas de imágenes a la forma verbal, de forma que puede accederse a los hechos o bien de forma imagística o verbal (Kosslyn, 1980, 1983). De hecho, Kosslyn (1980, p. 412) expone que a medida que el niño gana experiencia y el acceso a las mismas ideas es frecuente, la utilización de representación imagística puede reducirse.

Por otra parte, Brown y Presmeg (1993) se interesan sobre todo por el aprendizaje matemático significativo, en el que frecuentemente está implicado el uso de formas vagas y abstractas de imaginería y no sólo la tradicional idea de imagen como “dibujo en la mente”. Estos autores investigan los tipos de imaginería descritos por Presmeg (1986a) en dos grupos de estudiantes, uno de 5º grado y otro de grado 11, que no fueron seleccionados por su alta capacidad en imaginería. Uno de los resultados que se desprenden de este estudio es que los estudiantes utilizan, en algún momento, algún tipo de imágenes para resolver tareas matemáticas. De este modo, la imaginería concreta fue la más utilizada por ambos grupos, los ejemplos de imaginería cinética fueron abundantes, sobre todo entre los estudiantes más jóvenes, y estudiantes de los dos grupos utilizaron imaginería dinámica de manera exitosa para resolver las tareas propuestas. El tipo menos frecuente de imaginería encontrado en esta investigación fueron las imágenes de patrones.

Sin embargo, las diferencias individuales que se encontraron estos autores se traducen en que aquellos estudiantes que se consideraron con mejor comprensión relacional matemática, en ambos grupos, utilizaron frecuentemente imaginería más abstracta, dinámica y eficiente que aquellos que se habían evaluado con una comprensión relacional más débil.

Presmeg (1994, p.114) afirma que algunos usos o aspectos de la imaginería no ayudan a los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas, aunque es posible superar esas desventajas. Esta autora sigue a Paivio (1971) al considerar las siguientes distinciones funcionales entre los tipos de imaginería: concreta/abstracta, estática/dinámica y paralela/secuencial.

Se considera imaginería concreta a aquella que se aproxima a una “foto”, mientras que la abstracta se corresponde con esquemas y patrones. Las dificultades asociadas con el uso de imaginería concreta se deben principalmente a las imágenes vívidas (una imagen de una figura estándar puede impedir que sea reconocida en otra posición). Por otra parte, dicha autora encontró usos positivos de este tipo de imaginería, como por ejemplo el uso de imágenes concretas de fórmulas escritas en la pizarra o en los libros que ayudaron a los estudiantes a recordar esas fórmulas. Pero lo más efectivo en esta distinción (abstracto/concreto) fueron las imágenes de patrones, que en un estudio anterior (Presmeg, 1985) fueron las más utilizadas por sus visualizadores.

En cuanto a la dicotomía estática/dinámica, Paivio (1971, p. 32) concluye que “Las imágenes parecen ser modos eficaces para representar situaciones estáticas, así como los cambios en las situaciones”. La mayoría de la imaginería encontrada por Presmeg (1985) en sus visualizadores fue estática, aunque la poca que encontró dinámica fue muy efectiva. Esta autora sostiene que la imaginería estática y dinámica son dos aspectos complementarios de la cognición matemática (estructurales y operativos), al igual que los aspectos secuenciales y paralelos. Estos últimos (asociados con el funcionamiento de los dos hemisferios del cerebro, el izquierdo al proceso secuencial y el derecho al aspecto paralelo) están también implicados en el aprendizaje de las matemáticas, por tanto es importante promover ambos aspectos. En la investigación de Presmeg (1985) los visualizadores utilizaron de forma espontánea el procesamiento paralelo, que es el que más se adapta a la imaginería.

1.4.2.3. Aprendizaje de conceptos

En el desarrollo del pensamiento geométrico, el análisis, el aprendizaje y uso de conceptos desempeñan una importante función de cara a la comprensión de dicho desarrollo, sobre todo para entender el pensamiento en los tres primeros niveles de van Hiele.

Según Vinner (1983) y Vinner y Hershkowitz (1983, p. 20) existen dos dificultades importantes al tratar con la formación de conceptos: una es la propia noción de concepto y otra es cómo determinar si un concepto se ha formado en la mente de alguien. Al ser las matemáticas una ciencia deductiva, los conceptos se definen a partir de conceptos previos, salvo que sean conceptos primarios con lo cual siguen indefinidos. Por lo tanto, si un concepto no es primario la definición matemática únicamente determina todos los ejemplos y no ejemplos del concepto, y de este modo la actividad se centra en identificar los ejemplos del concepto. En esta identificación se pueden distinguir tres elementos: la imagen del concepto, la definición del concepto y un grupo de operaciones, que pueden ser mentales o físicas, que actúan sobre los dos primeros elementos y sobre las figuras mostradas en la tarea de identificación. Según Vinner (1983), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria evocando un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias que no son la definición del concepto sino lo que él llama la *imagen del concepto* (o imagen conceptual). Esta imagen conceptual depende de la persona o personas que estén tratando con ese concepto y del contexto. Vinner y Hershkowitz (1983, p. 21) llaman *definición de un concepto* a la definición verbal que un estudiante tiene en su memoria sobre un concepto y que recita cuando se le pide. Esta definición de un concepto no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen del concepto en el momento de la realización de tareas. Para estos autores "adquirir un concepto significa, además de otras cosas, adquirir un mecanismo de identificación-construcción con el cual será posible identificar y construir todos los ejemplos del concepto tal como es concebido por la comunidad matemática" (p. 21).

La investigación de Vinner y Hershkowitz (1983) muestra que la definición verbal es una potente herramienta en formación de conceptos nuevos al demandar un pensamiento más sofisticado. Sin embargo, en la formación de conceptos familiares no mejora la identificación de figuras (primer nivel de van Hiele) ya que estas son juzgadas por su apariencia.

En el estudio realizado por Hershkowitz (1989) se analiza el efecto de los elementos que componen la definición formal de un concepto matemático en la adquisición de dicho concepto. Sus resultados probaron, tras analizar diez definiciones de conceptos geométricos, que existe una relación directa entre el número de elementos que componen una definición y la dificultad de asimilación por los estudiantes del concepto definido. Gutiérrez y Jaime (1996) añaden que la estructura lógica no es la única ni principal causa de los errores de los estudiantes al usar las definiciones formales, sino que los conceptos previos utilizados (que ellos llaman subconceptos) también son una fuente importante de errores.

De la investigación de Fischbein y Nachlieli (1998) se deduce que hay que distinguir entre conceptos que se corresponden con figuras invariantes y conceptos que se corresponden con variedad de figuras. Por ejemplo, la diferencia de resultados entre el concepto de ángulo recto y el de paralelogramo es que la forma del primero es siempre la misma mientras que el segundo puede aparecer en formas diferentes. Este hecho conduce a que, con la edad, este conflicto entre lo figural y lo conceptual se supere, ya que el primero es más un problema perceptivo que matemático En las actividades de discriminación visual, la interacción entre lo figural y conceptual puede verse influenciada por la leyes de la Gestalt lo que conduce a desestabilizar el control de las limitaciones formales. Según estos autores, "ya que la matemática es un cuerpo de conocimiento, formal, abstracto, deductivo y riguroso, es esta habilidad, el control sobre lo particular mediante limitaciones formales, lo que caracteriza el genuino razonamiento matemático" (Fischbein y Nachlieli, 1998, p. 1209). Sin embargo, eso no quiere decir que haya que eliminar la contribución figural-intuitiva, pues sin ella no sería posible el proceso de invención.

Hershkowitz (1990, p. 81), destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto, papel que en el caso de objetos tridimensionales es especialmente importante. Para ella, el concepto se deriva de su definición matemática, por lo que tiene atributos críticos (o relevantes, que son los que un concepto tiene que tener para ser modelo del concepto) y atributos no críticos (irrelevantes, que sólo los poseen algunos ejemplos). En general, los atributos irrelevantes se logran primero porque tienen fuertes características visuales y son los que permiten hacer las clasificaciones dentro de un mismo concepto. Para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación con las imágenes de los conceptos, esta autora considera lo que denomina el *fenómeno prototipo*:

> Cada concepto tiene un conjunto de atributos críticos o rasgos relevantes y un conjunto de ejemplos. Todos estos ejemplos son matemáticamente equivalentes ya que satisfacen la definición del concepto y contienen todos sus atributos críticos, pero son diferentes el uno del otro visualmente o psicológicamente (Hershkowitz, 1989, p. 63).

Sin embargo, hay ejemplos que tienden a ser más populares que otros y esos son los llamados *ejemplos prototipo*. Generalmente, los ejemplos prototipo tienen la lista de atributos mayor, son los que primero se adquieren y existen en la imagen de concepto de la mayoría de los estudiantes.

Vinner y Hershkowitz (1983) observaron que cuando los niños forman su imagen del concepto, en realidad al principio tienen el ejemplo prototipo en la mente y en base a dicho prototipo toman decisiones sobre los demás ejemplos. Hershkowitz (1990, p. 63) describe tres tipos de comportamiento (*juicios prototípicos*) de los estudiantes relativos a extender la imagen de concepto más allá del ejemplo prototipo (identificados ya en el modelo de Vinner) y que dependen de la calidad de las imágenes conceptuales que poseen. De este modo, los estudiantes con imágenes conceptuales pobres (formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual) basan sus juicios en la apariencia visual de los prototipos, lo que motiva que rechacen aquellas figuras que no coinciden con los prototipos de su imagen de concepto. Otros estudiantes crean imágenes mentales que tienen pocos ejemplos prototípicos pero, a diferencia de los anteriores, se centran en las propiedades matemáticas de estos ejemplos. Así, rechazan como ejemplos las figuras que no cumplen dichas propiedades (por ejemplo, la imagen mental de cuadrilátero que tienen muchos estudiantes incluye la propiedad de ser convexo, por lo que no aceptan como cuadrilátero "la punta de flecha"). El tercer grupo corresponde a estudiantes que construyen imágenes conceptuales completas, con una amplia variedad de ejemplos y todas las propiedades importantes de los mismos. Las decisiones de estos estudiantes están basadas en el análisis y la utilización de los atributos críticos de los conceptos.

La conexión con los niveles de van Hiele parece clara, el primer tipo de comportamiento es puramente visual y se corresponde con el nivel 1, el segundo tipo está basado en la formación visual del prototipo pero el juicio se aplica incorrectamente en los atributos del prototipo lo que llevaría hacia la transición del primer nivel al segundo nivel de van Hiele. El tercer tipo de comportamiento correspondería al nivel 2 de van Hiele.

Por otra parte, el aprendizaje de la geometría supone la formación de categorías difusas y formales. Siguiendo a Pinker (1997, p. 307), las *categorías difusas o naturales* se forman en la actividad diaria, sus definiciones son poco claras, con límites difusos y se conceptualizan principalmente en función de estereotipos y semejanzas familiares. El objetivo principal de estas categorías es la identificación de ejemplos. El segundo tipo son las *categorías formales*, que se definen de forma explícita y en las que todos los ejemplos son equivalentes desde un punto de vista lógico como representativos de la clase. La finalidad de esta categoría es formular y estudiar definiciones precisas.

Los niños empiezan identificando las formas que encuentran en el mundo físico, sin definirlas, es decir, las tratan como categorías difusas (por ejemplo, los alumnos que poseen conceptos difusos suelen rechazar la idea de que un cuadrado es un rectángulo). A medida que reciben educación escolar, se les va exigiendo que conceptualicen esas formas a través de definiciones verbales que están basadas en propiedades. Muchas de las dificultades que aparecen en este proceso se deben a que los niños hacen coincidir las categorías difusas con conceptos formales, lo que se ve apoyado por el hecho de que el lenguaje utilizado al trabajar con ambos tipos de conceptos (difusos y formales) puede ser el mismo. El paso de categorías difusas a formales tiene su similitud con el hecho de avanzar desde el nivel visual de van Hiele al descriptivo/analítico (Battista 2007, p. 863).

En relación a la forma en que las personas desarrollan categorías difusas, la teoría que más destaca es la de que las personas desarrollan prototipos. Un objeto pertenece a una categoría si es suficientemente similar a los prototipos (Smith, 1995; Hershkowitz, 1989). Se describen dos formas en las que podrían formarse los prototipos: el modelo abstraccionista y el modelo ejemplar. Según el primer modelo, la experimentación con una serie de ejemplos de la categoría permite abstraer las características de la categoría que se producen con más frecuencia en una representación del prototipo. Según el modelo ejemplar, los ejemplos de categoría se abstraen para formar una representación de un conjunto de ejemplos discretos, sin descomponer en atributos. Según Battista (2007, p. 864), los investigadores, en general, son más partidarios del modelo ejemplar. De este modo, en la observación del aprendizaje de las formas geométricas por parte de los alumnos, resulta habitual que estos formen prototipos limitados, que no atiendan a atributos espaciales importantes y que centren su atención en características particulares.

Siguiendo con la relación entre los conceptos difusos y formales, el trabajo de Vygotsky (1986) puede aclarar algunas cuestiones. Según este autor, la capacidad en los niños para definir los conceptos espontáneos (difusos) en palabras aparece mucho después de haber "adquirido" los conceptos. Sin embargo, el desarrollo de conceptos formales comienza normalmente con su definición verbal. Aunque los conceptos científicos y espontáneos se desarrollan en sentidos opuestos, los dos procesos están estrechamente conectados. "Los conceptos científicos crecen en sentido descendente a través de conceptos espontáneos; los conceptos espontáneos crecen hacia arriba a través de conceptos científicos" (p. 194).

La clasificación también se halla relacionada con el aprendizaje y formación de conceptos, tal y como muestran De Villiers (1994) y Jones (2000). La distinción entre las clasificaciones jerárquicas, que utilizan definiciones *inclusivas,* y las particionales, que utilizan clasificaciones exclusivas, pone de manifiesto este hecho. Aunque las clasificaciones particionales son más espontáneas y naturales, la clasificación jerárquica proporciona una serie de ventajas (De Villiers, 1994, p. 15) al conducir a definiciones de conceptos más económicas, sugerir definiciones y nuevas proposiciones, facilitar la construcción de esquemas conceptuales útiles para la resolución de problemas y proporcionar una perspectiva global. Por lo tanto, desde el punto de vista de las matemáticas resultan más interesantes las clasificaciones jerárquicas. El trabajo de Jones (2000, p. 80) pone de manifiesto que la geometría dinámica es un marco adecuado para superar algunas de las dificultades encontradas en la clasificación jerárquica de determinadas figuras.

Otra característica que tiene influencia en la construcción de conceptos, aportada por Hershkowitz (1990, p. 84), se refiere a los diferentes tipos de patrones de ideas erróneas. Así, esta autora distingue entre: a) ideas erróneas que los estudiantes se resisten a abandonar y que por tanto tienen el mismo patrón de incidencia en un curso y en el siguiente; b) ideas erróneas que los estudiantes corrigen con la adquisición del concepto; y c) ideas erróneas que los estudiantes incrementan con la adquisición del concepto.

La posición teórica que adopta Presmeg (1992, p. 596) se centra en conocer de qué maneras la imaginería visual ayuda a la abstracción matemática, para lo que se apoya en los constructos de Lakoff (1987) y Lakoff y Johnson (1980), "imágenes prototípicas" que subyacen en las metáforas y metonimias e "imagen-esquema" de Johnson (1987) (relacionado con su constructo "imagen de patrón"). Las imágenes prototípicas pueden ser usadas de una forma metafórica, por ejemplo cuando se usa la imagen de una balanza en la solución de ecuaciones algebraicas. Lakoff (1987, p. 79) define metonimia como "una situación en la que una categoría o miembro o submodelo se usa (a menudo para una propósito limitado e inmediato) para comprender la categoría en su conjunto". El uso de la metonimia suele realizarse a través de una imagen o un diagrama, los cuales por su naturaleza representan un caso concreto. Por ejemplo, los teoremas en geometría euclidiana suelen ser recordados por los estudiantes mediante imágenes estándar de diagramas. Presmeg (1992) encontró en sus visualizadores dificultades con este tipo de representaciones debidas o bien a que no reconocen la figura porque no se acerca al prototipo, o bien a que la figura presenta propiedades extrañas que no aparecen en el caso general. Si se considera que el potencial de la imaginería en matemáticas deriva del hecho de que puede ser usada para representar situaciones abstractas (Paivio, 1971, p. 483), Presmeg (1992, p. 603) afirma que es posible hacerlo de dos formas: la primera "concretizando el referente, esto es, haciendo que una imagen visual concreta sea portadora de información abstracta (…) y la segunda mediante el uso de imágenes de patrones que expresa la esencia misma de la estructura sin detalles".

En el modelo de formación de conceptos matemáticos descrito por Presmeg (1992, p. 607) las imágenes de patrones, como base de los conceptos matemáticos, son la única construcción propia de los individuos y no es accesible a otros. Sin embargo, estas construcciones están basadas, en una cantidad más o menos elevada, en imágenes concretas que surgen de experiencias matemáticas y que pueden haber sido compartidas con otros.

Breen (1997, p. 99) subrayó la dimensión afectiva asociada con la imaginería al mostrar dos tipos de imaginería dinámica con estudiantes de educación matemática, las imágenes propiamente matemáticas y aquellas que tienen una naturaleza educacional más personal. Las primeras tienen un poder universal y atemporal, proporcionando acceso directo a conceptos matemáticos con independencia del contexto (llamadas por el autor imágenes canónicas). Estas imágenes canónicas llevan a los alumnos a alcanzar un consenso, el mismo punto final acordado. Sin embargo, las imágenes con sesgo educacional, aunque pueden ser universales, podrían ser interpretadas de manera que condujesen a conclusiones diferentes. Esta autora incluso se refiere a situaciones en las que el fracaso del estudiante en matemáticas tiene raíces psicológicas, en el sentido de que algunas imágenes evocan situaciones que no le permiten avanzar.

Los resultados de Deliyianni, Elia y Gagatsis (2009, p. 703), en estudiantes de primaria y secundaria, muestran diferencias significativas entre esos dos niveles en cuanto a comprensión de figuras geométricas en todas sus dimensiones. Para los estudiantes de primaria la figura geométrica es un objeto de estudio y validación y para los de secundaria es un soporte para el razonamiento.

1.4.2.4. Procesos y estrategias

Desde el punto de vista de la educación matemática cuando hablamos de visualización podemos distinguir dos aspectos de la misma: el "nombre" de visualización hace clara referencia al producto, al concepto, a las imágenes mentales, "el verbo" nos lleva hacia el proceso, a la actividad, al cómo de la visualización (Bishop, 1989, p. 7). Este segundo aspecto es bastante complejo y difícil de estudiar, pero muy interesante desde el punto de vista de la educación.

El modelo de Burden y Coulson (1981) se basa en que toda estrategia de resolución de un determinado ítem espacial obedece fundamentalmente a tres características: el modo de representación, aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención y los medios concretos auxiliares utilizados por el sujeto durante la resolución del ítem espacial. Estos investigadores distinguen tres modos de representación utilizado por el sujeto:

1. Modo Visual. Cuando el sujeto necesita formar una "imagen mental" en el curso de la realización del ítem espacial, la estrategia cognitiva que utiliza se clasifica como "estrategia visual" o de "modo visual".
2. Modo Verbal. Cuando un sujeto no necesita hacer uso de una "imagen mental" en el curso de la resolución de un ítem espacial, la estrategia que utiliza se considera entonces como una parte de la categoría de "estrategias verbales" o de tipo verbal. Algunos autores prefieren referirse a este tipo de estrategias como analíticas o lógico matemáticas más que estrategias verbales.
3. Modo Mixto. Cuando en el curso de la resolución del ítem espacial el sujeto puede emplear ambas estrategias.

En cuanto al modo de concentrar la atención del sujeto ("Proccesing focus"), Burden y Coulson (1981) distinguen dos modos en que los alumnos dirigen su estrategia:

1. Modo Global. Si cuando el sujeto resuelve un ítem espacial, su estrategia se dirige al objeto considerándolo globalmente, se dice que utiliza una "aproximación global" o "de tipo global".
2. Modo Parcial. Si cuando el sujeto resuelve un ítem espacial, su estrategia se dirige al objeto considerándolo parcialmente, se dice que utiliza una "aproximación parcial" o "de tipo parcial".

Los medios concretos auxiliares utilizados por el sujeto durante la resolución del ítem espacial hacen referencia a los movimientos realizados por ciertos sujetos desplazando sus lápices en el aire, al tomar notas, si inclinan sus cuerpos o cabeza un cierto ángulo, etc.

A partir de este modelo, Lahrizi (1984) construye una matriz de estrategias cognitivas, pero considerando únicamente el modo de representación utilizado por el sujeto y el modo en que el sujeto concentra su atención. Este es uno de los instrumentos que Cosío (1997) toma en su investigación para evaluar la habilidad de visualizar el espacio.

Gorgorió (1998) adapta su investigación al planteamiento de Paivio (1971), quien propone tres variables que pueden influir en la cantidad de imaginería visual utilizada por una persona cuando interpreta una tarea: las características de la tarea; la medida en que el tipo de pensamiento es especificado en la definición de la tarea, y los diferentes modos de procesamiento usados por los individuos.

El objetivo principal de la investigación de Gorgorió (1998) fue determinar bajo que condiciones son utilizadas las estrategias visuales y las no visuales, así como analizar su efectividad para resolver tareas geométricas que requerían rotaciones espaciales. Según esta autora, resulta muy probable que en la contribución de las estrategias visuales y las no visuales a la habilidad del procesamiento espacial estos dos tipos interactúen de forma continua en aquellas tareas relacionadas con la geometría que involucran imágenes (p. 211).

Tomando como punto de inicio el estudio de Burden y Coulson (1981), y modificándolo para ajustarlo a los objetivos de Gorgorió (1998, p. 211), las estrategias de los estudiantes son analizadas desde tres puntos de vista, que no corresponden a tres tipos de estrategias cognitivas sino a tres aspectos diferentes de la estrategia de resolución del estudiante: la estructuración de la estrategia (structuring strategy), el procesamiento de la estrategia (processing strategy) y el centro de atención de la estrategia (approaching strategy).

Para realizar el estudio de la estructuración de la estrategia se consideraron las estrategias cognitivas de los estudiantes desde el punto de vista de las diferentes formas mentales de orientar la tarea, de organizarla y de las fuentes utilizadas para sobrellevarla.

Al analizar el procesamiento de la estrategia, la estrategia cognitiva del estudiante se consideró desde el punto de vista de su representación mental. Al igual que en el estudio de Presmeg (1986b), lo que determina el tipo de estrategia de procesamiento es uso o no de imágenes visuales como una parte esencial del proceso de resolución. Así, Gorgorió (1998, p. 212) sólo considera dos tipos de procesamiento de estrategia, obtenidos a través de las explicaciones del estudiante y de la forma de observación:

- Estrategia *visual*, cuando el método de resolución del estudiante se basa esencialmente en el uso de imágenes visuales.
- Estrategia *no visual*, cuando el estudiante hace explícito que ha usado un argumento y que no contó con imágenes visuales cuando resolvió la tarea.

La aproximación de la estrategia del estudiante se determinó analizando dónde se centraba su atención a la hora de resolver la tarea, mirando el objeto geométrico o la situación. De esta manera, las estrategias se caracterizan como *globales* o *parciales* de acuerdo con el centro de atención de la estrategia mental sobre el objeto geométrico. Se considera que un estudiante ha utilizado una estrategia de aproximación global cuando su estrategia cognitiva se centra en el objeto considerado como un todo; mientras que si su estrategia cognitiva se centra sólo en algunas partes del mismo, se considera que el estudiante usa una estrategia parcial.

Otra de las metas del trabajo de Gorgorió (1998, pp. 213-214) fue analizar *la acción requerida*, que supuso una de las características de la tarea que resultó más significativa a la hora de afectar a las estrategias utilizadas por los estudiantes. Esta característica se refiere a la acción a ser realizada por el sujeto con el fin de resolver la tarea y que puede ser de interpretación o construcción:

- "La acción requerida es considerada *de interpretación* cuando el estudiante tiene que adquirir significado u obtener información desde un objeto o una representación" (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990, p. 8). Se requiere que el estudiante reaccione ante una acción geométrica que se presenta como terminada. Por ejemplo, si se da un ítem de elección múltiple en el que el sujeto tiene que seleccionar el dibujo que representa el resultado de una cierta transformación geométrica.
- "La acción requerida es *de construcción* cuando el estudiante tiene que generar un nuevo objeto, construyéndolo o representándolo" (Leinhardt et al., 1990, p. 12). Dado un objeto inicial, el estudiante tiene que generar el objeto final (real o imaginario) mentalmente o a través de la manipulación. Es frecuente que este tipo de acción se apoye en algún tipo de interpretación.

Una de las hipótesis del trabajo de Soto-Andrade (2008, pp. 5-6) es que "La visualización es provocada por la activación de metáforas previas que implican un cambio de modo cognitivo del estudiante". Este autor entiende por modo cognitivo nuestra forma preferida de pensar, percibir, recordar, de conocer y que aparece por sí misma cuando estamos resolviendo un problema. Se puede hablar de cuatro modos cognitivos que son resultado de combinar dos dicotomías: verbal/no verbal y secuencial/no secuencial (relacionados con el hemisferio del cerebro derecho e izquierdo y el frontal y occipital). Ese cambio de modo cognitivo que se produce con la activación de las metáforas se mueve desde el verbal al no verbal (visual) y finalmente, desde el secuencial al simultáneo. Otra hipótesis que formula este autor es que tanto la visualización como el uso de metáforas y la cognición multimodal se pueden enseñar, especialmente trabajando en grupos. En el primer ejemplo que nos muestra este autor,

¿cuánto es $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4$? una de las metáforas cruciales que se activa es "el producto es área", otra es "las fracciones son porciones" y finalmente entra en juego "añadir es poner juntos". Sus estudios han constatado que, a partir de 5º grado, los alumnos son incapaces de avanzar en visualización debido a que la instrucción recibida, basada en una educación matemática tradicional, reprime la visualización y fomenta los métodos memorísticos.

Duval (1995, pp. 145-147) distingue cuatro tipos de aprehensión cognitiva (perceptiva, secuencial, discursiva y operativa), cada una con sus leyes de organización y de procesamiento. Así, la *aprehensión perceptiva* hace referencia a cuando reconocemos algo en el plano o en profundidad a primera vista, lo que nos permite nombrar lo que estamos viendo y reconocer y discriminar en dicha figura percibida varias subfiguras. La *aprehensión secuencial* se requiere cuando en preciso construir una figura o describirla, ya que las unidades figurales emergen siguiendo un orden específico que depende de las limitaciones técnicas, las cuales pueden cambiar al variar las herramientas de construcción, y no de leyes perceptivas. La *aprehensión discursiva* describe la necesidad de que un dibujo venga acompañado de un discurso para que no se convierta en una representación ambigua, de manera que todo el mundo pueda ver las mismas propiedades. Por último, la *aprehensión operativa* es la que permite obtener una visión de la solución cuando estamos mirando una figura. Esta aprehensión depende de varias formas de modificar una figura (mentalmente o físicamente), que confieren a las imágenes una función heurística. Estas funciones son: dividir la figura en partes de varias formas y recombinarlas (the mereologic way), alargar o estrechar (the optic way) y cambiar de posición u orientación (the place way). Como para cada figura hay diferentes modificaciones/operaciones posibles, más o menos visibles o más o menos complejas, que se puedan llevar a cabo, lo que interesa es saber cuál es la operación relevante que conduce a la solución del problema. Este fenómeno depende de varios factores que desencadenan o inhiben dicha operación relevante y que dependen del problema planteado. Este autor enuncia varios factores de los que depende la visibilidad de una reconfiguración pertinente (Duval, 1995, p. 149):

- La partición en subfiguras relevantes incrustadas está dada en la figura inicial o hay que buscarla.
- La figura reconfigurada puede estar fuera del contorno de la figura inicial: el marco de la figura inicial puede o no cambiar.

- La figura reconfigurada puede o no ser convexa.
- Las subfiguras que tienen que ser combinadas con el fin de lograr la nueva figura pueden o no ser perceptivamente complementarias, es decir, combinables para formar formas familiares como el cuadrado, círculo, etc.
- Un doble uso de una subfigura puede ser o no necesario, es decir, el mismo objeto puede ser usado simultáneamente como dos objetos diferentes en la misma operación de razonamiento o comparación.

La investigación llevada a cabo por este autor con estudiantes de 15-16 años muestra que la visibilidad de operaciones pertinentes en procesamientos figurales heurísticos influía en los resultados obtenidos, además de afectar al tiempo de aprehensión operativa. Por otro lado, una de las mayores dificultades para los alumnos se encontraba en el doble uso de una de las subfiguras.

Según Duval (1995, p. 155) "La aprehensión operativa no trabaja independientemente de las otras, particularmente de la aprehensión discursiva, sino que usualmente el procesamiento heurístico figural está subordinado a esa aprehensión". Asimismo, el contraste entre la representación física de un objeto (un dibujo en papel o en una pantalla) y la imagen mental de ese objeto no es la característica más importante desde el punto de vista de las figuras geométricas ya que tienen la misma complejidad cognitiva. Las figuras pueden ser internalizadas y las imágenes pueden hacerse manifiestas.

Gal y Linchevski (2010, p. 166) analizan las dificultades implicadas en los procesos figurales del aprendizaje de la geometría a través de tres fases (Anderson, 1995): la organización perceptiva, la fase de reconocimiento y la fase de representación. La primera es una fase temprana en la que formas y objetos se extraen de la escena visual. Esto autores muestran como los principios de la Gestalt de la organización perceptiva pueden ser utilizados para explicar algunas de las dificultades encontradas en tareas geométricas. Por ejemplo, en una actividad en la que se pide identificar un par de ángulos adyacentes suplementarios en una configuración formada por segmentos o líneas, algunos alumnos fallaron porque para encontrar la descomposición adecuada tenían que romper con el principio de continuidad (p. 168).

En la siguiente fase, la de reconocimiento, la forma y objetos, una vez percibidos, son reconocidos. El objeto es dividido en sub-objetos cada uno de los cuales es clasificado para posteriormente, cuando esas piezas y su configuración están determinadas, el objeto se reconoce como un patrón compuesto por dichas piezas (Gal y

Linchevski, 2010, p. 170). El reconocimiento de esos patrones se puede realizar mediante un proceso de abajo-arriba o de arriba-abajo. El primero utiliza, para el reconocimiento del patrón, la información desde el estímulo sensorial físico. El segundo proceso ocurre cuando el contexto o el conocimiento general guían la percepción. Por ejemplo, cuando un prototipo de ángulo recto es identificado se realiza mediante el proceso de abajo-arriba; mientras que cuando está representado el signo convencional de un ángulo recto (pequeño ángulo recto) en un triángulo y se reconoce, se usa el proceso de arriba-abajo. Según estos autores, el sentido espacial y las capacidades espaciales de Hoffer (1977) y de Del Grande (1990) y las habilidades de visualización de Gutiérrez (1996a), tienen que ver con los aspectos de organización y de reconocimiento visual de patrones. Además, esas dos fases se pueden relacionar con el proceso IFI de Bishop (1983).

La última fase, la fase de representación, ocurre cuando, una vez que los objetos son reconocidos, se representan en la mente. Estos autores se restringen a la representación del conocimiento basado en la percepción, es decir, la que está basada en retener la mayor cantidad de detalles de la figura original percibida, y no se refieren al conocimiento en términos de significado que Presmeg (1992, 1997) integra en sus imágenes de patrones. Este conocimiento es analizado desde tres perspectivas: verbal versus representación pictórica, imágenes mentales y estructura jerárquica de las imágenes. La información verbal y la visual están almacenadas en distintas partes del cerebro y, además, la primera se almacena en orden lineal y la segunda de acuerdo con la posición espacial. "Los conflictos entre estas dos formas de información pueden producir dificultades en datos escritos, lectura de datos y comunicación entre profesor y estudiante" (p. 173). Por ejemplo, al situar en el vértice de un ángulo una letra que en la representación verbal va antes que las demás, la convención matemática de poner la letra que representa el vértice en el medio es abandonada. En cuanto a las imágenes mentales, en geometría, por ejemplo, los problemas son más difíciles si el número de transformaciones mentales que hay que aplicar a una determinada figura aumenta. También la forma en que los estudiantes descomponen imágenes de figuras bastante complejas puede afectar a su habilidad para resolver problemas geométricos.

Battista y Clements (1998, p. 503) definen la *estructuración espacial* como "la operación mental de la construcción de una organización o forma para un objeto o conjunto de objetos. La estructuración espacial de un objeto determina su naturaleza o forma identificando sus componentes espaciales, combinando componentes en compuestos espaciales y estableciendo interrelaciones entre ellos". Estos autores afirman que, en tareas de disposiciones rectangulares de cubos, los estudiantes inicialmente conciben esas disposiciones como un conjunto no coordinado de caras, cuentan todos o un subconjunto de caras visibles de cubos (estrategia C). Otros estudiantes conceptualizan el conjunto de cubos como espacio a llenar, aunque la reestructuración es realizada de forma local, pieza por pieza, de manera que aún no han formado una concepción integrada de la disposición de cubos completa que globalmente coordine sus dimensiones (estrategia B). Los que consiguen una completa y global estructuración de la disposición conceptualizan el conjunto de cubos organizado por capas (estrategia A).

La estructuración espacial precede a la enumeración significativa, al proporcionar la entrada y la organización para el proceso numérico cuando los alumnos están contando disposiciones de cubos y, por otra parte, los intentos de enumerar pueden provocar que el alumno genere una nueva reestructuración espacial. La primera afirmación se puede observar en el hecho de que algunos alumnos utilicen la estructuración por capas para enumerar y esa estructura les ofrece resultados exactos. Sin embargo, la estructura de mezcla de caras lleva a los alumnos que emplean este sistema a errores en el conteo. La investigación de estos autores puso de manifiesto que en tareas de enumerar, los alumnos pueden cambiar su estructura espacial a una más organizada, sobre todo cuando al comparar resultados de una operación de conteo, estos no coinciden. Esta reflexión sobre actos de contar debería ayudar a los estudiantes a estructurar espacialmente una situación, lo que es consistente con las teorías que intentan explicar cómo se forman las imágenes mentales.

Según Piaget e Inhelder (1956, p. 79), "la reconstrucción de formas descansa sobre un proceso activo de poner en relación, por lo tanto implica que la abstracción está basada en las propias acciones del niño y surge a través de su coordinación gradual".

1.4.2.5. Preferencia del método: visualizadores y no visualizadores

Siguiendo a Krutetskii (1976) en la premisa de que todo problema matemático involucra lógica y razonamiento para su resolución, un método es visual si involucra imágenes visuales como una parte esencial del trabajo. Presmeg (1986b, pp. 42-43) define un *visualizador* como una persona que prefiere usar métodos visuales al tratar con problemas matemáticos que pueden ser resueltos por ambos métodos, mientras que un *no visualizador* es aquel que los resuelve por métodos no visuales. Esta autora define *profesor visual* como aquel profesor que usa una enseñanza altamente visual, mientras que el que usa poca visualización en su enseñanza es un *profesor no visual*.

Partiendo de la clasificación anterior, una línea de investigación se ha interesado en estos estudiantes que sobresalen en la visualización, los llamados visualizadores. Gracias a los trabajos de Krutetskii (1976), Lean y Clements (1981), Moses (1977), Presmeg (1986b) y Suwarsono (1982) sobre este tema, se ha podido observar que los estudios psicométricos y factor-análisis sobre habilidad espacial eran bastante estériles y no eran adecuados para estudiar procesos de visualización (Guay, McDaniel y Angelo, 1978). Fue Suwarsono (1982) quien desarrolló un procedimiento según el que cada estudiante resolvía un conjunto de problemas y después indicaba cuales de un conjunto preparado de métodos de resolución típicos correspondían con el método realmente utilizado. El conjunto preparado difería en el grado de procesamiento visual.

La investigación de Lean y Clements (1981, p. 296) muestra la tendencia a un rendimiento superior en test matemáticos por parte de alumnos que prefieren el modo de procesamiento lógico-verbal para procesar la información matemática. Sin embargo, esta preferencia podría deberse a una capacidad para la abstracción muy desarrollada que evita la formación de imágenes visuales innecesarias. Además, en su estudio no se analizaron variables no matemáticas, como la motivación del alumno, los hábitos de trabajo y la competencia del lenguaje, que podrían contribuir de manera importante al rendimiento matemático en este tipo de tareas.

De la misma forma, también Presmeg (1986a, p. 301) observó que los estudiantes de secundaria que destacaban en matemáticas casi siempre eran no visualizadores. En su trabajo señala que las razones posibles para explicar este fenómeno pueden deberse a factores externos e internos, y que ambos factores pueden interactuar para producir una preponderancia de no visualizadores entre alumnos de alto rendimiento matemático. Esta autora destaca como primer factor interno la economía lógica de los métodos no visuales. Es decir, los métodos visuales requieren más carga cognitiva (sobre todo si se utilizan imágenes concretas) lo que puede interactuar con el factor tiempo en situaciones escolares. Otro factor interno se refiere a la ventaja de no tener que superar las dificultades de la visualización concreta, implícita en los modos de pensamiento no visuales, y reforzada muchas veces por el currículum escolar. Tal y como observa esta autora, para los visualizadores, la presentación visual ayuda a la comprensión de un tópico cuando se enseña por primera vez; sin embargo, estos se alejan de los métodos visuales a medida que se van habituando al tópico.

En cuanto a los factores externos, Presmeg (1986a, p. 305) señala tres posibilidades. La primera puede estar relacionada con la propia naturaleza de las matemáticas, la cual posiblemente favorezca a los pensadores no visuales, aunque se observó que no es un factor que contribuya a la escasez de visualizadores, al encontrar matemáticos relevantes de tipo geométrico independientemente del área de las matemáticas a la que se dedicaron. Además, según Krutetskii (1976, p. 316), a pesar de que existe una correlación entre el *tipo analítico* y su éxito en el aprendizaje del álgebra y entre el *tipo geométrico* y el aprendizaje de la geometría, no resulta muy creíble pensar que el tipo analítico se manifiesta sólo en álgebra y el geométrico en geometría. La segunda se refiere a la limitación de tiempo en los procedimientos de evaluación, en los cuales se observa una oposición al uso de métodos visuales por consumir más tiempo. Por último, se sugiere que los libros de texto y los métodos de enseñanza favorecían a los no visualizadores en la medida en que la mayoría de los profesores no eran conscientes de las dificultades inherentes a la cognición visual y de la forma de superar esas dificultades (Presmeg, 1986a, p. 309).

Una de las razones que nos da Woolner (2004, p. 450) para intentar explicar cuál es el motivo de que los visualizadores no estén entre los estudiantes de éxito matemático, tiene que ver con que el estilo de aprendizaje preferido por los visualizadores no concuerda con el estilo claramente verbal de la enseñanza y evaluación tradicional. Otra razón se deriva de que las diferencias entre enfoque visual y enfoque verbal pueden derivar en la existencia de distintos tipos de visualizadores. Kozhevnikov, Hegarty y Mayer (2002) argumentan que algunos visualizadores tienden a utilizar imágenes pictóricas concretas que conllevan una serie de dificultades (es el tipo de imágenes menos útil en matemáticas), mientras que otros obtienen el éxito a través de imágenes más abstractas que requieren de más habilidades espaciales. De ahí que los visualizadores puedan tener alta o baja capacidad espacial.

Kruteskii (1976) reconoce que la habilidad para percibir de forma clara imágenes mentales puede constituir una ventaja para el aprendizaje de las matemáticas, aunque no resulta necesario recurrir al pensamiento visual para tener éxito en la matemática escolar. Además, la investigación llevada a cabo por este autor muestra que muchos estudiantes que tienen la capacidad de usar métodos visuales en ocasiones no los utilizan.

Por otra parte, la investigación de Presmeg y Bergsten (1995) sugiere que la afirmación de que a la mayoría de los estudiantes no les gusta el pensamiento en términos de imágenes (Eisenberg, 1994, p. 110) no se puede interpretar desde el hecho de que los estudiantes no usen este modo de procesamiento. En realidad, en su investigación encontraron estudiantes que si tienen la oportunidad prefieren utilizar la visualización.

Eisenberg (1994) toma de la teoría de Chevallard (1985) el aspecto de la linearización para explicar esta reticencia de muchos profesores y estudiantes a usar métodos visuales. La teoría didáctica de Chevallard (1985, p. 16) se basa en que el conocimiento científico es diferente del que se enseña en la escuela, ya que el primero debe ser adaptado para que pueda ser aprendido (transposición didáctica). Según esta teoría, la preparación didáctica del conocimiento implica la formulación de un texto lineal que estructura el conocimiento. Siguiendo esa afirmación, los diagramas son procesados de forma lineal y sólo después de haber sido procesados pueden representar el conjunto entero. Sin embargo, el procesamiento visual usa representaciones diagramáticas, por lo que los profesores deben presentar la información secuencialmente.

Breen (1997) describe esos dos tipos de pensamiento matemático en términos de tendencia hacia la abstracción o hacia la comprensión intuitiva, siendo este último el que subraya los procesos de visualización e imaginería. Como en la mayoría de las escuelas se pone el énfasis en el desarrollo del primer modo, el formal, esto podría explicar la reticencia de los estudiantes al uso del pensamiento en términos visuales. Sin embargo, esta afirmación ha sido cuestionada por varios autores (Wheatley y Brown, 1994; Presmeg, 1985).

Los resultados del estudio de Stylianou (2001, p. 230), realizados con matemáticos y estudiantes universitarios, sugieren que esta reticencia al empleo de la visualización está cambiando, debido en parte a las reformas de los currículos que están incidiendo más en las representaciones visuales y al mayor acceso que tienen los estudiantes a la tecnología gráfica. Tanto los matemáticos como los estudiantes perciben las representaciones visuales como una herramienta válida que intentan utilizar en la resolución de problemas en cualquier área de las matemáticas. Sin embargo, estos cambios, en relación a los estudiantes, pueden estar sólo en la superficie ya que a pesar de que puedan estar dispuestos a utilizar formas de representación visual, carecen de entrenamiento en este tipo de habilidad, lo que implica que la descarten. Por su parte, los expertos hacen mayor uso de las representaciones visuales durante la resolución de problemas que el que le presuponen como herramienta útil.

Presmeg (1986b, pp. 44-45) pretende identificar las limitaciones y la fuerza del procesamiento visual tanto a la hora de basar la enseñanza en una "enseñanza visual" (aquella que involucra formación y uso de imágenes visuales del profesor, de los alumnos o de ambos) cómo en la elección de un método visual en situaciones de resolución de problemas. Teniendo en cuenta su clasificación de las imágenes visuales (véase Sección 1.2.1), la investigación confirma las limitaciones de las imágenes descritas ya en la literatura psicológica (Paivio, 1971) y añade alguna dificultad experimentada por los visualizadores:

- Los diagramas o imágenes concretas pueden hacer pensar en detalles irrelevantes o incluso introducir información falsa. Por ejemplo, si unas líneas parecen paralelas en un diagrama se pueden tomar como paralelas.
- Una imagen de una figura estándar puede inducir a un pensamiento rígido que impida el reconocimiento de un concepto en un diagrama no estándar.
- Una imagen incontrolable puede persistir de tal modo que impida la apertura a caminos más fructíferos de pensamiento. Esta dificultad es más acusada cuando la imagen es vívida.
- Las imágenes que no se apoyan en un proceso de pensamiento analítico riguroso, sobre todo si son vagas, pueden ser inútiles.
- Los métodos visuales, por lo general, consumen más tiempo que los no visuales.
- Los visualizadores tienen dificultad a la hora de comunicar los conceptos de matemáticas a través de las entrevistas, recurriendo a gestos o dibujos de diagramas.

En cuanto a la eficacia del procesamiento visual, esta autora ha visto que reside en los siguientes aspectos:

- Las imágenes vívidas de todo tipo tienen unas grandes ventajas mnemotécnicas.
- Las imágenes concretas son efectivas al ser alternadas con modelos abstractos no visuales (análisis, lógica).
- Las imágenes dinámicas son potencialmente efectivas.
- El uso de imágenes utilizadas como una función abstracta, bien concretizando el referente o utilizadas como imágenes de patrones, fueron totalmente efectivas.

Las conclusiones de Presmeg (1986b, p. 46) muestran que los profesores visuales realizan más conexiones entre el currículo de matemáticas, otras áreas y el mundo real, de manera que expresan rasgos asociados a la creatividad. Además, estos profesores son más positivos hacia métodos visuales aunque no siempre son capaces de hacer un uso óptimo de la potencia de esos métodos ni de lograr que los visualizadores superen las limitaciones del pensamiento visual. Los profesores no visuales adoptan un estilo de docencia basado exclusivamente en la enseñanza formal, lógica y rigurosa. En cuanto al estilo de enseñanza, la enseñanza no visual tuvo un efecto inhibidor en el aprendizaje de los visualizadores. Los profesores del grupo medio, a menudo usan métodos visuales pero enfatizan la abstracción y la generalización, aspecto que ayudó a muchos visualizadores a superar dificultades asociadas a imágenes o diagramas concretos.

Por su parte, Woolner (2004, p. 455) no encontró ningún indicio de interacción entre el estilo de enseñanza y el estilo de pensamiento (visual o no) preferido por los estudiantes. Independientemente de los grupos de enseñanza en el que estaban, los visualizadores compartían su fracaso para mejorar sus resultados del pre test realizado y, además, todos ellos avanzaban con dificultad.

Se ha sugerido que los problemas de los visualizadores provienen de una falta de equilibrio entre la comprensión visual y verbal. Según Sierpinska (1994), es muy importante la flexibilidad del pensamiento matemático, a la vez que afirma que los métodos visuales de muchos matemáticos se encuentran en equilibrio con los métodos verbales y soportados por éstos. Sin embargo, las investigaciones hechas sobre los visualizadores en las escuelas muestran que no existe tal equilibrio.

De igual manera, tanto Krutetskii (1976) como Presmeg (1986a) coinciden en el hecho de que en el aprendizaje de las matemáticas la flexibilidad de pensamiento es un aspecto fundamental de la superdotación matemática. Reforzando lo anterior, Bishop (1980) opina que:

> Una sobre disposición a percibir representaciones mentales claras es antagónica con la adquisición de hábitos de pensamiento muy abstracto y generalizado y si esa facultad de producirlas nunca es poseída por hombres que piensan mucho es muy probable que se pierda por desuso. Es probable que las grandes mentes sean aquellas en las que no se pierde y, aunque subordinada, está lista para ser usada en ocasiones adecuadas (p. 1).

Zazkis et al. (1996, p. 435) proponen un modelo que asume que la visualización y el análisis en la resolución de problemas no son opuestos, sino que son mutuamente dependientes el uno del otro. Su estudio, basado en entrevistas clínicas, pone de manifiesto cómo los estudiantes usan estrategias visuales y analíticas que se coordinan para llegar a la solución. Como consecuencia de esta afirmación, consideran que la clásica dicotomía analítico/visualizador no es la más adecuada para describir los procesos de aprendizaje, ya que encontraron componentes analíticas en enfoques visuales y viceversa. Dichos autores analizan esta dicotomía en términos de estrategias, enfoques, y experiencias más que en términos de preferencias individuales, a la vez que intentan mostrar cómo los enfoques analíticos se enriquecen mediante la visualización y como el pensamiento analítico beneficia los enfoques visuales.

Por ejemplo, el trabajo de Eisenberg y Dreyfus (1991, p. 27) muestra que los estudiantes se encontraron con dificultades al resolver un test de cálculo porque no habían aprendido a explotar las representaciones visuales asociadas a los conceptos. En general, eligen un marco simbólico para procesar la información matemática más que un marco visual debido, en gran medida, a que los estudiantes no son capaces de establecer conexiones entre los aspectos analíticos y visuales de los conceptos y procedimientos matemáticos.

1.4.3. FACETA INSTRUCCIONAL

La mayor parte de los trabajos de investigación sobre significado geométrico y espacial se plantean bajo el marco de la teoría del desarrollo cognitivo (Piaget e Inhelder, 1956; Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). Sin embargo, a los educadores les interesan más las cuestiones relacionadas con la intervención de los alumnos, en contextos elegidos, que se enfrentan con problemas particulares revestidos de determinados materiales y secuenciados de manera específica, y los significados particulares frente a aquellas que aparecen en cada etapa concreta del desarrollo del niño. “El educador trabaja dentro de un determinado marco cultural y debe tomar muchas decisiones sobre el contenido y la metodología” (Bishop, 1983, p. 179).

Varios estudios (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Ben-Chaim et al., 1988; Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992; Del Grande, 1987; Johnson y Meade, 1987), indican que la capacidad espacial puede ser mejorada a través de la instrucción. Según Ben-Chaim et al. (1988), “los efectos de la instrucción para incrementar las habilidades de visualización espacial proporcionan evidencia que soporta la noción de que esas habilidades pueden ser enseñadas y aprendidas” (p. 68). Además, una vez que se han adquirido estas habilidades, son duraderas e incluso continúan desarrollándose con el tiempo.

Fey, Atchison, Good, Heid, Johnson, Kantowski, y Rosen (1984, p. 44), declaran que "el enfoque de transformación hace de la geometría una materia dinámica y atractiva que desarrolla las habilidades de visualización espacial y favorece el razonamiento". Esta idea la corroboran Del Grande (1987) y Moyer (1978) a través de sus investigaciones en diferentes etapas educativas.

1.4.3.1. Experiencias de enseñanza y aprendizaje en VRE

Tal y como nos muestra Gutiérrez (1998b, p. 6), hay numerosos estudios que han analizado las componentes específicas de la visualización en la geometría espacial. Varios de ellos se centran en las representaciones planas de objetos tridimensionales como se detallará en los siguientes párrafos.

Gaulin (1985) muestra una interesante colección de representaciones espontáneas de los estudiantes para comunicar, en una hoja de papel, la forma de una serie de sólidos multicubos que les son presentados de forma física. En las respuestas se observa como los alumnos son capaces de crear sus propios códigos de representación, tanto verbales como gráficos. Según este autor, a nivel explorativo, familiarizarse y tener un amplio conjunto de experiencias con varios tipos de representaciones gráficas de formas 3D y sus relaciones, es una condición necesaria para desarrollar la capacidad IFI y también para desarrollar algunos aspectos de la capacidad VP (Gaulin, 1985, p. 67).

También en esta línea, en Hazama y Akai (1993, p. 168) se exponen los resultados de un estudio realizado con estudiantes japoneses para identificar las diferentes etapas de evolución en la habilidad de dibujo en perspectiva de cilindros, cuboides y pirámides. Según estos autores, añadir inscripciones, nombrar las formas de las caras, dibujar líneas de puntos, componer caras o líneas y dirigir puntos de vista, etc. son estrategias empleadas por los estudiantes para controlar dificultades técnicas o conflictos con los que se encuentran al realizar los dibujos de figuras tridimensionales. En Kopelman y Vinner (1994) se analizan las respuestas a tareas de geometría espacial y visualización, de estudiantes de diversos cursos y profesores universitarios, a la vez que se evalúa la influencia de la presentación de los ejercicios en los métodos de trabajo y en los resultados de los sujetos. También Guillén, Jaime, Cáceres y Gutiérrez (1992) y Gutiérrez (1992) han realizado una serie de investigaciones basadas en las formas de instruir a estudiantes de primaria y secundaria en el uso de diferentes modelos de representación de cuerpos tridimensionales.

Bishop (1983) observó las dificultades con las ideas espaciales de estudiantes del primer curso de la facultad de tecnología de Papúa Nueva Guinea. Para ello administró un test que contenía problemas con diagramas y otras representaciones visuales en matemáticas. Se utilizaban los convenios de líneas de puntos ocultos para los bordes, de perspectiva, de sección transversal y de las redes de sólidos. En términos de constructos como *capacidades* y *significado*, su investigación mostró que la dificultad más obvia de los estudiantes en estas tareas estuvo relacionada con la capacidad IFI, basada en la carencia general de experiencias con dibujos reales. La naturaleza general y simbólica y las características generales de los dibujos supuestamente realistas que nosotros usamos motivan que no sean reconocibles al instante para aquellos que no han tenido mucha experiencia con muchos tipos de convenciones visuales y representaciones.

La investigación de Ben-Chaim et al. (1988), se llevó a cabo con una muestra de estudiantes de diferentes lugares y abarcando un amplio rango de estatus socioeconómico. Uno de sus objetivos consistía en analizar los efectos de un programa de instrucción en visualización espacial durante tres semanas. Los estudiantes realizaron actividades con cubos pequeños: crearon y evaluaron diversas construcciones, dibujaron representaciones de las construcciones, analizaron las construcciones desde diferentes posiciones, etc. Las representaciones que se utilizaron fueron vistas bidimensionales planas, vistas tridimensionales de lado y proyecciones ortogonales codificadas. Los resultados de este trabajo (p. 68) indican que antes de la intervención instruccional entre los 11 y 13 años existe una tendencia hacia un incremento de las habilidades de visualización espacial con incremento también en el nivel de grado y, además, sugieren que el momento óptimo para la instrucción es el séptimo grado (11 años de edad).

Los estudios de Mitchelmore (1980a, 1983) tratan sobre los aspectos del entorno material que interactúan de alguna forma con la visualización. Así mismo, diversas investigaciones con materiales manipulativos y estructurados pueden ayudar a fomentar la creación de imágenes mentales y el propio proceso de visualización. Michelmore (1980a, p. 84) nos muestra una clasificación de las representaciones de una serie de figuras espaciales en cuatro etapas de desarrollo, que se pueden relacionar fácilmente con las etapas del desarrollo del concepto de espacio dado por Piaget e Inhelder (1956). Los resultados de su investigación proporcionaron una fuerte evidencia de la generalidad de la descripción de esa secuencia de etapas en la representación de ciertas figuras espaciales, a la vez que observó que esa secuencia se seguía manteniendo tanto si el modelo quedaba a la vista para su representación como si no. Además, los esquemas de los estudiantes mayores eran, en general, más realistas que los de los más jóvenes, debido a que los primeros tienen una idea de espacio más refinado (los estudiantes más jóvenes tienden a dibujar lo que ven y los mayores a dibujar lo que saben). Las etapas de desarrollo de los esquemas de los niños para figuras espaciales no sólo dependen de su nivel general de desarrollo perceptual sino también de de los problemas particulares de representación de cada etapa (Mitchelmore, 1980a, p. 91).

Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996, p. 194) describen una investigación llevada a cabo por el equipo DIDIREM sobre el espacio geométrico y sus representaciones planas en la enseñanza secundaria. Una de las principales ideas de este estudio es que las representaciones planas no son isomórficas a las configuraciones espaciales a las que representan (al contrario de lo que ocurre en la geometría plana), mientras que los modelos sí lo son. Otra idea se centra en el hecho de que las situaciones que involucran pequeños objetos son diferentes de las que implican objetos grandes (micro y meso espacio). Siguiendo a Brousseau (1986), en el microespacio la situación está controlada por los sentidos, las acciones sobre los objetos no requieren mucho esfuerzo y eso ayuda a que la formulación de conjeturas sea más fácil, mientras que en el mesoespacio las acciones sobre los objetos requieren más esfuerzo, siendo este el medio idóneo para favorecer el recurso de la argumentación.

La investigación realizada por este equipo confirma que la perspectiva paralela, en sus variadas formas, es adecuada en este nivel educativo debido, por un lado, a que se preservan importantes propiedades de las configuraciones en los diagramas; por otro lado a que mantiene un parecido aceptable con los objetos representados y ayuda a la construcción de buenas imágenes mentales (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 200). También muestran que el uso habitual de modelos tridimensionales es muy útil para sustentar el razonamiento, así como el hecho de que, con el paso del tiempo, los estudiantes son capaces de prescindir de ese soporte material.

Los estudios llevados a cabo por Parzysz (1988, 1991) muestran, a través de una actividad de representación plana de objetos tridimensionales, que no resulta evidente para los estudiantes que el dibujo de un objeto geométrico, por sí solo, sustituya al objeto. Además, en algunas situaciones propuestas se pone de manifiesto el conflicto "knowing" vs "seeing": así, dependiendo de la representación que hagan los estudiantes, unos estarán inclinados hacia un lado o hacia el otro. Esto permite al autor mostrar a sus estudiantes la necesidad de una serie de indicaciones para ayudar a la lectura de la representación realizada. Este compromiso de "lo que ves" y "lo que sabes" a veces se interpreta como una “mezcla de perspectivas”; aunque en la situación estudiada por Parzysz (1988), este investigador cree probable que el estudiante tenga en la mente la representación como un todo entero y que si hace una representación diferente a lo que está viendo es por su intención de resaltar algún elemento que considera importante para la identificación del objeto representado, “es una cuestión de conocimiento para ser preservado. Entonces, no hay interferencia de dos perspectivas, sino de integración de conocimiento en una única perspectiva” (p. 89). Según este autor existe una tendencia inconsciente a transferir las propiedades geométricas del objeto representado a la representación gráfica y viceversa.

El interés de Parzysz (1991, p. 578) en la relación entre los estudiantes y las representaciones en la enseñanza de la geometría se centran en dos puntos: por un lado las propiedades que desde el punto de vista de los estudiantes debería tener un dibujo de un objeto tridimensional para ser una representación adecuada de ese objeto; y, por otro lado, la influencia de las representaciones gráficas en las concepciones geométricas de los estudiantes. Su investigación confirma, para el primer aspecto, que en el dibujo, la preservación del conocimiento relativo al objeto es un elemento importante para relacionar un sólido geométrico con sus representaciones. En cuanto al segundo aspecto, este investigador mostró en su test que las convenciones utilizadas para las representaciones gráficas (por ejemplo, en el caso de dos planos paralelos, siempre se representan por paralelogramos en perspectiva paralela oblicua) pueden ser una fuente de errores conceptuales si no se dominan.

Gutiérrez (1996c) trabaja sobre cuatro tipos de representaciones planas, que son las más utilizadas en la enseñanza de la geometría espacial: por capas (o niveles), vista lateral (ortogonal) y vista lateral codificada (ortogonal codificada) e isométrica. La representación en perspectiva, trabajada en profundidad por Mitchelmore (1980a), no se considera en este trabajo debido a que presenta importantes diferencias con las otras desde el punto de vista instruccional. En su estudio encontró diferencias importantes en la dificultad entre construir sólidos y dibujar su representación plana, salvo en la representación por capas. De este modo, sus resultados mostraron que dibujar las vistas laterales resulta más fácil que construir un sólido desde ellas, mientras que construir a partir de una representación isométrica es más fácil que hacer dicha representación plana de un objeto. A la hora de construir un sólido a partir de una representación plana, la más sencilla es la representación por capas y las más difícil es la de vistas laterales codificadas. Este autor observó que en la representación por vistas laterales, los estudiantes más jóvenes se encontraban con dificultades provocadas por no tener adquirida la habilidad de identificación (Gutiérrez, 1996c, pp. 39-41).

Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) identifican cuatro niveles de sofisticación a la hora de representar formas tridimensionales en estudiantes. Recogiendo las investigaciones de Gutiérrez (1996c) y de Parzysz (1988), parten de la base de que en la representación plana de objetos tridimensionales hay una pérdida de información que dificulta tanto el análisis de las propiedades de los objetos como el propio reconocimiento de los mismos. La comunicación de información espacial a partir de figuras bidimensionales demanda la aplicación de ciertos convencionalismos, no triviales, que no son enseñados en la escuela tradicional y que son fundamentales para interpretar dichas representaciones planas y poder reconstruir el objeto tridimensional.

Por otra parte, la investigación de Sack y Vazquez (2008) se centra en el uso del lenguaje estándar en las descripciones que los niños hacen de posiciones con objetos tridimensionales. Sus resultados muestran un uso no convencional de términos descriptivos (delante, detrás vertical, horizontal), encontrando una falta de correspondencia del lenguaje descriptivo entre las imágenes vistas en la pantalla de un ordenador (plano vertical) y las que proceden de un libro (plano horizontal). Estas autoras reflexionan sobre el hecho de que el rendimiento de los alumnos en ítems de test estandarizados que usan términos verbales de visualización pueda verse más afectado por la utilización de lenguaje no convencional que por la propia cognición visual (p. 224).

Pese a que la mayor parte de los estudios sobre la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría se centran en la geometría espacial, algunos investigadores, como Orton (1997), se han preocupado por analizar su influencia en el aprendizaje de conceptos de geometría plana. Este autor analiza modelos de reconocimiento de figuras planas en diferentes orientaciones mediante la manipulación mental de las mismas. El objetivo de su trabajo consiste en investigar cómo los estudiantes son capaces de reconocer patrones de percepción que implican reconocimiento de formas, congruencia y simetrías. Sus resultados muestran que los estudiantes de 10 años ya reconocen patrones, pero carecen de vocabulario para poder explicar lo que perciben, y que el éxito va incrementándose con la edad. También se deduce de estas investigaciones que las actividades que implican simetrías rotacionales no siempre fueron más difíciles que las axiales y tanto el ángulo de rotación como la complejidad de la figura son factores adicionales muy importantes para el reconocimiento de patrones. Además se hizo evidente que el marco de referencia puede facilitar mucho la realización de una transformación (Orton, 1997, pp. 310-311).

Mitchelmore (1986, 1992) identificó las dificultades que los tienen niños al representar paralelas y perpendiculares y al localizar estas relaciones en figuras complejas, tanto en figuras bidimensionales como en representaciones planas de figuras tridimensionales. Este autor indica que una de las diferencias entre los dibujos de figuras bidimensionales y las representaciones planas de objetos tridimensionales es que en los primeros existe una correspondencia de uno a uno con el objeto estímulo y en el segundo no. Si tenemos en cuenta que las paralelas y perpendiculares forman la base del sistema de coordenadas rectangular, el conflicto entre paralelas y perpendiculares se pone de manifiesto, de una forma clara, en la representación plana de sólidos rectangulares (Mitchelmore, 1986, p. 301). Es claro que los niños son sensibles a las paralelas y perpendiculares desde edades tempranas, pero su uso efectivo en la representación de objetos no se produce hasta mucho más tarde y siempre bajo el aprendizaje de las convenciones a que está sujeto el dibujo.

Mitchelmore (1992, p. 461) observó que la base sobre la que se asienta la percepción del concepto de ángulo, en particular al considerar líneas paralelas y perpendiculares como una relación angular especial, no está nada clara; que se conoce poco sobre cómo los niños abstraen estos conceptos desde su entorno perceptual y las dificultades a las que se enfrentan. Concluye con la afirmación de que sólo las actividades de dibujo, sin reflexionar sobre ellas, no son suficientes para que los niños desarrollen el concepto de ángulo recto y que, además, la forma de representación estándar en forma de L para el mismo resulta completamente inadecuada. Por lo tanto, el reconocimiento visual de estos conceptos no es trivial.

Mitchelmore y White (2000, p. 221) proponen a estudiantes de primaria nueve situaciones de contextos físicos de ángulos: cuatro movibles (rueda, puerta, tijeras y abanico) y cinco fijas (señal de tráfico, colina, cruce de carretera, azulejo, muro). Los resultados obtenidos por estos autores muestran que, durante el desarrollo de las actividades, se forman agrupaciones de contextos físicos de ángulos que se solapan. Una agrupación incluye aquellas situaciones en las que los dos brazos del ángulo son visibles (muro, azulejo, abanico, señal de tráfico, etc.) que sugieren el concepto de esquina, otra agrupación concentra situaciones de pendiente (colina, señal de tráfico) sugiriendo el concepto de pendiente de una recta y otra consiste en contextos de apertura y giro (rueda, puerta, tijeras y abanico) que conduce hacia el concepto de giro.

Según estos autores, estas agrupaciones están hechas atendiendo a un trabajo empírico más que a una abstracción reflexiva, por ello, estos autores prefieren denominarlos dominios físicos de ángulos mejor que dominios abstractos de ángulos.

La propuesta de White y Mitchelmore (2003, p. 403) para la enseñanza del concepto de ángulo va desde actividades físicas con materiales concretos al concepto abstracto general. Su teoría se basa en la sucesiva abstracción y generalización, así como en tres principios: familiaridad (los estudiantes deben familiarizarse con situaciones donde aparezcan ángulos), reconocimiento de la similitud (la enseñanza debería centrarse en ayudar a los estudiantes a reconocer las similitudes entre esas situaciones) y reificación (las actividades deben llevarse a cabo de forma que la similitud reconocida se convierta en abstracta para que el concepto de ángulo pueda operar por él mismo). Estos autores obtienen que una de las mayores dificultades para la identificación del ángulo en situaciones físicas es el reconocimiento de las dos semirrectas que forman el ángulo. A los niños (7-8 años) no les resulta difícil encontrar aquellos en los que las dos semirrectas son visibles (tijeras, esquinas de una habitación); sin embargo cuando uno de los lados (limpia parabrisas, puertas) o los dos (ruedas, pomos de la puerta) no son visibles, incluso los niños de 12 años pueden llegar a tener problemas para reconocerlos ya que o una o dos de las semirrectas han de ser recordadas. Sus resultados confirman que tras la secuencia de enseñanza a través de esos principios, los estudiantes mejoraron notablemente su comprensión del concepto de ángulo y el reconocimiento de ángulos en contextos físicos.

En muchos casos, los profesores acostumbran a poner más énfasis en las definiciones que en los conceptos, cuando lo que verdaderamente hace más impacto en los alumnos son los ejemplos, produciendo un efecto mental más sólido y duradero como se ha visto en la sección anterior. En ese sentido, el trabajo de Gutiérrez y Jaime (1996) da pautas de cómo analizar y mejorar las imágenes de los conceptos geométricos de los estudiantes. En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las figuras, dibujos o representaciones que ellos recuerdan como ejemplos de dichos conceptos, junto al conjunto de propiedades que el estudiante asocia al concepto. Estas propiedades no siempre son matemáticas, también pueden ser propiedades irrelevantes de tipo físico, sobre todo en estudiantes situados en el primer o segundo nivel de Van Hiele. Tal y como observan estos autores, los estudiantes memorizan una definición y la repiten cuando el profesor les pregunta pero no la utilizan cuando tienen que aplicarla para resolver un problema, lo que pone de manifiesto que la definición expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen de ese concepto en el momento de realización de tareas (Vinner, 1983).

Para la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juegan un papel esencial la propia experiencia y los propios ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como en el extraescolar. Como generalmente esos ejemplos son escasos y poseen alguna característica visual peculiar que los convierte en prototipos, es necesario ofrecer una mayor cantidad de ejemplos a los alumnos y hacer hincapié en los ejemplos relacionados directamente con los errores de sus imágenes de conceptos.

Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996, p. 167), describen tres proyectos centrados principalmente en la perspectiva de la educación visual para la interacción de las formas con el espacio real. Uno de los proyectos es el *programa Adam*, cuyo objetivo principal era "educar el ojo" (p. 169), enlazando el desarrollo de un lenguaje visual con el proceso de desarrollo del pensamiento visual. Este programa contenía 36 unidades (unas centradas en la introducción de conceptos visuales básicos y otras en el desarrollo de determinadas habilidades visuales) que fueron desarrolladas con niños de 3- 4 años continuando con los mismos grupos hasta tercero de primaria.

Otro de los proyectos antes citados era un movimiento conocido bajo el nombre de *educación matemática realista.* El término *realista* ha de ser tomado como un concepto subjetivo, pues no se refiere a situaciones de la vida real sino a aquellas situaciones que para una determinada persona sí lo son. Los matemáticos realistas consideran las matemáticas como una actividad en la que los estudiantes y el profesor deben trabajar juntos para reinventar las ideas matemáticas así como los métodos, siendo la propia reflexión del trabajo una actividad esencial. La educación matemática ha de llevarse a cabo en situaciones que el estudiante pueda identificar y comprometerse activamente a través de la resolución de problemas (p. 177). Presentan una serie de actividades, centradas sobre todo en la orientación en el espacio y en posiciones y relaciones de los objetos, y describen herramientas útiles para su resolución (línea y ángulo de visión, proyección paralela ortogonal u oblicua, etc.), como medios para describir e interpretar el espacio y la forma. Estas actividades van secuenciadas en orden de dificultad con un claro camino hacia implicaciones curriculares.

El tercer proyecto es el que llevó a cabo un subgrupo del equipo DIDEREM (universidad Paris 7) sobre el espacio geométrico y sus representaciones planas en la enseñanza secundaria. Una descripción más detallada de este trabajo se mostró al principio de esta sección, al hablar de las representaciones planas de cuerpos tridimensionales.

Desde el punto de vista de Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), estos tres proyectos muestran una importante contribución a la educación visual: en los tres el punto de partida de la actividad de enseñanza aprendizaje son las formas en el espacio, a los estudiantes se les guía hacia la matematización del entorno visual con el que interactúan y, las herramientas y acciones matemáticas son ricas y variadas, yendo más allá de la identificación y análisis de las componentes y propiedades de entidades visuales, considerando relaciones dinámicas y niveles superiores entre entidades visuales en el espacio.

El estudio de Owens (1992, p. 209) se centra en la escuela primaria y afirma que el enfoque de resolución de problemas tiene un gran potencial para el aprendizaje espacial en esta etapa educativa, ya que fomenta tanto los procesos analíticos como el uso de la imaginería visual. En su trabajo también muestra, a través de extractos de grabaciones, cómo el uso de la imaginería jugó un papel clave en la resolución de problemas que se ponía de manifiesto, sobre todo, cuando los niños manipulaban materiales tanto en 3D como en 2D.

Según Pallascio, Allaire y Mongeau (1993, pp. 8-9), desde la investigación en visualización emergen dos tipos de imágenes mentales, aquellas que pertenecen a un consumo de datos inmediato y que están relacionadas con competencias analíticas (percepción) y las que tratan con la reconstrucción mental de objetos, relacionadas con competencias sintéticas (representación). El trabajo de estos autores pretende mostrar el desarrollo de competencias espaciales a través de una propuesta de actividades que alternen o combinen competencias analíticas y sintéticas. La aproximación a la percepción del espacio geométrico que han adoptado está tomada desde un punto de vista estructural, lo que quiere decir que consideran la internalización cualitativa de un modelo espacial a través del análisis y de la síntesis de sus propiedades topológicas, proyectivas, afines y métricas (los cuatro modos geométricos) (y no desde un punto de vista cuantitativo en el que se consideran las propiedades en términos de relaciones, medidas, proporciones, coordenadas, etc). Desde esta perspectiva, la competencia de las relaciones espaciales que se sitúa en un nivel analítico implica la actividad mental de reconocimiento de formas y sus propiedades (en términos de operaciones intelectuales serían la clasificación, la estructuración y la transposición) y la competencia de la visualización espacial se situaría en el nivel sintético e implicaría la transformación de formas (operaciones intelectuales de transposición, determinación y generación). Estos autores proponen una secuencia de enseñanza (p. 10), diseñada para estudiantes de secundaria, basada en actividades que promuevan el uso entre las operaciones sintéticas y analíticas mientras se fomenta una exploración dinámica. Su investigación ha puesto de manifiesto el papel central de la transposición para realizar el paso de las actividades analíticas a las sintéticas y viceversa. Además, recalcan que una de las mayores dificultades con las que los estudiantes se encuentran es la terminología en la generación de figuras bi y tridimensionales debido a la falta de vocabulario geométrico.

En cuanto al proceso de plegar y desplegar sólidos, este pertenece al procesamiento visual (Bishop, 1989) ya que implica manipulación y extrapolación de imágenes visuales. Según Piaget e Inhelder (1956, p. 272) el desarrollo de sólidos es "algo muy diferente a una simple impresión perceptual (…) entre la percepción y la imaginación se encuentran toda una serie de acciones cada vez más sistematizadas, internalizadas en forma de imágenes". Cohen (2003, p. 229) sugiere que hay una diferencia fundamental en el proceso mental que se necesita para visualizar desarrollos de sólidos curvos frente al que se necesita para desarrollar poliedros, ya que en estos últimos toda la superficie del sólido aparece en la misma forma, mientras que en los primeros (conos y cilindros) hay superficies curvas que tienen un aspecto totalmente diferente cuando se tumban sobre el plano. Según Cohen imaginar estos desarrollos depende en gran medida de las experiencias llevadas a cabo con acciones de plegar y desplegar sólidos, lo que apoya la afirmación de van Hiele de que el nivel de rendimiento geométrico depende más de la experiencia, la enseñanza y el aprendizaje que del desarrollo espontáneo con la edad.

El trabajo de Cohen acepta la idea de Meissner (2001), quien argumenta que un sólido tiene un aspecto estático y procedimental y además es producto y proceso. Como afirmaron Piaget e Inhelder (1956), el desarrollo de un sólido no es como la mayoría de los objetos geométricos ya que es más un objeto concebido que un objeto percibido. De esta manera, siguiendo a Meissner (2001), el término "nets" que emplea en este trabajo para indicar los desarrollos planos de sólidos, sirve como un símbolo que a su vez representa el proceso (plegado) y el objeto (idea de "Procept" de Gray y Tall, 1994).

El objetivo del trabajo de Potari y Spiliopoulou (2001, p. 41) es analizar las construcciones, explicaciones y acciones físicas realizadas los niños cuando se les proponen tareas de desarrollos planos de sólidos con superficies curvas. "El proceso entero de desarrollar sólidos es una construcción mental que requiere del niño no sólo ver los objetos y reconocer sus elementos, sino también combinar estos últimos en una posición transformada y probablemente tener en cuenta el proceso inverso". El desarrollo plano de objetos, es considerado por Fischbein (1993) un excelente contexto para manipular conceptos figurales en razonamiento geométrico. La acción de realizar desarrollos planos de objetos requiere el empleo de dos marcos de referencia, ya que los objetos son tridimensionales y los desarrollos planos bidimensionales (Potari y Spiliopoulou, 2001, p. 45). De este modd, aunque las partes planas del objeto proporcionan un enlace directo entre esos dos marcos, las partes curvas no, dependiendo directamente de la tercera dimensión. Estos autores sostienen que las dimensiones, las proporciones y también la materia de la que estén hechos los objetos, son características que juegan un papel muy importante en la construcción de desarrollos planos cuando los objetos son presentados físicamente y se pueden manipular. Muestran una serie de categorías que describen las diferentes concepciones que los niños tienen del desarrollo plano de un sólido considerando las acciones realizadas para producir esos desarrollos. Sus resultados muestran la coincidencia con los resultados obtenidos por Piaget e Inhelder (1956), así, el desarrollo de las propuestas de los niños se mueve desde un enfoque holístico a uno de naturaleza más sistemática y analítica. Los niños más pequeños suelen producir dibujos que son proyecciones ortogonales de los objetos, mientras que los mayores hacen dibujos geométricos incompletos que ya indican que se está formando el concepto de desarrollo plano; sin embargo, el hecho de que no activen acciones más efectivas que la mental (rotar el objeto o hacer ciertas mediciones) produce dibujos incompletos. Muy pocos niños realizan dibujos geométricos completos y, según estos autores, este hecho puede deberse a la naturaleza de las superficies cónicas o cilíndricas donde la acción de desarrollar los objetos en partes, válida para figuras ortoédricas, no es efectiva.

1.4.3.2. Recursos en la resolución de tareas de VRE

La mayoría de los estudios corroboran el hecho de que el uso de materiales manipulativos facilita la construcción de las representaciones de los conceptos geométricos sobre todo a edades tempranas (Stigler, Lee y Stevenson, 1990; Sowell, 1989; Mitchelmore, 1980b; Owens, 1992). Mitchelmore (1980b) encontró que los estudiantes británicos iban por delante de los estudiantes norteamericanos en capacidad espacial y dibujo tridimensional debido a que los profesores británicos seguían un enfoque más informal de la geometría y utilizaban más materiales manipulativos en la enseñanza primaria y más diagramas en los niveles más altos. Stigler et al. (1990) observaron que el uso de los materiales durante un periodo cortos de tiempo no produce resultados relevantes, mientras que su uso continuado durante períodos más largos sí lo hace. De todas formas, es necesario indicar que dicho uso no resulta suficiente para garantizar un aprendizaje significativo, sino que para ello los estudiantes han de reflexionar sobre el uso de esos materiales y relacionar los modelos manipulativos con sus conceptos informales (Raphael y Wahlstrom, 1989).

Bishop (1980) y Clements y Battista (1992) han observado que la enseñanza específica aumenta la capacidad de los estudiantes para manejar las relaciones entre los cuerpos espaciales y sus representaciones planas cuando se trabaja con materiales manipulativos. Por tanto, es importante prestar atención al desarrollo de las destrezas de realización de las representaciones planas de los estudiantes desde los primeros años de primaria en las dos direcciones de paso del plano al espacio.

Según Sowell (1989), la investigación señala que el efecto de los materiales manipulativos es superior al de las ilustraciones, e incluso en algunos casos la efectividad de los diagramas es equivalente a la instrucción simbólica. Puede ser que la razón de este hecho no se halle en la naturaleza no concreta de las ilustraciones, sino en la imposibilidad de manipularlas, lo que nos lleva hacia el poder de las ilustraciones manipulables a través de entornos informáticos. Guillén et al. (1992) observaron cómo en el caso de ejercicios de movimiento de sólidos, el trabajo con el ordenador requería una reflexión mayor de los estudiantes que con los sólidos reales, obligándoles a hacer conscientes los movimientos y a replanificar sus acciones para desarrollar las habilidades de visualización espacial.

En los trabajos de Guillén et al. (1992) y de Gutiérrez (1991, 1992) se diseñan y experimentan actividades encaminadas a conseguir el desarrollo de algunas de las habilidades de visualización espacial cuando se trabaja en geometría tridimensional. Las actividades intentaban cubrir los tres contextos en los que usualmente se estudia la geometría espacial: cuerpos físicos, representaciones planas estáticas en papel y representaciones dinámicas en el ordenador. Estas actividades se centraron en: identificar representaciones planas de sólidos, mover sólidos, dibujar representaciones planas de sólidos y construir sólidos. El material utilizado para llevar a cabo esas actividades comprendía: objetos físicos (diferentes poliedros de caras opacas o transparentes), cubo decorado con figuras, módulos construidos con cubos encajables Multilink, material informático y material impreso.

Una conclusión que se desprende de este estudio es que los ejercicios de movimiento de cuerpos reales resultaron más fáciles a los estudiantes que los de movimiento en el ordenador. Sin embargo, el beneficio formativo fue mayor en los realizados en el ordenador ya que, al limitar los movimientos de los sólidos a los giros alrededor de los ejes, obliga a hacer conscientes los movimientos y a volver a planificar sus acciones y así desarrollar las habilidades de visualización espacial. El software especial que permite ver diferentes representaciones de sólidos en la pantalla y poder transformarlos, favorece la creación y manipulación de imágenes mentales (Gutiérrez, 1996c, p. 11). Como señala Yakimanskaya (1991, p. 103):

> La creación de imágenes es posible a causa de la acumulación de representaciones que sirven como el punto de partida y como condiciones necesarias para la realización del pensamiento. Cuanto más rico y más diverso es el conjunto de representaciones espaciales, más perfeccionados son los métodos de creación de representaciones y más fácil es usar las imágenes.

Gutiérrez (1996b) y sus colaboradores seleccionaron varios programas de ordenador que permiten representar poliedros en perspectiva y rotarlos alrededor de los tres ejes de coordenadas estándar (vertical, horizontal y ortogonal en la pantalla). Cuando se rota un sólido en el ordenador, la posición de la figura aparece como parte de un continuo de imágenes, permitiendo reconocer diferentes representaciones de dicho sólido. Uno de los objetivos de su investigación era analizar una serie de variables como el tipo de representación de los sólidos, la forma en que el software permite una representación para ser transformada y el rango de las habilidades de los estudiantes requerido para el software y las actividades.

Por otra parte, al igual que en las representaciones bidimensionales de los sólidos, los estudiantes suelen basar sus conclusiones y argumentaciones en la apariencia de los sólidos en la pantalla. Por ello, un objetivo educacional deberá ser enseñarles a interpretar los dibujos proporcionados por el ordenador y a usar el software de forma eficiente.

Pallascio, Allaire y Mongeau (1993) también apuntan la importancia del trabajo manipulativo con objetos tridimensionales tanto para la exploración de las transformaciones geométricas como para la creación y generación de representaciones espaciales de dichos objetos.

> Las competencias espaciales si corresponden a conceptos matemáticos no pueden ser adecuadamente desarrolladas simplemente analizando dibujos y descripciones escritas de objetos tridimensionales. La construcción y manipulación de objetos por los estudiantes es esencial (Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993, p. 11).

También Tall (1991) utiliza el ordenador para fomentar la visualización en la formación de conceptos en cálculo y subraya que la meta no es sólo proporcionar un soporte visual intuitivo sino "sembrar las semillas para comprender las sutilezas formales que ocurrirán más tarde". Kaput (1989) pretende vincular las operaciones concretas y enactivas sobre los objetos en la pantalla con representaciones más formales y abstractas de aquellas operaciones; así, las operaciones visuales de los estudiantes son utilizadas directamente en el proceso de aprendizaje. Yerushalmi y Chazan (1993) han dado a los estudiantes la oportunidad para generar información visual sobre construcciones geométricas e inferir conjeturas desde tal información. Todos los trabajos anteriores intentan vincular las representaciones visuales con las algebraicas.

Uno de los objetivos de los autores anteriormente citados y de Dreyfus (1991, p. 46) en particular, es intentar conseguir el equilibrio entre los pensamientos verbal, algebraico y visual; y la forma de conseguirlo es equiparando el estatus otorgado al razonamiento visual con el razonamiento algebraico formal.

Las investigaciones más recientes sobre el uso de entornos informáticos, que se apoyan en la información de estudios anteriores, han profundizado sobre los procesos de aprendizaje que se producen dentro de los entornos y cómo estos modifican y determinan el aprendizaje de los alumnos. Según Balacheff y Kaput (1996, p. 495), el primer impacto que produce un ordenador es "el cambio de las relaciones entre los estudiantes y la materia y entre los estudiantes y el profesor mediante la introducción de un nuevo jugador". De este modo, el entorno resultante es didácticamente muy complejo, con interacciones entre esos tres elementos.

Battista (2007, p. 865) muestra tres tipos de entornos para analizar formas planas: con base en Logo, Geometric Supposer y Entornos de Geometría Dinámica (EGD). Una de las dos características esenciales de estos entornos es que requieren que los alumnos proporcionen especificaciones explícitas para las formas geométricas para poder hacer dibujos (a diferencia de lo que se hace con papel y lápiz). Las investigaciones muestran que es precisamente esa necesidad la que promueve y apoya la reflexión y abstracción de conceptos geométricos, lo que favorece el movimiento hacia el nivel 2 de van Hiele. Dicha explicidad conceptual que se produce en los entornos informáticos para el aprendizaje de la geometría depende de cuatro aspectos: una compleja interacción entre las órdenes dadas al construir figuras, la disponibilidad de esas órdenes para la inspección del alumno, el razonamiento del alumno, y las instrucciones.

La otra característica principal de estos entornos que facilitan el aprendizaje de la geometría es la *repetibilidad* de los dibujos. Según Laborde (1992, p. 129), "en este tipo de software una condición necesaria para que una construcción sea correcta es que produzca varios (o una infinidad de) dibujos que mantengan las propiedades buscadas cuando se modifiquen elementos variables de la figura". Aunque la repetibilidad se consigue de forma muy diferente en los distintos entornos lo que interesa es saber cómo la utilizan y la conceptualizan los alumnos.

Geometric Supposers

La característica esencial de los programas de construcción *Geometric Supposers* consiste en facilitar la realización, comprobación y justificación de conjeturas, basándose en los ejemplos. La mayor parte de las investigaciones sobre este programa se realizan en un contexto de enseñanza guiada (Wilson, 1993) y, aunque no siempre, estas investigaciones muestran que el uso de estos programas pueden fomentar el aprendizaje de la geometría (Clements y Battista, 1992; Yerushalmy, 1993; Yerushalmy y Chazan, 1993). Así, los alumnos, tras su experiencia con Supposer, utilizaban con más asiduidad diagramas en su pensamiento, usaban los diagramas con flexibilidad, utilizaban muchos diagramas para describir clases de figuras, solían razonar sobre un único diagrama como modelo para una clase de formas y entendían que las construcciones de *Supposer* pueden incluir características que no son compartidas por todos los miembros de la clase de figuras que se están analizando (Battista, 2007, p. 867).

Según Yerushalmy (1993, p. 82) en la generalización geométrica participan tres procesos principales: "formación de muestras de ejemplos que sirven como una base de datos para conjeturas, manipulaciones de las muestras, y análisis de ideas a fin de formar ideas más generales". El uso del Supposer ayuda a los alumnos a utilizar de forma más frecuente y más variada diagramas, a identificar ejemplos no estereotipados, a apreciar la importancia de generar variedad de ejemplos, de formular estrategias de recopilación de datos, etc. Sin embargo, en algunos casos, se observó que los alumnos tenían dificultades para reconocer el tipo de ejemplo a examinar, lo cual supone que tenían ideas ingenuas sobre la validez de las afirmaciones matemáticas.

Logo

La esencia del entorno Logo reside en su poder representacional. Los alumnos utilizan Logo, fundamentalmente, para apoyar el razonamiento analítico y para realizar la transición desde el razonamiento visual/espacial al analítico. Sin embargo, los alumnos a veces no aprenden de manera óptima en estos entornos debido a que sus razonamientos son prácticamente de tipo visual (Battista, 2007, p. 868).

Las investigaciones llevadas a cabo por Clements y Battista (1989), para investigar los efectos del uso del Logo sobre una serie de conceptos geométricos (ángulos, formas y movimientos) en estudiantes de primaria, sugiere que las respuestas del grupo Logo tienden a ser más coherentes matemáticamente y más abstractas que las del grupo de control (p. 466). Otra investigación llevada a cabo por estos autores (Clements y Battista, 1990, p. 356) sobre el efecto del programa Logo tiene como objetivo principal mostrar que las experiencias con este programa incrementa las habilidades de los niños en tareas de resolución de problemas.

En el trabajo de Hoyles y Healy (1997, p. 54), centrado en las simetrías axiales, se muestra cómo el micromundo Logo proporciona una herramienta que permite combinar las relaciones visuales y las representaciones simbólicas, conectando así las intuiciones visuales con la estructura matemática. Además, ayuda a los alumnos a cambiar sus conceptualizaciones de simetría axial, haciéndolas más analíticas, precisas y generales, construyendo nuevos significados para dicho concepto.

Según Battista (2007, p. 873), Logo ofrece descripciones rápidas, exactas y visualmente interesantes de las conceptualizaciones visuales-geométricas de los alumnos. Este programa proporciona y fomenta una forma accesible de analizar formas en términos de medidas de sus componentes, lo que resulta fundamental para pasar del pensamiento puramente visual al analítico.

Entornos de geometría dinámica (EGD)

Según las últimas investigaciones, este es el entorno más utilizado por los profesores de matemáticas en la actualidad. Según recoge Mariotti (2001, p. 257), “En particular, este software hace que el estudio de las configuraciones geométricas y la identificación de conjeturas significativas resulte más accesible para los alumnos”.

Existen dos perspectivas teóricas relativas a la utilización de los EGD para promover el desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos. La primera de ellas considera que las figuras dinámicas, especialmente las arrastrables, generan numerosos ejemplos pues permiten a los alumnos realizar en menos tiempo un número mayor de transformaciones sobre ellas, así como crear figuras más complejas (Marrades y Gutiérrez, 2000, p. 95). La segunda perspectiva considera los dibujos arrastrables como objetos manipulables visuales-mecánicos con limitaciones de movimiento y que pueden ser conceptualizados y analizados geométricamente (Battista 2008b). En este enfoque teórico, más que examinar un grupo de figuras para conceptualizar de qué forma es la misma, los alumnos investigan cómo funciona ese nuevo objeto geométrico. Según Battista (2007, p. 866), muchos investigadores consideran los dibujos arrastrables como representaciones de conceptualizaciones de formas. Estos dibujos arrastrables se construyen para tener unas propiedades geométricas específicas y, por tanto, poseen propiedades adicionales que necesitan las propiedades dadas. Aunque los investigadores acostumbran a ver todas las propiedades contenidas en los dibujos, puede que los alumnos no perciban algunas de ellas e incluso que piensen que esos dibujos arrastrables tienen propiedades específicas y que son entidades geométricas propias.

Desde el punto de vista de la utilidad a los alumnos, estas figuras arrastrables ayudan a desarrollar el entendimiento de las propiedades geométricas. Así, Laborde (1998) señaló con respecto a las propiedades espaciales de dibujos arrastrables que “una propiedad espacial puede surgir como una invariante en el movimiento, mientras que eso podría no ser perceptible en un dibujo estático” (p.117). De esta manera, los dibujos dinámicos ofrecen un fenómeno visual más fuerte que los estáticos.

En el nivel de primaria, las unidades *Shape Makers* centran su atención en que los alumnos pasen de los Niveles 0 y 1 de van Hiele a los Niveles 2 y 3. El aprendizaje de la geometría con el *Shape Maker* es más rico y más sólido que el que se produce con el enfoque tradicional, basado en la memorización. Según Battista (2007, p. 879), esto es debido en primer lugar a que al estar vinculado el aprendizaje con un fin personal, hace que este conocimiento sea más útil y aplicable. En segundo lugar, al estar el razonamiento basado en propiedades que parten de estructuras cognitivas ya existentes, el nuevo conocimiento construido está firmemente anclado y bien conectado con su red de conocimientos, aumentando la probabilidad de que se aplique en la resolución de problemas e, incluso, en la construcción de posteriores conocimientos.

Al trabajar EGD en los niveles medio y alto, además de investigar la manipulación de formas, se les pide a los alumnos que construyan figuras arrastrables y que demuestren las conjeturas que surgen de la exploración. En un estudio de Jones (2000, p. 75) los alumnos tenían que construir un cuadrado arrastrable y argumentar por qué la forma era un cuadrado. Los alumnos empiezan centrándose más en la descripción que en la explicación y basando sus respuestas más en la percepción que en el razonamiento matemático preciso. A medida que se avanzaba en la secuencia educativa, las explicaciones de los alumnos se volvían más precisas, pese a que todavía se mezclaban con el funcionamiento del software de EGD. Al finalizar la instrucción, las explicaciones de los alumnos se habían vuelto completamente matemáticas.

Según Jones (2000, p. 59), una cuestión importante consiste en saber si los alumnos “distinguen características básicas de la geometría a partir de rasgos que son resultado del diseño particular del EGD” y de qué forma lo hacen. Por ejemplo, en Cabri un segmento AB está orientado en el sentido de que A se creó antes que B y eso no ocurre en un entorno de lápiz y papel. Para Battista (2007, p. 878) otra cuestión de investigación es qué geometría aprenden los estudiantes trabajando un problema particular en EGD. En el caso que presentan Holzl, Healy, Hoyles y Noss, (1994), dos alumnos estaban intentando hacer un rectángulo arrastrable en Cabri, según estos autores los alumnos conocían perfectamente las propiedades de los rectángulos pero en su construcción no había ninguna evidencia de ello. En el caso de que sí las conocieran, no se adquiriría ningún conocimiento nuevo, sin embargo, el simple proceso de aplicar conceptos conocidos a una nueva situación, enriquecía y profundizaba su razonamiento y conocimiento, de igual manera que podría ampliar las conexiones entre las propiedades.

Acuña y Larios (2008) abordan dos fenómenos relacionados con la operación de arrastre que obstaculizan una visualización adecuada. El primero surge cuando los estudiantes son incapaces de visualizar todos los momentos intermedios de la transformación, de manera que sólo consideran la construcción hecha antes de ser modificada por el arrastre y la construcción final (esto puede ser considerado como una forma de rigidez geométrica ya que trata con la incapacidad de imaginar cada una de las situaciones intermedias como una posición discreta de la construcción). El segundo fenómeno tiene que ver con la internalización de la propia herramienta y la capacidad de proporcionar un significado matemático coherente. “Para que esta internalización tenga lugar los atributos figurativos deben alcanzar un cierto grado de identificación y fusión con los atributos conceptuales" (p. 7).

El trabajo de Sinclair (2003) resalta la distinción entre los diagramas de los libros de texto y los bocetos en geometría dinámica para poder extraer todos los beneficios de la realidad visual. Según esta autora, la mayor parte de los profesores de geometría informan a sus alumnos de que los diagramas de los libros de texto no son necesariamente exactos (problemas de medida, proporción), con el objetivo de que no basen su argumentos en la apariencia de tales imágenes. Siguiendo estas indicaciones, los alumnos aplican su conocimiento deductivo de teoremas para resolver los problemas en un caso general, lo que conduce, en entornos dinámicos, a que no sean capaces de reconocer las dificultades de crear y analizar un caso especial. De esta manera, los estudiantes que tratan las imágenes dinámicas como modelos de los libros de texto pierden la evidencia visual que podría proporcionar una mayor comprensión de las relaciones geométricas. Esto también es corroborado por la investigación llevada a cabo por Sack y Vazquez (2008, p. 222).

También Markopoulus y Potari (1996) afirman que por medio del uso de software adecuado los niños pueden desarrollar conexiones entre las figuras y sus propiedades, formando relaciones jerárquicas entre clases de formas y facilitando el paso del nivel 1 de van Hiele al nivel 2. En la misma dirección, De Villiers (1998, p. 254), sugiere que la geometría dinámica puede jugar un papel muy importante en la construcción de clasificaciones jerárquicas, debido principalmente al efecto de arrastre que permite ver cómo, por ejemplo, al arrastrar los vértices de un paralelogramo, este se puede convertir en un cuadrado o en un rectángulo, ayudando a ver estos últimos como casos particulares del paralelogramo.

Pratt y Davison (2003) se centran en la enseñanza de la definición y construcción de cuadriláteros a través de Cabri Géometrè en un entorno de pizarra interactiva. Sostienen que un uso adecuado de ese entorno puede facilitar el que la comprensión de los cuadriláteros esté más controlada por el aspecto conceptual que por las componentes visuales, en el sentido de conceptos figurales de Fischbein (1993). En su investigación tratan acerca de las ventajas y limitaciones del uso del Cabri en la construcción de definiciones de cometas. Las ventajas fueron visuales y cinéticas mientras que las limitaciones tenían que ver con imágenes prototípicas. Estos autores concluyen que los prototipos de los estudiantes son recursos útiles para manipulaciones simples de orientación, pero no apoyan definiciones jerárquicas inclusivas (p. 37).

La investigación de Pittalis, Mousoulides, y Antreou (2009) se centró en examinar los procesos de visualización de los estudiantes para construir imágenes visuales dinámicas de formas 3D cuando estaban trabajando en un entorno dinámico. Las representaciones dinámicas de procesos matemáticos pueden favorecer que la mente los manipule de una forma más fructífera que si se trabaja mediante representaciones estáticas. Estos autores hablan de habilidades espaciales dinámicas como aquellas que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento (visualización dinámica). Normalmente, el aprendizaje a través de estos entornos combina representaciones simbólicas, estáticas y dinámicas que pueden ser modificadas de forma interactiva. A su vez, estos nuevos entornos demandan de los estudiantes la necesidad de procesar y relacionar diferentes representaciones, así como controlar y evaluar interacciones con esas representaciones para construir representaciones mentales coherentes. Sus conclusiones afirman que el software permitió a los estudiantes construir imágenes visuales dinámicas, poniendo de manifiesto el gran potencial de estas para mejorar su aprendizaje.

De acuerdo con Battista (2007, p. 884), son necesarias más investigaciones que profundicen en la cuestión relativa a la naturaleza del razonamiento geométrico de los alumnos y en qué sentido el EGD apoya y fomenta ese razonamiento. Al mismo tiempo, es necesario realizar investigaciones cuantitativas y cualitativas combinadas para poder analizar la utilización de EGD en el aprendizaje de la geometría. La investigación cuantitativa es precisa para ver la generalización de los resultados y si el uso de EGD es mejor que el uso del papel y lápiz. En ese caso, la investigación cualitativa nos servirá para indicar cuál es el motivo para la obtención de esos resultados.

1.4.3.3. Demostración

Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen (1996, p. 192), destacan la importancia de la demostración para dar sentido a los razonamientos que realizamos y evitar confiar plenamente en lo que vemos a través de nuestros ojos. En el caso de EGDs, tanto Battista (2007, p. 883) como Laborde (2001, p. 303) señalan que los profesores no están aprovechando la capacidad de estos entornos para apoyar la formulación de una demostración, lo que los lleva a no contemplar la interacción entre visualización y demostración.

Como se ha visto en la Sección 1.4.1., los matemáticos no sólo usan la demostración formal y el razonamiento lógico deductivo basado en axiomas, sino que un gran número encuentran la verdad a través de métodos de naturaleza intuitiva o empírica. Por otra parte, la presentación de resultados matemáticos en términos de demostraciones, aunque es significativa para los matemáticos como método para establecer la validez de las ideas, no lo es para los estudiantes (Usiskin, 1987). Esto último lleva a que nos hagamos preguntas acerca de cómo conseguir que los estudiantes no vean la demostración como un conjunto de reglas formales desconectadas de su actividad matemática personal y, por otra parte, cómo desarrollar en los estudiantes la habilidad para probar ideas formalmente. Según Battista y Clements (1995, p. 50), tanto la teoría de Piaget como la de van Hiele sugieren que los estudiantes pueden comprender y trabajar explícitamente con sistemas axiomáticos sólo después de haber alcanzado los niveles más altos de ambas jerarquías, lo que hace poco probable que el estudio explícito del sistema axiomático sea productivo en la mayoría de los estudiantes de secundaria. Por ello, se debería permitir a los estudiantes el uso de justificaciones visuales y pensamiento empírico; ya que, según estos autores, tal pensamiento es el cimiento para los niveles más altos de pensamiento geométrico (Battista y Clements, 1995, p. 53):

> El camino más efectivo para engendrar un uso útil de la demostración en geometría en la escuela secundaria es evitar la demostración formal durante gran parte del trabajo con los estudiantes. Si nos centramos en ayudar a los estudiantes a construir unos cimientos empíricos y visuales para los niveles más altos del pensamiento geométrico, podemos llegar a conseguir que aprecien la necesidad de una prueba formal. Sólo entonces, serán capaces de utilizarlo significativamente como un mecanismo para justificar ideas.

Según Arcavi (2003, p. 224), la visualización puesta al servicio de la resolución de problemas puede también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa. Así mismo, las representaciones de formas visuales pueden ser elementos legítimos en las demostraciones matemáticas.

Muchos investigadores consideran, sobre todo en el nivel de enseñanza secundaria, que la finalidad de las actividades de construcción en EGD es actuar de puente hacia la justificación y la demostración (Healy y Hoyles, 2001; Mariotti, 2001; Marrades y Gutiérrez, 2000). Mariotti (2001) describe y clarifica el papel del Cabri-Géomètre como mediador en la construcción de la idea de teorema, desde la idea de justificación a la de demostración. Según esta autora, “este software parece hacer que la exploración de configuraciones geométricas y la identificación de conjeturas significativas resulte más accesible para los alumnos" (p. 257). El diseño experimental llevado a cabo por Healy y Hoyles (2001) a través del Cabri para explorar triángulos congruentes e introducir la demostración formal, muestra que el EGD ayudó a algunos alumnos a entender y solucionar algunos de los problemas planteados y a desarrollar demostraciones apropiadas.

Otro estudio que apoya la utilización de EGD en el desarrollo de habilidades de demostración, proporcionando entendimiento y estructura para la demostración, es el de Marrades y Gutiérrez (2000). Estos autores describen diferentes niveles de sofisticación en el descubrimiento y justificación de los alumnos (p. 105).

La investigación llevada a cabo por Sinclair (2003) utilizando geometría dinámica, pone de manifiesto que, en actividades de demostración, los estudiantes presentan la información de forma inexacta al no dibujarla a escala, lo que motiva que desconfíen de la exactitud de los diagramas de Cabri o Sketchpad. Además, Sinclair (p. 192) afirma que muchos estudios sobre el Cabri muestran que para resolver un problema geométrico no es suficiente con que los estudiantes perciban imágenes, aunque sean animadas, sino que es necesario disponer de conocimientos explícitos del proceso.

En general, la idea de que los diagramas, aunque pueden ser usados para generar demostraciones, nunca serán una demostración por sí mismos es transmitida por muchos profesores a sus alumnos, de ahí que un razonamiento visual no sea considerado por los alumnos como una acción "del todo válida" para probar o hacer matemáticas (Eisenberg, 1994; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Soto-Andrade, 2008; Vinner, 1989).

1.4.4. FACETA ECOLÓGICA

La faceta ecológica pretende recoger información sobre investigaciones que tratan aspectos curriculares, diferencias de género, diferencias culturales y conexiones con otros contenidos matemáticos, áreas curriculares y profesionales.

1.4.4.1. Aspectos curriculares

El trabajo de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989) analiza el papel de la visualización en el currículo de la escuela primaria. Desde la perspectiva de la educación matemática, la visualización implica tanto habilidad para interpretar y comprender la información figural usada en el trabajo geométrico como también la habilidad para conceptualizar relaciones abstractas e información no figural y transformarla en términos visuales. Es una componente fundamental en muchos procesos involucrados en la transición de modos de pensamiento concretos a abstractos. La importancia de la visualización en el currículo se pone de relevancia principalmente en dos áreas: la geometría y el estudio de las gráficas. En este último, el lenguaje visual se usa para comprender, expresar y comunicar, cuantitativa y cualitativamente, las relaciones, además de permitir a los estudiantes dar un sentido dinámico a la interacción entre variables dependientes e independientes de una función. Diversos trabajos que analizan la relación entre visualización y resolución de problemas, indican que aquella proporciona a los estudiantes una estrategia adicional que enriquecerá su repertorio para la resolución de problemas, puesto que muchos pueden ser resueltos de forma analítica o visual (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989, p. 50). Otro aspecto que tocan estos autores en su trabajo es la apreciación estética que muchas veces nos proporciona la visualización de conceptos matemáticos, como se puede ver en "demostraciones sin palabras". Reconocen que este tipo de demostraciones tienen la particularidad de no ser tan formales como las verbales, aunque suelen ser un paso importante para que los estudiantes comprendan el sentido y significado de una demostración. La mayor parte de estas demostraciones contienen figuras familiares u objetos geométricos conocidos que implican que, sobre una base intuitiva, los alumnos se convenzan de la validez de una fórmula o conjetura. Estos autores recalcan la fuerte relación que tiene la visualización con muchos aspectos del currículo en la escuela primaria (razonamiento deductivo/inductivo, razonamiento proporcional, etc.), a la vez que hacen un llamamiento para que las actividades de visualización formen parte explícitamente de ese currículo y para que los profesores sean conscientes de que estas habilidades se pueden desarrollar y mejorar con la práctica, por lo que deben ser incorporadas a su enseñanza.

Eisenberg y Dreyfus (1989) consideraban que era preciso aprovechar el potencial didáctico que ofrece la modelización visual en la educación matemática, sobre todo de la mano de los ordenadores. Esta visión era oportuna entonces y ahora, con la incorporación de los medios tecnológicos a las aulas, es una realidad que permite desarrollar la capacidad de representación visual de los estudiantes y, sobre todo, incrementar la acción del estudiante sobre tales representaciones visuales. Como la mayor parte de los conceptos matemáticos están basados en representaciones simbólicas más que en elementos visuales, estos autores se preguntan si los conceptos (y qué conceptos) deberían ser introducidos primero a través de un entorno visual o si es preferible empezar de una manera simbólica. Uno de los objetivos planteados es lograr imágenes de concepto suficientemente ricas para que no supongan un obstáculo para la abstracción del concepto, enfatizando así los efectos positivos de la visualización en la formación de conceptos matemáticos. Por otra parte, esta aproximación visual a los conceptos proporciona un marco más cercano a los estudiantes.

Para Bishop (1989, p. 11) tanto la visualización como la imaginería visual son cuestiones muy personales; ya que cada alumno necesita un tiempo específico para la creación de las imágenes y, además, la forma de operar con esas visualizaciones depende de cada uno. Esas características han de ser contempladas en la enseñanza, pues muchos profesores esperan que los alumnos creen imágenes idénticas como resultado de procesos que son personales. Así mismo, comprender en profundidad el proceso de visualización supone tener en cuenta diferentes contextos, variedad de tareas y diversos estímulos.

Desde la teoría de los conceptos figurales, Fischbein (1990, pp. 155-156) llega a la conclusión de que el proceso de construcción de conceptos figurales en la mente de los estudiantes no debe ser considerado como un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. El proceso de integrar las propiedades figurales y conceptuales en una misma unidad mental con predominancia de las limitaciones conceptuales sobre las figurales no es un proceso natural, por lo que debe ser objeto de preocupación para el profesor. Su investigación muestra que existe una tendencia a descuidar la definición bajo la presión de limitaciones figurales, y esa situación representa uno de los mayores obstáculos en razonamiento geométrico. Debido a ello, deberían presentarse ejemplos conflictivos que confrontaran las impresiones figurales con las limitaciones formales y así, enfatizar la predominancia de la definición sobre la figura y, al mismo tiempo, estimular la simbiosis entre ambas limitaciones (conceptuales y figurales). Este autor sostiene la importancia de llevar a la práctica actividades que permitan a los estudiantes manipular mentalmente objetos geométricos recurriendo simultáneamente a operaciones con figuras y a operaciones y condiciones lógicas (p. 158).

A partir de los años noventa, hay un consenso en la comunidad de educadores matemáticos sobre la consideración de la visualización como una acción al mismo nivel que la computación o la simbolización. Estas ideas, aunque se hayan incluido en el currículo, han estado bastante descuidadas dentro del mismo, de forma que en la mayor parte de los casos, tanto la visualización como las formas visuales, se han trabajado de una forma indirecta. Esto se puede observar en los tradicionales cursos de geometría euclidiana que se imparten en muchos países, en los cuales el conocimiento de las formas y el razonamiento visual se consideran elementos básicos intuitivos para niveles superiores de razonamiento. Aún desde esa nueva consideración del pensamiento visual, el principal objetivo no era el aprendizaje de las formas visuales por sí mismas sino la representación visual de conceptos matemáticos (Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p. 165).

Para Stigler et al. (1990) la importancia de la visualización adquiere gran relevancia en el caso de la escuela primaria, debido sobre todo a que los niños tienen una fuerte dependencia de las representaciones visuales de las ideas matemáticas y confían en ellas mucho más que los adultos. Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, (1996, p. 166) dan una serie de razones que explican la importancia que otorgan a la educación visual y, como consecuencia, la necesidad de invertir esfuerzos en el desarrollo de un pensamiento visual en la etapa de educación infantil y educación primaria. Las primeras razones surgen de un marco cognitivo: la visualización es una parte esencial de la inteligencia humana, el desarrollo visual no ocurre de una forma lineal y el enfoque fenomenológico del aprendizaje de las matemáticas puede hacer que el estudiante tenga una mejor comprensión del espacio y la forma. Otra de las razones es social, la tradicional enseñanza de la geometría no se ajusta a la nueva sociedad, de forma que es necesario que asumir nuevas formas de aprendizaje de la geometría que hagan hincapié en el pensamiento visual y puedan transmitir el poder de las nuevas herramientas tecnológicas. El último aspecto a tener en cuenta está relacionado con la propia naturaleza de las matemáticas, que se está desplazando desde un punto de vista de las matemáticas como estructura lógica hacia un punto de vista de las matemáticas como un proceso para conjeturar, justificar o refutar. Esto último se ha visto reflejado dentro de la educación matemática en el tipo de actividades propuestas, siendo la idea principal conseguir que los estudiantes se impliquen activamente en el proceso de aprendizaje.

Cunningham (1991) habla de tres aspectos relacionados con una aproximación visual a la educación matemática desde un entorno informático, aunque trasladable a cualquier otro tipo de contexto: el estado de la tecnología matemática para la visualización, el papel de la visualización en matemáticas y, por último, las barreras con las que se encuentra la visualización en la educación matemática. Por otra parte, este autor distingue dos facetas de la visualización, la técnica y la cultural en la educación matemática. El punto de vista técnico se refiere a los sistemas informáticos disponibles para el trabajo en educación matemática, mientras que el punto de vista cultural se centra en el impacto de la educación visual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Cuando Cunningham (1991) trata acerca las barreras con las que se encontraba la visualización, nombra tres fundamentales: el coste de la informática, el desarrollo de software adecuado a la educación matemática y, por último, la más crítica y difícil, la inercia de las instituciones. Los dos primeros ya han sido superados en gran medida, el tercero implica adoptar nuevos métodos de enseñanza por parte de las instituciones, en particular, por los departamentos de matemáticas y consensuar cambios curriculares e instruccionales, tarea que resulta sumamente difícil. La enseñanza basada en la visualización implica la necesidad de aprender a utilizar otras habilidades pedagógicas y, sobre todo, entender cómo comunicar nuestras matemáticas visualmente y cómo evaluar este tipo de aprendizaje.

Desde el punto de vista de la educación matemática, la visualización no sólo promueve la intuición y proporciona una amplia cobertura para diversas áreas de las matemáticas, sino que permite que los estudiantes aprendan nuevas formas de pensar y construir su propia matemática. Para este autor, el papel más importante de la visualización es cómo el aprendizaje visual y el simbólico se complementan (Cunningham, 1991, p. 74). Un ejemplo de ello, a niveles elementales, lo podemos ver en la investigación llevada a cabo por Clements y Del Campo (1989, p. 29) en la que se trabaja la comprensión de las fracciones 1/2, 1/4, 1/3. En este trabajo se pone de manifiesto la necesidad de establecer lazos entre las imágenes mentales y el lenguaje verbal y escrito en las estructuras cognitivas de los alumnos, para así poder construir un concepto de fracción bien desarrollado.

El Modelo de van Hiele es un modelo idóneo para la investigación del desarrollo curricular ya que aporta pautas para la organización del currículum de matemáticas y, de un modo particular, para el de geometría de los diferentes niveles educativos, tal y como se puede ver reflejado en el currículo soviético de los años 60, el currículo holandés de los 80 y los “estándares curriculares” del NCTM. Gutiérrez (1998b, p. 4) nos presenta una relación de diversas propuestas para la enseñanza de polígonos (Corberán, Gutiérrez y otros, 1994), isometrías (Jaime y Gutiérrez, 1989, 1996) y poliedros (Guillén 1996, 1997) que siguen este modelo. De igual forma, la mayor parte de las propuestas de enseñanza y aprendizaje de conceptos espaciales y geométricos vistos en la Sección 1.4.3 fueron organizados de acuerdo con los niveles 1 a 4 de este modelo (De Villiers, 1994; Guillén, 2004; Markopoulus y Potari, 1996; Saads y Davis, 1997).

Gaulin (1985) otorga a la representación gráfica un objetivo educacional básico y, desde esa perspectiva, destaca la importancia de poner más énfasis en el currículo de la mayoría de los países en los diferentes tipos de representaciones planas de figuras tridimensionales.

En esa dirección, Parzysz (1991, p. 591) señala que en el espacio geométrico nos encontramos con dos problemas, encontrar formas de comunicar la información sin perderla o distorsionarla, y resolver problemas de una forma eficiente. Su investigación presenta la perspectiva paralela como la representación gráfica de objetos geométricos que mejor se adapta a las concepciones de los estudiantes y la considera una herramienta eficiente para la resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Recurrir a la enseñanza de la perspectiva paralela supone una inversión pequeña y proporciona tres ventajas desde su punto de vista:

- En la mayoría de los casos está muy cerca de lo que el ojo ve.
- Preserva importantes propiedades geométricas del objeto (paralelismo, relación de dos longitudes en la misma dirección, punto medio, "tamaño real" en un plano paralelo al plano de proyección)
- Su consistencia es a prueba de errores y permite cualquier construcción requerida.

Según este autor, otorgar este estatus matemático a los dibujos (ilustraciones) sería una forma de conseguir que la educación matemática se acercara al tipo de problemas que surgen todos los días en la vida profesional, se establecería un vínculo entre la educación general, por un lado, y la profesional y técnica por el otro.

Stylianou (2001, p. 232) se hace eco de las ideas anteriormente citadas,y sugiere a los educadores matemáticos, teniendo en cuenta las dificultades y la fortaleza del procesamiento visual, que tomen conciencia de ello para hacer más explícito su uso en cuestiones curriculares. En la misma línea, Arcavi (2003, p. 238) propone que las prácticas educativas deberían incidir más en la visualización, pues su naturaleza se hallaría en un lugar central en la educación matemática. Esto no quiere decir que sea la panacea para los problemas de la educación matemática, simplemente que comprenderla mejor debería enriquecer la captación de aspectos que la gente percibe cuando está haciendo matemáticas y eso permitiría que avanzásemos en este campo.

Por otra parte, Presmeg (1994, pp. 114-116) afirma que crear un buen clima en clase es fundamental para fomentar un buen uso de la imaginería y que no se debe olvidar que el uso de la imaginería es una cuestión que puede ocupar más tiempo de lo que uno espera. El uso del color por parte del profesor y por parte de los alumnos es también una componente importante ya que este recurso tiene un gran impacto visual. Los profesores pueden optimizar el uso que sus alumnos hacen de la imaginería concreta presentando las figuras en diferentes orientaciones y también pueden facilitar el uso de las formas abstractas fomentando la elaboración y reconocimiento de patrones. En el caso de la imaginería dinámica, puede ser fomentada proponiendo gestos y movimientos alrededor de las imágenes. El uso de materiales manipulativos, materiales concretos, búsqueda de patrones y la propuesta de situaciones cognitivamente conflictivas también ayuda a conseguir un clima apropiado para la generación de imágenes. Por último, los profesores deben ayudar a que los alumnos establezcan conexiones con el mundo real, con otras áreas, y con otros contenidos matemáticos.

Siguiendo la propuesta del informe "Learning to Think Spatially" publicado por las academias Nacionales de US (National Academy of Sciencies, National Academy of Engineering, Institute of Medicine) (National Research Council, 2006) de incluir el pensamiento espacial en el currículo, es decir, promover una alfabetización espacial que se hace fundamental en el tecnológico siglo XXI, Diezmann y Lowrie (2009, p. 423) nos indican seis formas de conseguirlo: introducir en el currículo el desarrollo de habilidades espaciales y variedad de tareas espaciales; ayudar y apoyar a los estudiantes en el desarrollo de su vocabulario espacial y proporcionar situaciones para que lo utilicen; fomentar el desarrollo de habilidades espaciales (memoria visual, visualización de zonas oscuras y colocación y orientación de formas); proporcionar ejemplos de tareas para que sea más fácil después visualizar situaciones y fomentar la conexión con experiencias previas; hacer un seguimiento de las dificultades y errores de los alumnos, y finalmente, obtener rendimiento del uso de las tecnologías, como los juegos 3D, que proporcionan en entornos informales para el aprendizaje sobre orientación.

Las recientes administraciones de la NAEP (Evaluación Nacional del Progreso Educativo) para alumnos estadounidenses, han mostrado cierta mejora en geometría, aunque en sentido espacial los resultados siguen siendo bastante bajos. Según Battista (2007, p. 885), estos resultados no son estrictamente fiables desde el punto de vista del corpus de investigación sobre aprendizaje de la geometría debido a dos razones. La primera de ellas es que las tareas de evaluación aplicadas no fueron analizadas por los investigadores, lo que dificulta su interpretación. La segunda razón se centra en que las matrices de valoración están bastante desligadas de la investigación actual sobre el aprendizaje de la geometría. Todo ello proporciona información inadecuada sobre el aprendizaje de la geometría y su enseñanza y, como consecuencia, para el desarrollo y evaluación curricular.

1.4.4.2. Diferencias de género

Guay y McDaniel (1977, p. 211) hablan de capacidades espaciales de "bajo nivel" para referirse a aquellas que requieren la visualización de configuraciones bidimensionales pero no a transformaciones de esas imágenes visuales. Caracterizan las capacidades de "alto nivel" como aquellas que requieren la visualización de configuraciones tridimensionales y la manipulación mental de esas imágenes visuales. La investigación llevada a cabo por estos autores (p. 215) mostró que en la escuela primaria, los niños tienen mayor capacidad espacial de alto nivel que las niñas, aunque esta diferencia no se pecibe si hablamos de capacidad espacial de bajo nivel. Los resultados del trabajo de Owens (1992, p. 206) también mostraron que a nivel de tareas en dimensión dos no se detectaba ninguna diferencia asociada al género, aunque sí había pequeñas diferencias en las tareas tridimensionales a favor de los chicos.

Fennema y Carpenter (1981) encontraron diferencias entre el rendimiento en geometría de chicos y chicas, sobre todo en los ítems que se presentaron espacialmente y aquellos que se presentaron verbalmente. Además, sus resultados fueron consistentes con las hipótesis de que las diferencias en capacidad espacial repercutían en los logros matemáticos. En un estudio llevado a cabo por Senk y Usiskin (1983) se encontró que los resultados eran iguales para chicos que para chicas y, sin embargo, en la resolución de problemas geométricos y en capacidad espacial era más alto el rendimiento en los chicos. La explicación de tal comportamiento se achacaba a que los chicos tienen más experiencias de este tipo, a la vez que afirman que si los chicos y las chicas se nutren del mismo tipo de experiencias, dentro y fuera de clase, esas diferencias no existirían. Su explicación sobre el hecho de que las chicas hagan mejor las demostraciones escritas, se debe a que esta tarea requiere una estricta adherencia a un conjunto de normas formales proporcionadas en el aula, lo que es consistente con la idea de Badger (1981, p. 12) de que es más probable que las chicas mantengan los métodos específicos que han sido enseñados por sus profesores en la escuela que los chicos.

La hipótesis de Fennema y Carpenter (1981) nos lleva hacia la visualización espacial como posible factor que subyace en la diferencia de género en los logros geométricos. De este modo, las investigaciones llevadas a cabo confirman que los logros en visualización espacial son mejores en los chicos que en las chicas (Battista, 1990, Ben-

Chaim et al., 1988; Fennema y Tartre, 1985, Tartre, 1990). La investigación de Linn y Petersen (1985, p. 1479) muestra que las tareas de percepción espacial y de rotación resultaron más fáciles para los chicos que para las chicas; pero las tareas que implicaban una combinación de estrategias visuales y no visuales resultaron de igual dificultad para ambos géneros. El estudio llevado a cabo por Johnson y Meade (1987) mostró que los chicos tenían una clara ventaja espacial sobre las chicas. El trabajo de Ben-Chaim et al. (1988, p. 68) apoya la hipótesis de que las diferencias de sexo en la capacidad de visualización espacial existen y están a favor de los chicos y se manifiestan ya en la adolescencia. Sin embargo, tanto los chicos como las chicas respondieron de la misma forma en la instrucción y los efectos de esta mostraron que es posible incrementar las habilidades de visualización espacial con un programa adecuado.

Podemos tratar el tema de la diferencia de género desde el punto de vista de las estrategias utilizadas y también desde el punto de vista de la organización del cerebro. Desde el punto de vista de las estrategias, Clements (1983) plantea que los chicos prefieren usar modos de pensamiento no verbales mientras que las chicas prefieren los verbales. Las investigaciones de Battista (1990) muestran que existen diferencias en cuanto a que los chicos superan en visualización a las chicas en la educación secundaria; sin embargo esas diferencias de género desaparecen en razonamiento lógico y en estrategias de resolución de problemas. Además, los resultados encontrados también sugieren que hay una diferencia fundamental en la forma en que las chicas y los chicos representan los problemas geométricos. Así se ha podido observar que los chicos con una alta capacidad en visualización no utilizan ilustraciones ni diagramas en la resolución de problemas, mientras que las chicas con alta capacidad en habilidades de visualización sí se apoyan en ellos. Una de las conclusiones de su estudio es que la visualización espacial y el razonamiento lógico son factores muy importantes en el aprendizaje de la geometría tanto para chicos como para chicas y que, además, contribuyen de forma diferente al rendimiento de unos y de otras (p. 59). En este trabajo, Battista también analiza la interacción de la capacidad de visualización o la preferencia representacional de los alumnos con el estilo visual o no visual de enseñanza del profesor.

En general, podemos concluir que existe un amplio acuerdo en que la capacidad de visualización está más desarrollada en los hombres que en las mujeres, como se puede ver también en la revisión hecha por Gutiérrez (1998b), sin embargo, en cuanto a razonamiento lógico las capacidades son muy similares.

A pesar de las teorías anteriores, otros investigadores, como Arrieta (2003) y Presmeg y Bergsten (1995), presentan conclusiones diferentes. Los resultados obtenidos por Arrieta, en un estudio basado en diferentes pruebas para medir la capacidad espacial de los alumnos, muestran que no existen diferencias entre chicos y chicas; incluso observa que las chicas, en ciertas etapas, superan a los chicos. El estudio internacional realizado por Presmeg y Bergsten (1995) muestra que en Suecia la puntuación media sobre visualización matemática es más elevada en las chicas que en los chicos.

Diversos investigadores en psicología creen que esas diferencias de género son debidas a la distinta organización de cerebro de hombres y mujeres: "las diferencias de género en habilidades espaciales y verbales pueden ser relacionadas con la forma diferente en que esas funciones se distribuyen entre los hemisferios cerebrales en hombres y mujeres" (Springer y Deutsch, 1981, p. 121). Siguiendo a Clements y Battista (1992, p. 457), es importante comprender la complejidad de la investigación en términos de diferencia de géneros, esas diferencias se han atribuido a factores culturales, biológicos o a ambos. Además, incluso cuando no se encuentran esas diferencias en una tarea determinada, no se debería asumir que los chicos y las chicas hayan usado las mismas estrategias para resolverlas. De todas formas, parece que la tendencia es que esas diferencias disminuyan.

Por su parte, Gorgorió (1996, 1998) confirma que la variable género no es una variable diferenciadora cuando se analizan procesos de resolución de tareas espaciales en las que la petición geométrica es una rotación espacial; aunque observó en su investigación una diferencia cualitativa entre las estrategias de estructuración y procesamiento empleadas por chicos y chicas en la resolución de las tareas. Esta autora coincide con Clements y Battista (1992, p. 458) en la siguiente afirmación:

> Porque hay obviamente mucha más variabilidad en el rendimiento y el procesamiento dentro de cada género que entre ellos, debemos de ser capaces de ir más allá de estudiar las diferencias de género y estudiar los diferentes perfiles cognitivos que subyacen a los resultados exitosos en la geometría.

1.4.4.3. Diferencias culturales

Frecuentemente se producen afirmaciones que indican que los estudiantes no pertenecientes a culturas occidentales son pobres en habilidades espaciales. Los resultados de la investigación de Bishop (1983, p. 194), realizada con estudiantes de

Papúa Nueva Guinea, corroboran en parte esa afirmación. Este autor justifica estos resultados basándose en la falta de familiaridad de los estudiantes con las convenciones occidentales y en la debilidad en la capacidad general IFI. Sin embargo, los resultados de aquellas pruebas que parecían explotar la capacidad de procesamiento visual fueron generalmente muy buenos, llevando a considerar la capacidad VP como la fortaleza de los estudiantes de Papúa Nueva Guinea.

Uno de los objetivos del trabajo de Mitchelmore (1980b) consistió en comprobar la hipótesis de que los estudiantes de Kingston (Jamaica) poseen una capacidad espacial inferior a la de los estudiantes de los mismos niveles educativos en Columbus (U.S.) y Bristol (Inglaterra). Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes de Columbus tienen un rendimiento más bajo que los de Bristol, lo cual resultó ser un resultado sorprendente (en América los niños ven más las televisión y los profesores utilizan más medios visuales), el cual condujo al autor a afirmar que la observación pasiva de representaciones tridimensionales probablemente no afecte a la formación en capacidad espacial. Esta diferencia puede ser debida al currículum escolar de matemáticas, pues los profesores ingleses suelen dar un enfoque más informal a la geometría, usando muchos más materiales manipulativos en los niveles elementales y más diagramas en los niveles superiores. Por otro lado, la diferencia Bristol-Columbus también puede ser debida a que el currículum escolar del país refleje una actitud general hacia modelos espaciales de pensamiento (Mitchelmore, 1980b, p. 212). En cuanto a la comparación Columbus-Kingston, se obtuvo que el grado de desarrollo económico y la occidentalización puede ser un factor más débil que el nivel general de capacidad espacial en la cultura. Esta observación se pone de manifiesto en dos factores, primero en que las matemáticas en la escuela primaria en Kingston tienen una orientación enteramente aritmética, mientras que un segundo factor se debe a que, aunque la mayoría de los libros de secundaria están publicados en Inglaterra, tanto el contenido visual como el uso de materiales manipulativos se omiten en la enseñanza de las matemáticas. Según este autor, también existe una clara evidencia de la falta de interés en las relaciones espaciales entre la población adulta en Jamaica.

Por otra parte, Mitchelmore (1980b, p. 213) encontró que los niños, inmigrantes jamaicanos y de otros países de las Indias occidentales, tienen más dificultades con los aspectos espaciales que con el lenguaje. Las diferencias culturales también afectaron a la diferencia de género pues las diferencias más claras se obtuvieron para los estudiantes de Kingston. En Jamaica hay una predominancia de chicas en el mundo académico y entre el profesorado. El rendimiento en casi todas la materias escolares es más alto en las chicas, excepto en lo referente a la capacidad espacial. Según diversos autores, esto puede ser atribuido a que la sociedad jamaicana es matriarcal, la mujer es la cabeza de familia y la ausencia de los hombres en el entorno escolar y en el familiar puede ser un obstáculo para favorecer el pensamiento espacial. Además, los chicos jamaicanos se suelen dedicar a actividades mecánicas y espaciales fuera y dentro de la escuela (Mitchelmore, 1980b, p. 215).

En la investigación llevada a cabo por Presmeg (1989) con estudiantes hindúes, se observa que, al igual que en las culturas occidentales, hay preferencias individuales a la hora de utilizar o no métodos visuales en la resolución de problemas. En este trabajo, la atención de Presmeg se centra en mostrar de qué manera la visualización puede mejorar la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas en clases multiculturales. La necesidad de imágenes adquiere gran importancia cuando nos encontramos en situaciones de instrucción en las que el lenguaje empleado no es la lengua materna de muchos de los estudiantes, por lo tanto, en pequeña o gran medida, la visualización facilitará una comprensión que la falta de fluidez verbal no permite (Presmeg, 1989, p. 9). Otras dificultades que surgen están relacionadas con otro tipo de lenguaje que es asumido, en el proceso de pensamiento, por el profesor o el currículo y que no coincide con el del estudiante. En este caso la visualización ha de ser una parte integral para la modificación de ese currículo, ya que sin esa modificación las presentaciones visuales del profesor no abordarán las causas subyacentes de las dificultades de los estudiantes. Las características visuales del pensamiento de grupos culturales diferentes deberían ser incorporadas a ese nuevo currículo, dado que los elementos visuales son una parte muy importante de sus modos de cognición.

Una segunda razón para comprender la valiosa importancia de la visualización en las clases multiculturales es la utilización de matemáticas culturales. Según Bishop (1986) la cultura matemática se ha desarrollado en todo el mundo a través de actividades de conteo, localización, medida, construcción, etc., y los elementos visuales son inherentes a muchas de esas actividades. Siguiendo a Presmeg (1989, p. 20), una forma de ayudar a los estudiantes a comprender las diferentes formas de vida, a entender y apreciar los elementos y el pensamiento propio de cada cultura, sería incorporar al currículo todas esas actividades que introducen elementos visuales que emanan de ellas. A modo de ejemplo, esta autora nos presenta los “mandalas”, un elemento visual propio de países del Este, que resulta ser una rica fuente de patrones geométricos que detrás de una forma simple esconde varios niveles de percepción. Las actividades con elementos de este tipo, sobre todo cuando se trabaja la forma y el espacio, permiten que los estudiantes desarrollen conceptos geométricos y observen una base geométrica presente en el entorno de su propia cultura.

Eisenberg y Dreyfus (1989, p. 3), al igual que Presmeg (1989, p. 18), consideran que la visualización puede ser un vehículo para cerrar las grietas culturales. Además, esta última autora sostiene que es probable que la visualización sea una fortaleza en muchos de los países no occidentales en vías de desarrollo, lo que intenta suplir de alguna manera el modelo deficitario en educación matemática.

1.4.4.4. Conexiones con otros contenidos matemáticos, áreas curriculares y profesionales

Muchos investigadores han enfatizado la importancia del pensamiento espacial centrándolo en la geometría, considerando este tipo de pensamiento como básico para la asimilación de conceptos particulares y conocimiento abstracto geométrico. Sin embargo, el pensamiento espacial se usa también para representar, operar y construir conceptos matemáticos que no contienen aspectos espaciales, como se puede ver en los trabajos de Clements y Del Campo (1989); Krutetskii (1976), Lean y Clements (1981), etc. En cualquier caso, siguiendo a Clements y Battista (1992, p. 444), el papel que ese pensamiento juega es difícil de concretar e incluso multifacético. Así, se puede ver que las imágenes y las transformaciones de imágenes pueden comportarse de forma diferente según el nivel de van Hiele, a medida que se va incorporando conocimiento verbal y proposicional. También es posible estar manipulando entidades mentales que no tienen un formato visual ni verbal pero que se rigen por transformaciones visuales.

En el razonamiento proporcional, considerado por Piaget como uno de los seis elementos necesarios para el pensamiento formal operacional, la visualización también tiene una presencia importante. Muchos estudiantes tienen dificultades y errores conceptuales relacionados con la proporcionalidad. Ben-Chaim et al. (1989, p. 57) creen que sería posible ayudar a los estudiantes en este contexto mediante la utilización de la representación visual a través de diagramas en forma de árbol. Así mismo, cuando los alumnos se encuentran con problemas de mezclas, un enfoque gráfico de la situación podría ser de gran ayuda, transformando una situación estática en dinámica. Otra clase de problemas en los que un modelo visual es de gran ayuda son los de crecimiento de objetos (área, volumen). Siguiendo a estos autores, se podría decir que para seguir desarrollando habilidades relacionadas con el razonamiento proporcional, las ideas y conceptos deben ser introducidas visualmente en muchas y variadas situaciones, a través de diferentes materiales y en diferentes entornos.

La exploración que hace Arcavi (2003, p. 119) sobre el papel y uso de la visualización bajo el análisis de "ver lo invisible", lo lleva a que el primer tipo de "invisibles" que encontramos en las matemáticas sean las representaciones de datos, pues permiten apreciar y percibir características generales de los mismos pero también ayudan a ver más allá de esas características generales, descubriendo características enactivas de los datos que quedan escondidas tras los parámetros no transparentes. De esta manera los gráficos pueden ser más precisos y reveladores que las tablas estadísticas convencionales.

Aunque muchos matemáticos son capaces de "ver" a través de formas simbólicas, independientemente de su complejidad, no ocurre lo mismo con los estudiantes. Para estos últimos, la visualización juega un papel complementario y muy poderoso como soporte e ilustración de resultados esencialmente simbólicos, como una forma de resolver conflictos entre la solución correcta simbólica y las intuiciones erróneas y, por último, como medio de recuperar fundamentos conceptuales que han pasado desapercibidos en las soluciones formales (Arcavi, 2003, p. 223).

Otro punto que debe ser aclarado es el que se refiere a que, según Fischbein (1987), nuestra percepción está modificada por lo que sabemos, sobre todo cuando lo que vemos son diagramas cargados de estructuras conceptuales. Esto provoca que los estudiantes, que no están familiarizados con esos conceptos subyacentes, vean detalles irrelevantes, mientras que la visión de los expertos elimina de forma automática esas irrelevancias. Arcavi (2003, p. 232) va más allá y afirma que en algunas situaciones lo que vemos no sólo está determinado por la cantidad de conocimientos previos que dirigen nuestros ojos sino que también está influenciado por el contexto dentro del cual se produce la observación.

Bishop (1992) también hace referencia al contexto cuando habla de que existen otras variables, además del desarrollo cognitivo general, que pueden informar sobre las variaciones de la comprensión de un fenómeno espacial en los niños. Por ejemplo, muchas ideas en matemáticas y, sobre todo, en geometría tienen una relación estrecha con palabras relacionadas en contextos cotidianos, y es esta última idea la que los estudiantes asocian en un contexto geométrico.

Stevens y Hall (1998) definen “disciplined perception” en el contexto de una clase considerada como un microcosmos, como una comunidad de práctica en la que el aprender no es visto sólo como instrucción y ejercitación, sino como una forma de participación en una disciplina práctica. Así, por medio de gráficos, diagramas y modelos, la visualización es un tema central que “desarrolla y estabiliza…la interacción entre la gente y las cosas” (p. 108).

La conexión de lo gestual con la imaginería visual ya había sido apuntada por Presmeg en 1985, al afirmar que “el uso de gestos por sus profesores y estudiantes era uno de los indicadores más seguros de la presencia de pensamiento visual en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (Presmeg, 2006a, p. 224). Es en el PME-29, en Australia, cuando realmente se consolida esta nueva tendencia, marcando el inicio de una tipología de tipos de gestos y sus usos en la educación matemática que se ven ilustrados, en la mayoría de las investigaciones, por la evidencia fotográfica. Un buen resumen de las investigaciones sobre el tema es ofrecida por Maschietto y Bartolini Bussi (2005). Por ejemplo, en el trabajo de Hsu (2008) se muestra cómo un estudiante usa gestos para mostrar la acción de deslizar y girar una figura, lo que le da la oportunidad de visualizar el diagrama y le proporciona comprensión de su razonamiento matemático.

En Presmeg (2006a) se puede encontrar una información más completa sobre trabajos de visualización en diferentes áreas. A continuación se describen brevemente algunos informes como ejemplo de la aplicación, uso e importancia dada a la visualización en diversas áreas de las matemáticas.

Jones (1998) y Mcleay y Piggins (1996) analizan el uso de las imágenes mentales cuando se está trabajando con estructuras de nudos. Estos autores subrayan la diferencia que existe al trabajar con una estructura deformable en lugar de los objetos rígidos que protagonizan la mayoría de las investigaciones, sobre todo en cuanto al tipo de imágenes que se movilizan (imágenes dinámicas).

En aritmética tenemos, por ejemplo, el trabajo de Gray y Pitta (1999, p. 51). En él se explora la relación de la comprensión numérica de los niños con los marcos de referencia de sus imágenes. Esta relación se focaliza en dos cuestiones: primera, la existencia de diferentes tipos de imágenes que se pueden agrupar en categorías y, segunda, la relación entre esas categorías y el nivel de logro numérico.

Yerushalmy, Sheternberg y Gilead (1999) trabajan la visualización como vehículo para dotar de significado la resolución de problemas en álgebra. Su enfoque hace que los gráficos no se vean sólo como resultados de medición y trazado de puntos. Analizan la posible interacción entre el lenguaje simbólico implicado en la resolución de distintos tipos de problemas de álgebra y los modelos mentales visuales que se crean. En este contexto, en el de procesos de modelar, afirma que la visualización puede jugar un papel esencial sobre todo a la hora de elegir un modelo apropiado.

La manera en que una ecuación es manipulada se ve afectada no sólo por la estructura matemática inherente sino también por el impacto visual de la propia notación, según argumenta Hewitt (2003, p. 68). La posición relativa de los símbolos dentro de una ecuación algebraica produce un impacto visual que puede modificar la forma en que esas ecuaciones se manipulen al reordenar la ecuación.

DeWindt-King y Goldin (2001) se centran en la imaginería visual implicada en la resolución de problemas con fracciones en niños. Estos autores observan una estrecha relación entre las imágenes internas de los niños y su desarrollo conceptual de las fracciones. También trabajan sobre la comprensión de la notación simbólica a través de la imaginería visual.

Gagatsis, Panaoura, Elia, Stamboulidis y Spyrou (2008) analizan la comprensión del concepto de eje de reflexión para una función y la transformación desde una representación geométrica a la algebraica y viceversa. Defienden el punto de vista de que las representaciones visuales juegan un importante papel en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para comunicar ideas. Estos autores señalan la importancia de reconocer y manipular el mismo concepto en sistemas de representación diferentes (signos de Peirce), además de trasladar el concepto de una a otra representación.

Por ejemplo, Rafi, Samsudin e Ismail (2006) y Suárez, Rubio, Gallego y Martín (2004) afirman que desde la perspectiva de la ingeniería se han creado numerosos métodos para incidir en la visualización, ya que se considera que la habilidad para recrear un objeto y poder manipularlo en la mente es fundamental para este campo. De este modo, la integración de varias vistas ortogonales de objetos tridimensionales en una única perspectiva y la obtención de nuevas vistas a partir de una dada son considerados como excelentes catalizadores de las habilidades espaciales. Además, estos autores subrayan la importancia de las actuales mejoras tecnológicas basadas en ordenadores de potentes y elevadas capacidades gráficas, los cuales permiten no sólo "una interacción dinámica e inmediata, sino la sensación de *inmersividad* en un espacio tridimensional cuasi-real donde es posible crear una realidad paralela adaptada a las necesidades impuestas por el proceso cognitivo a desarrollar" (Suárez et al., 2004, p. 3). Estos trabajos inciden en la relevancia de la instrucción a través de las nuevas herramientas informáticas para conseguir la mejora de las habilidades espaciales.

Branoff (2000, p. 14) considera que The Purdue Spatial Visualization-Visualization of rotations (Guay, 1977) (PSVT) y el Mental Rotations test (Shepard y Metzler, 1971) son los test que mejor miden el constructo capacidad espacial. El objetivo de su trabajo es mostrar que si se modifica el PSVT, de manera que las proyecciones isométricas sean proyecciones trimétricas, se evitaría el problema de las representaciones isométricas de objetos tridimensionales que, en ocasiones, hacen que los objetos tridimensionales pueden ser vistos como bidimensionales y, como consecuencia de ello, el test proporcionaría una mejor medida de esa capacidad.

La investigación de Nemirovsky y Noble (1997, p. 99) se centra en estudiar cómo una estudiante utiliza una herramienta tecnológica para llegar a reconocer por medio de la inspección visual el comportamiento matemático de la pendiente con respecto a la función distancia correspondiente al contorno trazado sobre una tabla plana. Su perspectiva teórica sobre la visualización matemática engloba las posibilidades humanas de acción y los atributos físicos de la herramienta, y pretende ir más allá de la dualidad representaciones internas y externas que, consideran, es la mayor dificultad para definir la visualización.

En el trabajo de Eisenberg (1994, p. 112) se presentan numerosos ejemplos de autoridades en todas las áreas de las matemáticas que recomiendan el uso de la visualización en todas sus vertientes. Los gráficos y la información visual alcanzan un estatus que va más allá de meras representaciones. En resolución de problemas, la habilidad más importante es saber conectar diferentes áreas de matemáticas, como una forma de expresar situaciones matemáticas de diferentes maneras (Parzysz, 1999, p. 216).

1.5. SÍNTESIS DE LAS INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL CAMPO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN VRE

En esta sección se pretenden agrupar y sintetizar las investigaciones y trabajos relacionados con la formación del profesorado en visualización y razonamiento espacial. En particular, nos interesan aquellas que se centran en los profesores de educación primaria o futuros profesores de educación primaria, por ser éstos la población objeto de estudio de nuestro trabajo. Aunque el conjunto de tales investigaciones no es muy amplio ni muy variado, se han encontrado trabajos centrados en el problema de las representaciones planas de objetos tridimensionales (Gaulin, 1985; Malara, 1998), en la adquisición de conceptos básicos de geometría (Gutiérrez y Jaime, 1996; Herskowitz; 1989), en el concepto de simetría (Gutiérrez y Jaime, 1987; Son, 2006), en la identificación y clasificación de sólidos (Guillén, 2000, 2001, 2005) y desarrollos planos de cuerpos tridimensionales (Cohen, 2003).

La relación entre visualización espacial y desarrollo cognitivo y la interacción de estos factores para el rendimiento matemático junto con el pensamiento formal fueron objetivos del estudio de Battista, Wheatley y Talsma (1982). Sus resultados mostraron que los contenidos dados en el curso, apoyados en materiales manipulativos y modelos concretos, mejoraron la capacidad espacial de los futuros maestros (p. 338).

En la investigación de Herskowitz (1989, p. 64) los patrones de comportamiento de los profesores de primaria fueron iguales que los de los niños con respecto a ejemplos de concepto (bitriángulos y bicuadriláteros) y en tareas de identificación; aunque los resultados fueron mejores, el patrón se mantuvo igual. También obtuvo resultados que mostraron que los profesores tienen dificultades para identificar triángulos rectángulos o isósceles fuera del prototipo. Como conclusión obtuvo que aunque los estudiantes tengan a mano la definición verbal de un concepto, este hecho no mejora, en la mayoría de los casos, los resultados.

El objetivo general de la investigación de Gutiérrez y Jaime (1996) es analizar la manera de entender conceptos geométricos elementales de los futuros profesores de Primaria, para así poder modificar o incidir en su formación matemática y didáctica de manera que estén en condiciones de presentar a sus alumnos situaciones adecuadas. En una segunda parte del trabajo se analiza la influencia que ejercen los conceptos más elementales que integran la definición usual de altura de un triángulo (lo que llaman estos autores subconceptos) a la hora de utilizar ese concepto. Los resultados muestran que los estudiantes de magisterio tienen unas imágenes conceptuales muy próximas a las de los estudiantes de Primaria, siendo frecuentes las imágenes basadas en las figuras prototípicas que aparecen en los libros de texto.

Los trabajos de Gutiérrez y Jaime (1987) y Son (2006, p.152) tienen como núcleo central las simetrías. Se analizan tanto la adquisición del concepto de simetría como el tipo de errores en el concepto. Los resultados muestran que la inclinación del eje es una variable determinante en los resultados, obteniéndose valores bastantes bajos cuando el eje es inclinado y también diferencias positivas si la actividad es realizada sobre una cuadrícula.

La clasificación en el mundo de sólidos tridimensionales es abordada por Guillén (1991, 2000, 2001, 2004, 2005). Guillén (2000, p. 35) se marca como objetivo obtener información de cómo los estudiantes van construyendo ciertos objetos mentales de conceptos geométricos relacionados con los sólidos y cómo estos se van modificando y ampliando a través de la propuesta de enseñanza-aprendizaje. Este trabajo tiene implicaciones prácticas, tanto para maestros o profesores como para diseñadores del currículo. Para incluir en el currículo de geometría las experiencias seleccionadas se deben considerar varias cuestiones: los estudiantes necesitan representaciones físicas de los sólidos, las actividades deben estar inmersas en procedimientos de construir o generar esas representaciones, al trabajar con niños, el trabajo inicial debe mostrar las diferentes representaciones de los sólidos (modelos macizos, modelos huecos y armazones) para aprovechar el tipo de propiedades que remarca cada una de ellas. Este trabajo inicial con modelos permite que los estudiantes integren en el objeto mental que van construyendo todos los significados que provienen de los diferentes contextos. Además, esta autora (2000, pp. 49-50) también apunta la importancia del análisis de errores de los estudiantes a la hora de seleccionar los ejemplos propuestos de cara a la enseñanza y, además, hace referencia a la dificultad que supone para los estudiantes utilizar el vocabulario geométrico al enunciar propiedades o proposiciones, sobre todo cuando hay varios conceptos conectados asociados, lo cual implica que también sea necesario trabajar en el desarrollo del lenguaje geométrico de los estudiantes. Las propuestas didácticas de Guillén (2001, 2005) muestran la gran ventaja del material manipulativo así como de los entornos dinámicos que permiten construir o generar familias de sólidos.

Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) presentan un método para determinar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de van Hiele en diferentes grupos de estudiantes, entre ellos estudiantes para maestros. Para ello se administra una serie de test sobre razonamiento en el contexto de la geometría espacial. Sus resultados confirman que la adquisición de un nivel de razonamiento no se produce de forma discreta, observando incluso que los estudiantes pueden estar a la vez en varios niveles (p. 250).

Con respecto a las representaciones gráficas, Malara (1998) realizó su estudio en un contexto de formación de profesores de grado medio. Su premisa se basaba en que la única forma de que los profesores incluyeran cierto tipo de actividades de sólidos geométricos en sus clases (no habituales en los planes de estudio) era que ellos mismos discutieran y comprobaran la potencia, las dificultades y problemas que podrían surgir de los mismos. Este trabajo se centra exclusivamente en la representación de objetos en una trama isométrica con una propuesta de ejercicios que implican la habilidad de visualizar mentalmente los sólidos en nuevas posiciones, desde varios puntos de vista, dibujar tales representaciones, identificar objetos y completar su representación, etc. Los profesores se encontraron con dificultades para coordinar las visiones parciales de un objeto que debería ser representado en diferentes posiciones, para visualizar los objetos globalmente, para evocar la visión desde uno de sus cuatro puntos de vista fundamentales y para verificar la corrección de sus producciones y conceptualizar los principios de representación. No obstante, consideraron que la mayor parte de dichas actividades eran adecuadas para ser incluidas en la base de la geometría en niveles medios de enseñanza.

Gaulin (1985, p. 67) propone una serie de actividades para aplicar en la escuela sobre codificar y decodificar información espacial a través de varios tipos de representaciones. Este autor comenta que incluso los profesores se encontraron con bastantes dificultades para interpretar y hacer dichas representaciones gráficas.

Como la capacidad de visualización espacial es uno de los elementos claves a la hora de realizar e interpretar correctamente las representaciones planas de los objetos espaciales, Gutiérrez (1998a) sugiere que los profesores de primaria deberían ser conscientes de las dificultades de sus alumnos a la hora de dibujar representaciones planas, y deben actuar para que la acumulación de una serie de dificultades no conduzca a que sus alumnos se bloqueen. Para ello han de plantear actividades de aprendizaje que ayuden a mejorar las capacidades de visión espacial de los estudiantes y, por otra parte, mientras sus estudiantes no sean capaces de realizar representaciones planas suficientemente correctas, evitar que se basen sólo en sus dibujos, proporcionándoles otros medios como pueden ser modelos físicos, apoyo informático, etc.

El objetivo de Soto-Andrade (2008, p. 5) es mostrar cómo las metáforas y los modos cognitivos son piezas fundamentales en un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo. Sus resultados revelan que los profesores en servicio no están habituados a trabajar con la visualización, las metáforas y los modos cognitivos. Sus hipótesis extraídas de investigaciones anteriores son que estos profesores devalúan la visualización, considerando el modo cognitivo secuencial verbal más adecuado, son reticentes a utilizar la visualización y a cambiar de modo cognitivo. El rango de metáforas de que disponen es bastante reducido. Su investigación indica que después de la instrucción, los futuros profesores fueron capaces de visualizar situaciones nuevas y de redescubrir visualizaciones de objetos conocidos. Además, sus observaciones llevan a afirmar que es posible enseñar a moverse de un modo cognitivo a otro.

El trabajo de Cohen (2003, p. 229) se centra en la capacidad de los maestros en prácticas o los que ya están en activo, para visualizar la transformación de un sólido curvo (cilindro y cono) en su desarrollo plano y viceversa, e intentar clasificar los errores y dificultades de los estudiantes en ese proceso. En su investigación se pide a los maestros que realicen unos desarrollos complementarios a los estándares y que identifiquen desarrollos no habituales. Esta situación provoca que funcionen como aquellos que nunca han visto un desarrollo de un cono o cilindro, intentando realmente visualizar el proceso en vez de reproducir dibujos familiares, lo que da una mejor idea de su capacidad mental actual para plegar y desplegar superficies. Según Cohen imaginar estos desarrollos depende en gran medida de las experiencias llevadas a cabo con acciones de plegar y desplegar sólidos, lo que apoya la afirmación de Van Hiele de que el nivel de rendimiento geométrico depende más de la experiencia, la enseñanza y el aprendizaje que del desarrollo espontáneo con la edad.

Como Cohen (2003) muestra, lo verdaderamente interesante es analizar aquellos casos en los que se realiza un primer desarrollo plano correcto (normalmente el estándar) mientras que los demás desarrollos adicionales solicitados incorrectos o incompletos. Esta situación lleva a pensar que lo que hicieron fue reproducir un dibujo ya conocido en experiencias previas. Su conclusión es que, sin actividades adecuadas, muchos estudiantes son incapaces de imaginar esos procesos y, en general, sus dibujos fueron similares a los dibujos de los niños contenidos en el trabajo de Piaget e Inhelder (1956). Además, estos sujetos a menudo confunden el desarrollo plano de un sólido con su representación en perspectiva. Esta autora sugiere que no es suficiente con conocer el problema, hay que asegurarse de que la formación de profesorado incluya actividades de este tipo que desarrollen este aspecto de la imaginería visual (p. 236).

Owens, Reddacliff y McPhail (2003) ponen en marcha la evaluación de la implementación de un programa de formación de maestros cuyo objetivo principal era mejorar la calidad de enseñanza de las matemáticas del espacio. Se centraron sobre todo en las relaciones parte-todo y en aspectos de orientación y movimiento. Los resultados de la investigación pusieron de manifiesto que el sistema de innovación dirigido podría conducir a un cambio docente efectivo. Los maestros tenían ciertos conocimientos sobre visualización pero no habían profundizado nunca sobre aspectos teóricos, lo que les ayudó a ampliar sus conocimientos, a apreciar el poder de la visualización y a cambiar aspectos de su método de enseñanza incorporando más experiencias manipulativas. Para estos maestros, los materiales fueron fundamentales de cara a mejorar su propia formación y comprender el desarrollo conceptual de sus alumnos. Por ejemplo, la formación les sirvió para promover discusiones y descripciones de las formas de las figuras en vez de instruir a los estudiantes en propiedades de las figuras. La observación de las clases por parte de los investigadores mostró que los maestros fomentaban la visualización a través de la predicción e incluían actuaciones propias que mostraban cómo una formación profesional adecuada fomenta el propio desarrollo profesional de los maestros (Owens et al., p. 345).

Por último, Gutiérrez y Jaime (1996) sugieren una reflexión sobre si es pertinente y adecuado enseñar Didáctica de la Matemática a futuros maestros cuya base matemática incluye un conocimiento muy pobre, incluso erróneo, de los conceptos, puramente memorístico, algorítmico y basado en prototipos básicos. Otra aportación de estos autores se centra en la existencia de subconceptos (elementos básicos) más elementales asociados a los conceptos geométricos, siendo fundamental analizar el grado de comprensión de estos subconceptos y su correspondiente instrucción para que los alumnos a través de ellos puedan comprender la definición del concepto principal.

1.6. CARACTERIZACIÓN DE LA VRE EN LOS ENFOQUES COGNITIVOS USUALES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Dentro de la Educación Matemática, Battista (2007), Gutiérrez (1996a, 1998b), Nemirovsky y Noble (1997) y Presmeg (2006a, 2008) nos ofrecen un amplio y variado conjunto de trabajos teóricos sobre visualización, a la vez que hacen un recorrido por el estado de la cuestión. A pesar de que esos trabajos tienen elementos en común, no han sido establecidos como partes de un único cuerpo teórico.

En la actualidad, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas no sólo se contempla como una propuesta ilustrativa sino que está siendo reconocida como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración. Aún así, todavía quedan muchas cuestiones relacionadas con la visualización en educación matemática, sobre todo en lo que concierne a dificultades alrededor de ella. Arcavi (2003, p. 235) clasifica estas dificultades en tres categorías: cultural, cognitiva y sociológica. Una dificultad cultural hace referencia a las creencias y valores sobre las matemáticas y a lo que es aceptable o legítimo en el hacer matemático. En ese sentido, según Eisenberg y Dreyfus (1991, p. 31), la no consideración de los métodos visuales como métodos formales para la demostración y la conceptualización matemática se debe a una parte de la propia comunidad matemática (matemáticos y profesores de matemáticas), en la que se sostiene que un argumento visual no es suficiente para ser una demostración, así como el hecho de que las matemáticas de alto nivel deben ser comunicadas a través de marcos no visuales. Sin embargo, los matemáticos sí utilizan exploraciones y argumentaciones visuales en su trabajo diario, aunque no transmiten ese uso a sus alumnos. Presmeg (1997, p. 310) lo denomina *devaluación de la visualización* y señala que esta característica se extiende a través de las clases, currículo, materiales y profesores de educación, dejando una parcela pequeña para poder incorporar la visualización como una parte integral de hacer matemáticas.

Las dificultades cognitivas incluyen la cuestión de si lo visual resulta más fácil o más difícil. La información diagramática puede ser más útil, y no debido a que contenga más información sino a que esa información es expresada de manera que exhibe piezas importantes de información y conexiones entre ellas de una forma más precisa. Sin embargo, esta información no es inteligible para aquellos que no están acostumbrados a trabajar con este tipo de representaciones diagramáticas, por lo que se requiere un proceso de aprendizaje. Según Eisenberg y Dreyfus (1991, p. 33) muchos alumnos no tienen la posibilidad de aprender las habilidades necesarias para poder construir e interpretar diagramas y, por tanto, poder utilizarlos para el razonamiento matemático. Además, si la visualización actúa sobre imágenes conceptualmente ricas, la demanda cognitiva es elevada. Por otra parte, razonar sobre conceptos en configuraciones visuales puede implicar que las rutinas no siempre sean seguras y ello crea de forma consciente o inconsciente un rechazo por parte de los alumnos. Otra dificultad cognitiva surge de la necesidad de crear flexibilidad entre las representaciones visuales y analíticas de la misma situación para obtener una adecuada comprensión de las matemáticas. Este proceso puede ser muy complicado para los estudiantes (Arcavi, 2003, p. 235).

Eisenberg y Dreyfus (1991) incluyen como dificultades sociológicas las cuestiones de enseñanza. Las razones sociológicas tienen su base en la teoría de Chevallard (1985), según la cual el conocimiento se produce necesariamente de forma secuencial. Como el procesamiento analítico utiliza representaciones sentenciales y el visual se nutre de representaciones diagramáticas, las primeras son las más adecuadas para producir conocimiento de una forma más eficiente. Esto se complementa con el hecho de que en la escuela el trabajo es rutinario, algorítmico y lineal, lo motiva que los profesores sientan que las representaciones analíticas sean pedagógicamente más apropiadas y eficaces, transmitiendo esa idea a sus propios alumnos. Otra dificultad sociológica surge cuando en el aula conviven diferentes grupos culturales. Los que provienen de culturas visualmente ricas pueden contrarrestar algunos posibles déficits, sin embargo, como se ha visto en algunos trabajos de Presmeg (1986a, 1989), los visualizadores no suelen estar en el grupo de los que triunfan en matemáticas.

En 1991, Dreyfus dijo "he intentado mostrar que el razonamiento visual en matemáticas es importante por derecho propio y que por lo tanto, tenemos que desarrollar y dar plena condición puramente visual a las actividades de matemáticas" (p. 46). Dreyfus (1995, p. 16) recalca que se necesita una teoría que emerja de la educación matemática y explique cómo se forman las imágenes mentales de conceptos matemáticos, cómo los estudiantes pueden adquirir el dominio en la creación y uso de imágenes mentales, qué papel juegan las imágenes mentales en la comprensión de conceptos matemáticos y en la resolución de problemas, cuando la visualización es más o menos útil que los métodos analíticos y cómo las imágenes mentales pueden ser transmitidas.

Gutiérrez (1996a, p. 9) nos muestra que se han realizado varios intentos en esa dirección, principalmente diseños de unidades didácticas, e intenta caracterizar la actividad de visualización en matemáticas unificando la terminología de varios de los autores mencionados en las secciones anteriores e integrando los conceptos definidos por ellos en una única red. De este modo, tomando como referencia a este autor, intentaremos exponer los distintos elementos y definiciones que asumimos para la VRE. Teniendo en cuenta que nos encontramos en el contexto de las matemáticas, las definiciones se restringirán a su aplicación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Respecto al vocabulario, asumimos, al igual que Gutiérrez, que los términos de imagen mental, imagen espacial e imagen visual definidas por Yakimanskaya, Dreyfus y Presmeg son equivalentes y que los términos visualización, imaginería visual y pensamiento espacial pueden considerarse también equivalentes.

Adoptamos como *visualización* en matemáticas el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, ambos desarrollados física o mentalmente para resolver problemas o comprobar propiedades. Una *imagen mental* es cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos espaciales o visuales.

Consideramos los tipos de imágenes mentales identificadas por Presmeg (1986b) que ya fueron descritas en la Sección 1.3.1.: imágenes concretas, imágenes de patrones, imágenes de fórmulas, imágenes cinéticas e imágenes dinámicas. Definimos *representación externa* pertinente para la visualización como un tipo de representación gráfica o verbal de conceptos y propiedades que incluyen imágenes, dibujos, diagramas, etc. que nos ayudan a transformar imágenes mentales y a hacer razonamientos visuales. Así mismo, llamamos *proceso de visualización* a una acción física o mental en la cual las imágenes mentales están involucradas. Ello nos lleva a dos procesos involucrados en la visualización: *interpretación visual de la información* (VP) para crear imágenes mentales, e *interpretación de imágenes mentales* para generar información (IFI) (Bishop, 1983, p. 177).

Por otra parte, debemos considerar un conjunto de habilidades de visualización necesarias que los estudiantes deben adquirir para poder llevar a cabo los procesos necesarios con las imágenes mentales y que dependen de las características de los problemas matemáticos. Esas habilidades están recogidas en la Sección 1.3.4., de las cuales las principales son: identificación visual, constancia perceptual, rotación mental, percepción de posiciones espaciales, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual.

Presmeg (2006a, pp. 233-234) apunta una serie de direcciones a seguir en cuanto a temas de investigación en este campo y también enumera una lista con trece cuestiones que parecen ser las más significativas para la investigación sobre visualización en educación matemática. Además, esta autora insiste en que la necesidad de investigación en visualización sigue siendo un asunto primordial tanto en la resolución de problemas como en la interacción de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas a todos los niveles.

Partiendo de que el pensamiento visual subyace de forma obvia en la geometría, Clements y Battista (1992, p. 457) consideran que “el pensamiento visual tiene diferentes capas, desde la más primitiva a la más sofisticada y que cada una juega un papel diferente en el pensamiento, dependiendo de la capa que esté activada”. Siguiendo esa línea, Battista (2007) incide en que sería conveniente, de cara al futuro, que las nuevas investigaciones describan exactamente la interacción de la visualización y la conceptualización geométrica durante el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial.

CAPÍTULO 2:
MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha visto en el Capítulo 1, la visualización espacial ha sido y sigue siendo un tema de especial interés dentro de la investigación en Educación Matemática. La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas que requieren visualización espacial; se trata, por tanto, de trabajos con una orientación básicamente cognitiva, usando nociones como imagen visual, imagen conceptual, representaciones internas y externas, etc. Los autores se apoyan básicamente en la dualidad entre representación interna y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas.

Consideramos que estas nociones son insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial y, de modo más general, las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringido a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales.

Clement y Battista (1992) describen la geometría escolar como

> el estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se

> construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales (p. 420).

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que deben ser entendidos como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

En nuestra investigación vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años, y que describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994, 1998; Godino 2002; Godino, Batanero y Font, 2007, 2009).

Consideramos que esta aproximación puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas teóricas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales) y las institucionales (sociales o culturales). Además, la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intra-matemáticos), como lenguaje y como sistema conceptual socialmente compartido.

El EOS puede aportar un punto de vista complementario para abordar cuestiones tales como:

- ¿Qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial?
- ¿Por qué ciertas tareas que requieren visualización y razonamiento espacial presentan una dificultad elevada para determinados estudiantes?

En la siguiente sección presentamos una síntesis de las nociones teóricas del EOS que sirven de base a nuestra investigación.

2.2. MARCO TEÓRICO: ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

La Didáctica de las Matemáticas estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos, en los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas, tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los postulados o supuestos básicos del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas. Dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales). De esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, "sistema de prácticas operativas y discursivas" y "configuración ontosemiótica", ambas en la doble versión personal e institucional. A continuación describimos brevemente estas nociones, además de la noción de función semiótica y los atributos contextuales, los cuales usaremos en el análisis de las tareas geométricas espaciales utilizadas en nuestra investigación.

2.2.1. SISTEMAS DE PRÁCTICAS OPERATIVAS Y DISCURSIVAS LIGADAS A CAMPOS O TIPOS DE PROBLEMAS

Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

Godino y Batanero (1994; 1998) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de "significado de un objeto personal" y "significado de un objeto institucional", que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Estas nociones fueron propuestas con la finalidad de precisar y operativizar las nociones de "relación personal e institucional al objeto" introducidas por Chevallard (1992).

La interpretación semiótica de las prácticas matemáticas, personales e institucionales, permite describir los procesos de aprendizaje en términos de acoplamiento de significados, como se indica en la parte central de la Figura 2.1. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales y, el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

Figura 2.1. Tipos de significados pragmáticos

2.2.2. CONFIGURACIONES DE OBJETOS Y PROCESOS

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos en la actividad matemática) que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones).

La noción de "sistema de prácticas", o la de "sistema semiótico", es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir una tipología de objetos matemáticos.

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios introducidos en el EOS responden a esta necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

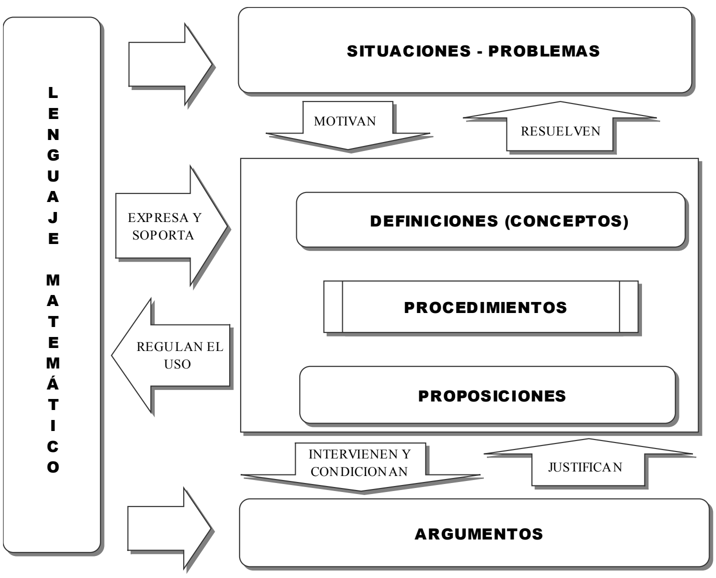
2.2.2.1. Emergencia de los objetos matemáticos

En el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. Se consideran, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel se tienen aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel aparece una tipología de objetos que surge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (p.e., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) podemos observar el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 2.2. (Font y Godino, 2006, p. 69).

Figura 2.2. Configuración de objetos primarios



Se propone pues la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- *Concepto – definición,* introducidos mediante definiciones o descripciones (por ejemplo, recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, …)

Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática[1]. Las situaciones/problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales, comunidades de prácticas y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

Los objetos primarios están relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Segundo nivel: Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al ser considerada, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una

[1] Se amplía, así mismo, el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de situaciones – problemas.

naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – Institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.
- *Ostensivo – No Ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- *Expresión – Contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica[2]. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión,

[2] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1976, 83-84).

significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo – Intensivo*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, lo que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica" (Otte, 2003, p. 187).
- *Unitario – Sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios.

Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la Figura 2.3. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: institucionalización-personalización; generalización–particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación;

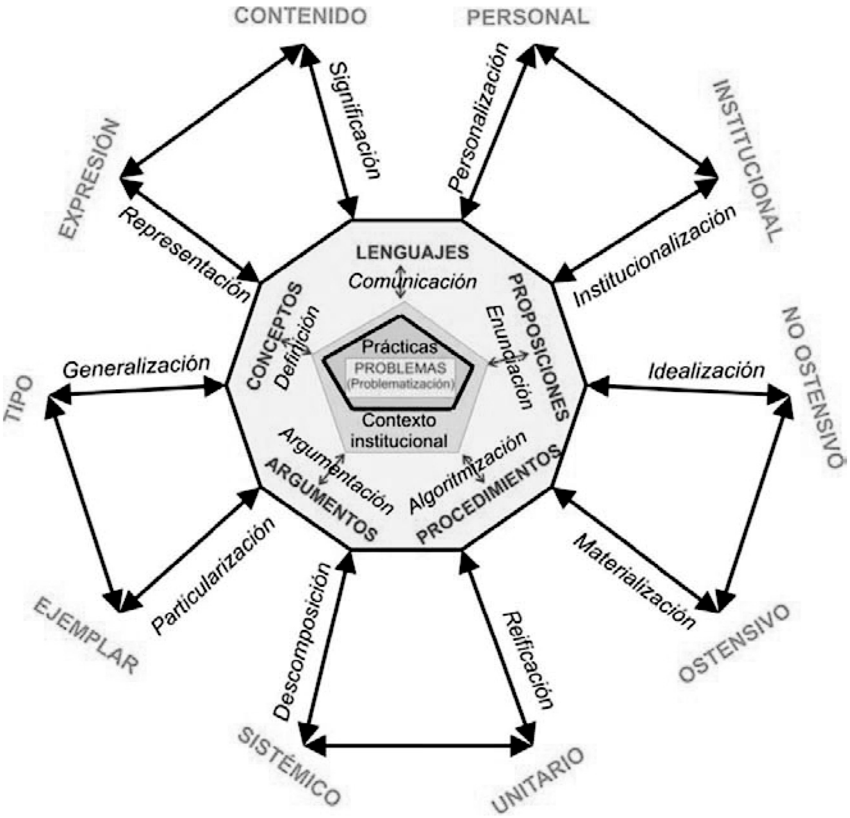
materialización/concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (reflejados en la Figura 2.3), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son híper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

Tampoco se consideran en esta selección los procesos metacognitivos necesarios para la realización de las prácticas (Gusmao, 2006).

Figura 2.3. Configuración de objetos y procesos matemáticos



2.2.3. LOS SIGNIFICADOS COMO CONTENIDOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

Uno de los objetivos iniciales del EOS era dar una respuesta, útil para la educación matemática, a la cuestión ¿cuál es el significado de un concepto? Godino y Batanero (1994, pp. 17-18) propusieron una respuesta pragmatista-antropológica: El significado de un concepto (o del cualquier "objeto matemático") es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que un sujeto realiza para resolver un cierto tipo de problemas en las que dicho objeto interviene. Se establece de esta manera una función semiótica entre el objeto y el sistema de prácticas.

La descripción de la actividad matemática requiere el doble lenguaje de las prácticas y de los objetos intervinientes en las mismas: no hay prácticas sin objetos, ni objetos sin prácticas. Estas dos categorías básicas de entidades se complementan con otra entidad relacional: la función semiótica, que conecta los objetos que intervienen en las prácticas.

Las funciones semióticas son, pues, un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos y del pensamiento que la acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

Se trata de superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/formalista, en la cual los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos, o simplemente como una entidad abstracta o ideal. Objetos matemáticos no son sólo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Asimismo, significados, no son sólo "los sistemas de prácticas", sino "el contenido de cualquier función semiótica". Con este uso ampliado de 'objeto' y 'significado' se requiere, en cada circunstancia, especificar el tipo de objeto o de significado referido para que la comunicación pueda ser efectiva. Hablamos así de 'objetos emergentes' de los sistemas de prácticas como resultantes de los procesos de definición (definiciones), argumentación (argumentos), etc; objetos personales o institucionales; objetos extensivos o intensivos; etc. Para la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponemos el par (sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos). Dado un objeto matemático como "función", "número", etc. se considera que su significado es un sistema complejo de prácticas en las que cada una de las diferentes configuraciones de objetos y procesos en las que se "presenta" el objeto en cuestión posibilita un subconjunto de prácticas de dicho sistema. Esto es, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas, se puede considerar como único y con un significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007).

La Figura 2.3 resume el sistema de objetos y procesos intervinientes y emergentes en las prácticas matemáticas, los cuales pueden participar como expresión, contenido o criterio de funciones semióticas. Se tiene de este modo un instrumento potente para el análisis de la práctica matemática y de los procesos de comunicación y significación implicados.

Una de las expectativas de nuestra investigación es que las herramientas EOS permitirán describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización desde una nueva perspectiva y, por tanto, ayudará a identificar nuevos fenómenos de carácter ontosemiótico.

2.2.4. COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO EN EL EOS

Según Font (2001) hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia. Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que son divergentes. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Sin embargo, los posicionamientos pragmatistas del EOS entienden la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. De esta manera, se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

2.3. PERSPECTIVA DE LA VISUALIZACIÓN EN EL MARCO DEL EOS

En esta sección sintetizamos el trabajo realizado por Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2011) en el que se analiza la visualización en el marco del EOS.

Como hemos indicado en la sección anterior se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las prácticas que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problemas matemáticos. La aplicación de este planteamiento a la visualización lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Con dicho fin fijamos la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica, los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Tales objetos visuales serán o bien cuerpos físicos o bien sus representaciones icónicas o diagramáticas. Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) se materializan mediante inscripciones visibles, no se consideran dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los lenguajes secuenciales (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan sólo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones.

> La idea es que los lenguajes sentenciales están basados en señales acústicas que son secuenciales por naturaleza, y por ello deben tener una sintaxis compleja que lo compense para expresar ciertas relaciones - mientras que los diagramas, siendo bidimensionales, son capaces de mostrar algunas relaciones sin la intervención de una sintaxis compleja (Shin y Lemon, 2008, p. 10).

Los diferentes tipos de objetos primarios que participan en una práctica matemática (conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos, y las situaciones-problemas) serán considerados como visuales siempre que se expresen mediante lenguajes o artefactos visuales. Esto lleva a que la consideración de un objeto como visual lo será en relación al juego de lenguaje en que participe, de modo que si se expresa en lenguaje analítico será considerado como analítico. Con frecuencia las prácticas matemáticas, y en consecuencia las configuraciones de objetos y procesos asociadas, tendrán un carácter mixto, visuales-analíticas, y desde el punto de vista de la progresión del aprendizaje las conversiones entre componentes visuales y analíticos desempeñarán un papel importante.

Nuestro análisis de la visualización tiene en cuenta la distinción peirceana entre tres tipos de signos (icono, índice y símbolo). Atendiendo a la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce (1965) realiza la siguiente clasificación:

- Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.
- Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (índice de tormenta), una huella (índice de alguien que pasó por ahí), etc.

- Símbolos: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual, con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tráfico.

Los diagramas son considerados en la semiótica peirceana como un tipo de iconos mediante los que se representan relaciones inteligibles entre un conjunto de objetos. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico es el que prevalece. Así, por ejemplo, la expresión $\mathrm{y} = x^2 - 2x + 1$, es una parábola; la mera expresión informa de las propiedades esenciales de dicho objeto matemático. Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce. "En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras la expresiones como un todo funcionan como un icono" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47).

Los "objetos visuales" y los procesos de visualización de los que provienen forman configuraciones o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración) (Godino, Batanero y Font, 2009).

La visualización será analizada, en primer lugar, desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan (Figura 2.1), esto es, los tipos de situaciones-problemas (tareas), elementos lingüísticos y materiales, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales se dice que hay visualización. Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.

En segundo lugar la visualización será analizada aplicando las dualidades o modalidades contextuales (Figura 2.2) desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos) e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados). Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido).

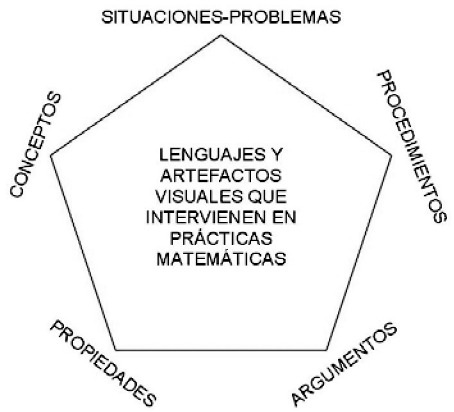
2.3.1. OBJETOS VISUALES PRIMARIOS

La consideración de un "objeto" como visual o no visual no es clara en la literatura. Por una parte tenemos los objetos físicos espaciales que se perciben con el sentido de la vista, que serán los primeros candidatos para ser considerados como "objetos visuales". Una foto, un dibujo o inscripción icónica de los objetos físicos son también claramente objetos visuales en un sentido estricto. La descripción con lenguaje escrito de un objeto físico permite evocar dicho objeto en su ausencia; como además tales inscripciones se perciben con la vista se podría decir que son "objetos visuales". Sin embargo, como hemos indicado anteriormente, por la naturaleza secuencial y proposicional de tales descripciones, consideraremos dichos objetos como analíticos.

La psicología se ha interesado por la naturaleza de las representaciones internas en la mente de las personas de los objetos físicos espaciales, como también de las ideas y conceptualizaciones. De aquí viene el uso de nociones teóricas tales como *imágenes mentales*, *esquemas-imagen*, *concepciones*, etc, las cuales, obviamente no se pueden percibir directamente con la vista (Capítulo1).

Desde el punto de vista de la Educación matemática nos interesa elaborar un modelo que permita analizar el papel del lenguaje, los artefactos y el pensamiento visual en la construcción y comunicación de los diversos tipos de objetos matemáticos, y por tanto, del aprendizaje. Como se ha visto en la Sección 2.2.2 el EOS propone considerar como objetos que intervienen en la práctica matemática, no sólo los medios de expresión lingüística, y en su caso los artefactos manipulativos, sino también los conceptos, las proposiciones, procedimientos y argumentos. Las propias situaciones - problemas o tareas matemáticas de cuya solución emergen los anteriores objetos son también considerados como objetos que intervienen en la práctica matemática, los cuales deben ser también visualizados (Figura 2.4).

Figura 2.4. Visualización y objetos matemáticos



A continuación elaboramos una tipología de objetos visuales para cada una de las categorías de objetos matemáticos primarios.

2.3.1.1. Lenguaje visual

Se trata de los medios de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos en el espacio, o que representan la estructura de sistemas conceptuales. Un primer esbozo de tipos de "lenguajes visuales" puede ser la siguiente:

- icónico (fotografías, pictogramas, planos, mapas...)
- manipulativo (artefactos, cuerpos geométricos, ...)
- deíctico/gestual (indicadores de forma, posición, orientación, …)
- diagramático (diagrama, grafos, esquemas, croquis, ...)

Las inscripciones simbólicas no serán incluidas entre los tipos de lenguajes visuales, a pesar de tratarse de inscripciones visibles/audibles. Los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional.

2.3.1.2. Tareas visuales

Los procesos de visualización y sus resultados, los "objetos visuales", "imágenes" o "visualizaciones", intervienen asociados a determinadas tareas en las que se realizan ciertas prácticas apoyadas en otros objetos y procesos. La visualización se pone en juego en dos tipos principales de situaciones/tareas en las cuales se comunica información (a otros, o a uno mismo), lo que implica registro e interpretación de dicha información:

1) Comunicación de la forma, sus componentes y estructura, de objetos espaciales, o bien de objetos imaginados (pensados o ideales). La comunicación tiene lugar mediante el uso de "representaciones" materiales en forma de fotos, dibujos, esquemas, etc.
2) Comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio. Se trata de "ver" y posicionar relativamente en el espacio físico a uno mismo y a los objetos del entorno (tareas de orientación). Implica el uso de conceptos visuales tales como, arriba, abajo; delante, detrás, derecha, izquierda; cerca, lejos; norte, sur, este, oeste. La comunicación de la posición puede ser realizada mediante el uso de artefactos, medios materiales como maquetas, planos, mapas, etc.

   Los objetos físicos, y sus representaciones, pueden sufrir diversas transformaciones (movimientos, semejanzas, proyecciones, etc.), lo que da origen a una nueva clase de situaciones:
3) Reconocimiento de invariancias en las formas o en sus representaciones, por transformaciones específicas, lo cual se apoya en la discriminación visual: comparar varios objetos, dibujos, imágenes e identificar similitudes o diferencia entre ellos.

Otro tipo de tareas que involucran visualización pueden ser:

4) Reconocimiento y representación mediante diagramas de la estructura de sistemas conceptuales, como es el caso de la Figura 2.2, en la que se trata de representar esquemáticamente los tipos de objetos primarios y relaciones entre los mismos que propone el EOS.

2.3.1.3. Procedimientos (operaciones visuales)

La siguiente relación incluye tipos básicos de operaciones, procedimientos o técnicas que consideramos visuales:

- Proyectar cuerpos en el espacio, seccionar, rotar, simetrizar, trasladar, deslizar.
- Construir sólidos a partir de sus proyecciones planas y viceversa.
- Transformar representaciones visuales mediante descomposición y recomposición de figuras, etc.
- Representar gráficamente relaciones, etc.

2.3.1.4. Conceptos

Entendemos por concepto un invariante o entidad cuyo significado es fijado por una definición o regla, existiendo una ilimitada variedad de posibles ejemplos que cumplen dicha regla. En el estudio del espacio y la geometría es necesario distinguir entre los conceptos de representación (externa), dibujo, imagen, figura, y los correspondientes conceptos figurales representados (triángulo, prisma cuadrangular recto, etc.).

Los sistemas de representación cartesiana, o de otro tipo, incluyen configuraciones de conceptos de naturaleza visual y espacial (arriba, abajo, derecha, izquierda, norte, sur, etc.).

2.3.1.5. Propiedades

Se trata de relaciones entre conceptos expresadas mediante proposiciones (esto es, enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer). Algunos tipos de proposiciones visuales, esto es, propiedades que intervienen en la solución de tareas visuales y se expresan en lenguaje visual:

- Propiedades de los procedimientos visuales utilizados: por ejemplo la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos,
- Propiedades del lenguaje visual utilizado: conservación de la forma en las proyecciones proporcionales, propiedades de las isometrías (rotaciones, traslaciones, simetrías), propiedades de las diferentes proyecciones.
- Propiedades de los conceptos visuales.

2.3.1.5. Argumentos/justificaciones visuales

La elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos requerirá bien la simple presentación del objeto material correspondiente, si se trata de propiedades de naturaleza empírica, o bien podrá demandar la elaboración de argumentaciones deductivas basadas en reglas previamente aceptadas. Las llamadas "demostraciones sin palabras" de propiedades geométricas generales requerirán el uso conjunto de un discurso analítico que evoque las definiciones y teoremas previamente establecidos. En el estudio de la geometría dinámica con recursos informáticos es frecuente el uso de justificaciones de propiedades y procedimientos mediante el arrastre de las figuras, siendo en gran medida justificaciones visuales.

2.3.2. VISUALIZACIÓN Y ESPECIFICACIONES CONTEXTUALES

Los objetos visuales descritos en la Sección 2.3.1 pueden ser clasificados desde distintos puntos de vista según los contextos y juegos de lenguaje en que intervienen. Así, como se ha visto en la Sección 2.2.2, en el marco del EOS se consideran, además, seis dualidades aplicables a los objetos matemáticos (Figura 2.5), que en el caso de la visualización serán descritas en las siguientes secciones.

Además, cada una de las anteriores especificaciones contextuales de los objetos implicados en la visualización (Figura 2.4) se puede contemplar desde la perspectiva de los procesos implicados: personalización - institucionalización; materialización - idealización; composición - descomposición; particularización - generalización; representación - significación).

Figura 2.5. Especificaciones contextuales de la visualización

2.3.2.1. Dualidad Personal – Institucional

La dialéctica entre cognición individual y social o cultural es interpretada en el EOS mediante la dualidad personal - institucional. Nuestro planteamiento de la visualización no entra en la discusión filosófica y psicológica acerca del funcionamiento interno de la mente y de si la información es representada y procesada de manera icónica o de otro modo (Thomas, 2010). La dualidad personal - institucional introducida en el EOS postula una forma de existencia de los objetos matemáticos que califica de personal o mental (sin entrar en detalles sobre la efectiva naturaleza de tales objetos) y otra forma de existencia que considera como institucional, a los cuales se les atribuye una naturaleza intersubjetiva/normativa. No obstante, la filiación del EOS con los supuestos antropológicos y pragmatista de Wittgenstein llevan a rechazar las teorías que postulan el funcionamiento iconográfico de la mente.

En las investigaciones cognitivas interesadas en el papel de la percepción, y en consecuencia en la visualización, en los distintos campos de conocimiento, y también en educación matemática, se ha introducido la noción de "image schema" (esquema-imagen)[3]:

> Un esquema imagen es un patrón dinámico recurrente de nuestras interacciones perceptivas (…) que dan coherencia y estructura a nuestra experiencia. La experiencia se ha de entender en un sentido rico y amplio que incluye la percepción básica (…) y las dimensiones emocional, histórica, social y lingüística (Johnson 1987: xiv, xvi).

Nuestras experiencias corporales/visuales se incrustan en nuestra mente en forma de esquemas-imagen que apoyan y condicionan los procesos de conceptualización y de razonamiento proposicional/analítico. Algunos ejemplos de esquemas- imagen pueden ser: continente/contenido; parte/todo; inicio/trayectoria/final ("Source-Path-Goal schema"); objeto. Los esquemas-imagen orientacionales como centro - periferia, dentro - fuera, frente - detrás, arriba - abajo; son de particular interés para organizar los sistemas de objetos que se ponen en juego en las representaciones gráficas de funciones (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

Los esquemas - imagen son estructuras cognitivas/mentales que se generan en el cerebro de los individuos como resultado de ciertas prácticas y están, por tanto, impregnados de percepción. El objeto matemático (inmaterial) también emerge de las prácticas de las personas implicadas ante cierto tipo de situaciones - problemas, pero tiene unas características formales, normativas, convencionales, socio-epistémicas, que no concuerdan con las connotaciones empiristas de los esquemas - imagen y las visualizaciones.

La visión del conocimiento matemático según el enfoque de la cognición corporeizada (Johnson, 1987; Lakoff y Nuñez, 2000) impregna al objeto matemático de matices empíricos a través del lenguaje metafórico que resalta las raíces empíricas del conocimiento, pero que oculta su verdadera naturaleza. Se requiere, por tanto, controlar conscientemente el uso de las metáforas visuales o corporeizadas transmitidas por los esquemas-imagen. El principal conflicto con las esquemas - imagen es que su uso

[3] Preferimos "traducir" 'image schema' con una palabra compuesta al considerar que refleja mejor el significado de la expresión inglesa, u otras similares usadas por otros autores como, image schemata o types of imagery.

metafórico puede pasar desapercibido, y el profesor y los alumnos no distinguen entre el dominio fuente (perceptual) y el diana (matemático) (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

2.3.2.2. Dualidad Ostensivo – No Ostensivo

Lo ostensivo hace referencia a lo perceptible, mientras que lo no ostensivo a lo inmaterial, mental o ideal. Aquí aparecen las distinciones entre representaciones externas (ostensivas, artefactos) y las representaciones internas (esquemas, imágenes mentales, etc.).

La dualidad ostensivo - no ostensivo postula que cualquier objeto matemático (ideal, abstracto) lleva asociado, como la cara de una moneda lleva asociada su correspondiente cruz, uno o diversos objetos ostensivos. Estos pueden ser símbolos o inscripciones, o representaciones visuales más o menos ricas indicadoras de su composición y estructura.

El EOS concede un papel esencial a la "ostensión" en la práctica matemática al postular que cada objeto matemático (abstracto, ideal, general, inmaterial, no ostensivo) tiene una faceta ostensiva, esto es, mostrable públicamente, visualmente o de otro modo perceptivo. Esta ostensión puede consistir en las inscripciones simbólicas, necesarias para representar los objetos entendidos como un todo unitario, y poder "operar" con ellos en progresivos niveles de generalidad, o bien visualizaciones icónicas o diagramáticas que muestren la estructura del objeto, entendido de manera sistémica. Este postulado sobre la faceta ostensiva de los objetos matemáticos está en concordancia con los principios propuestos por la perspectiva de la cognición corporeizada para la matemática (embodied cognition) (Lakof y Nuñez, 2000).

Sin embargo, entre las facetas ostensiva y no ostensiva de los objetos matemáticos hay relaciones dialécticas delicadas. Fischbein (1998) analiza la tensión entre los aspectos formales/conceptuales de los objetos matemáticos y los aspectos figurales en el caso de los objetos geométrico-espaciales, o sea, entre lo inmaterial/conceptual y lo material/visual. Por una parte, el objeto matemático es inmaterial, invisible, pero depende para su "existencia" de lo material, visible. Esta es una manera de expresar la paradoja cognitiva del aprendizaje matemático que describe Duval (2006).

El EOS propone una solución a esta paradoja asumiendo los postulados pragmatista-antropológicos (Peirce, 1965; Wittgenstein, 1953) para los objetos matemáticos: los conceptos y las proposiciones son concebidos como reglas "gramaticales" de un cierto tipo. Los enunciados matemáticos son reglas para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos.

Desde esta perspectiva, la “verdad”, “certeza” o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla que forma parte de un juego de lenguaje que se pone en funcionamiento en determinadas prácticas sociales. No es un "acuerdo de opiniones" arbitrarias, es un "acuerdo" de prácticas sometidas a reglas.

Aunque los objetos matemáticos, en sentido estricto, son entidades inmateriales, esto es, no ostensivas (imperceptibles, invisibles) provienen de las prácticas y experiencias de las personas con el mundo. En consecuencia no resultará extraño el uso de metáforas para describir e interpretar las organizaciones matemáticas en términos de las experiencias corporales y percepciones, como describen Lakoff y Nuñez (2000).

2.3.2.3. Dualidad Expresión – Contenido

La noción de *representación* es introducida en el EOS mediante la dualidad expresión - contenido, como un tipo particular de relación entre los objetos primarios introducidos en el modelo; usualmente el antecedente de tales relaciones serán entidades lingüísticas, pero también pueden ser otros tipos de entidades. La expresión puede ser una imagen, un dibujo, un diagrama, etc., que representa (metafórica o icónicamente) un objeto físico, una figura geométrica, una estructura conceptual. Se trata de comprender una realidad compleja en términos de otra que la representa y con la que se opera.

La dualidad expresión - contenido da cuenta del uso metafórico de los objetos visuales (configuraciones) para comprender una realidad abstracta, no ostensiva, en términos de otra realidad ostensiva, visual. Mediante la Figura 2.4. (visualización y objetos matemáticos) y la Figura 2.5. (especificaciones contextuales de la visualización) se quieren resaltar algunos aspectos estructurales (componentes y relaciones) que configuran las nociones cognitivas y epistémicas del EOS. Es claro que el uso del pentágono (Figura 2.4.) y del decágono (Figura 2.5.) es meramente metafórico.

2.3.2.4. Dualidad Extensivo – Intensivo

Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas.

Una imagen puede ser usada como icono de una clase o como un tipo de objetos visuales. Fischbein (1998) resalta la tensión entre los ejemplos prototípicos, las metáforas, los paradigmas y analogías y los objetos generales a los cuales se refieren. Tales concreciones y materialización son esenciales en los procesos de invención y comunicación matemática, pero resulta necesario controlar su uso mediante las definiciones y reglas previamente asumidas.

2.3.2.5. Dualidad Unitario – Sistémico

Esta dualidad está ligada a los procesos de reificación, en el sentido de constitución de objetos por parte de un sujeto individual como una totalidad, la cual interviene como tal en nuevas actividades y procesos, y al proceso inverso de descomposición de una entidad sistémica en sus elementos constituyentes.

Las imágenes son vistas como un todo y se "opera" con ellas como un todo unitario, o bien son vistas como sistemas formados por partes, y se opera con las partes. En el caso de esquemas y diagramas, como la Figura 2.4 y Figura 2.5, la visualización resalta las partes constituyentes del sistema de objetos representados y las nuevas entidades que se constituyen: las configuraciones cognitivas y epistémicas de objetos y procesos.

2.3.3. TIPOS DE CONFIGURACIONES VISUALES

Llamamos configuración a la red de objetos y procesos que se ponen en juego en la realización de una determinada práctica matemática. Estas configuraciones constituyen sistemas semióticos, en el sentido definido en Godino y cols. (2009, p. 8). La combinación de las Figuras 2.4 y 2.5 nos ofrece una imagen visual, metafórica, de esta noción teórica. Con ella se quiere resaltar la complejidad de los sistemas cognitivos y epistémicos que se ponen en juego en la construcción y comunicación del conocimiento matemático (y de cualquier conocimiento en general). Se quiere romper con la imagen/concepción tradicional de los tipos de conocimiento (conceptual, procedimental), así como de la visión parcial de los procesos de abstracción y concreción de las ideas matemáticas.

Aquellas configuraciones en las que intervengan procesos y objetos visuales serán denominadas configuraciones visuales, las cuales deberán ser distinguibles frente a otras que no serán visuales (configuraciones analíticas/proposicionales). También habrá configuraciones mixtas visuales-analíticas con diferentes grados de visualización. El pensamiento o razonamiento que acompaña a los objetos visuales estará usualmente articulado con el pensamiento o razonamiento verbal/analítico.

Los objetos visuales pueden ser ostensivos y extensivos (una foto, un dibujo, etc.) de un objeto espacial, o bien no ostensivos e intensivos (un concepto figural, como un triángulo entendido como figura geométrica). Se puede hablar de visualización como la producción de una representación ostensiva particular de un intensivo (visualización descendente) y también de la producción de un intensivo a partir de una colección de representaciones ostensivas particulares (visualización ascendente). Se trata en este caso de imaginar mentalmente objetos geométricos espaciales (creación de una imagen mental), así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

La siguiente categorización de configuraciones visuales puede ser útil para analizar el tipo y grado de visualización de una práctica o actividad matemática, en particular para el análisis de textos o materiales escolares.

- Según el tipo de lenguaje visual: icónica, indexical, diagramática, deíctica/gestual, manipulativa.
- Según el tipo de operación visual que se realiza: proyectiva, constructiva, orientacional/posicional, transformacional, conversión de una tarea dada en lenguaje natural a lenguaje visual.
- Según el dinamismo de los objetos visuales: estática (objetos visuales fijos), dinámica (movimiento de figuras).
- Según los objetos matemáticos implicados: visualización geométrica, analítica, aritmética, algebraica, estocástica

Los tipos anteriores se pueden combinar en una práctica matemática formando tipos mixtos de configuraciones. Así, podremos encontrarnos con una configuración geométrica, dinámica, proyectiva, icónica, etc. En cualquier práctica matemática hay un doble juego entre dos configuraciones en interacción: la figural/intuitiva/visual y la analítica o formal. Esta característica se pone de manifiesto con más intensidad en el caso de la actividad geométrica, donde se requiere un desplazamiento continuo entre visualización y discurso. En general, no se miran las visualizaciones matemáticas como se mira una foto, o una imagen, o dibujo de un objeto espacial. Tales representaciones llevan asociados otros objetos visuales y no visuales que intervienen de manera decisiva en la práctica matemática correspondiente.

2.4. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez presentado el marco teórico, estamos en condiciones de especificar los objetivos de nuestra investigación, la importancia de los mismos y la forma en que tratamos de abordarlos.

El objetivo general de nuestra investigación se centra en la evaluación de habilidades de visualización y razonamiento espacial (VRE) de futuros profesores de educación primaria. Una vez concretado dicho fin ha sido necesario, en primer lugar, realizar un amplio análisis sobre el estado de la cuestión que sirva de base para la clarificar la naturaleza del constructo VRE, seleccionar tareas adecuadas para construir un cuestionario, así como para interpretar los resultados y relacionarlos con los correspondientes a otras investigaciones.

Vamos a interpretar la noción cognitiva de *habilidad* en términos de las nociones teóricas del EOS como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y de la configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas. En consecuencia, formularemos el objetivo general en los siguientes términos:

Objetivo específico 1: Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE.

Estos objetivos, así formulados, fijan la atención en la faceta cognitiva de la VRE, esto es, en determinar los significados personales de los sujetos individualmente considerados. En el marco del EOS el análisis e interpretación de tales significados personales debe hacerse en el marco de unos significados institucionales previamente establecidos. Por ello es necesario reconstruir las prácticas institucionales operativas y discursivas requeridas en la solución de las tareas seleccionadas, así como las configuraciones de objetos y procesos asociados, que sirvan de modelo epistémico de referencia. La comparación de los significados institucionales de referencia con los significados personales lleva a formular otros dos objetivos específicos:

Objetivo específico 2: Determinar los principales conflictos manifestados por los sujetos ante la resolución de las tareas seleccionadas de VRE.

Objetivo específico 3: Conocer en qué medida se pueden explicar los conflictos en la realización de tareas de VRE en términos de la complejidad ontosemiótica de dichas tareas.

El interés de abordar estos objetivos se basa en el papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático en general y, de manera especial, en el aprendizaje de la geometría, por lo que su evaluación y desarrollo debe ser un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos. Para el caso de la Educación Primaria así se reconoce en los diseños curriculares de los diversos países (NCTM, 2000; MEC, 2006), lo que plantea un reto para la formación de profesores, tema que ha sido objeto de un menor número de investigaciones (Sección 1.5). El conocimiento de las habilidades iniciales de los futuros profesores sobre visualización y razonamiento espacial es, sin duda, una información necesaria para el diseño de acciones formativas fundamentadas sobre este contenido curricular.

En cuanto a las hipótesis de nuestra investigación, entendidas como expectativas de resultados, las formulamos en los siguientes términos:

Hipótesis 1: El uso del "enfoque ontosemiótico" sobre el conocimiento matemático, en particular los tipos de objetos y procesos propuestos, permitirá operativizar nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre VRE (habilidades, imágenes, esquemas, etc.) y aportará explicaciones complementarias de los conflictos de los sujetos al resolver tareas de VRE.

Hipótesis 2: Encontraremos una variedad de configuraciones cognitivas de los estudiantes mediante las cuales se pueden describir niveles de habilidad sobre VRE.

Hipótesis 3: Los porcentajes de estudiantes que manifiestan configuraciones cognitivas de alto nivel con relación a la habilidad VRE serán significativamente inferiores a los que manifiestan configuraciones de bajo nivel.

Hipótesis 4: La alta incidencia de las configuraciones cognitivas de bajo nivel se puede explicar en términos de la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de las tareas de VRE incluidas en el instrumento de evaluación.

2.5. METODOLOGÍA

El enfoque metodológico general de la investigación tiene un doble componente cualitativo y cuantitativo, pudiéndose describir como investigación de tipo mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009). Gall, Borg y Gall (1996, p. 767) definen la investigación cuantitativa como:

> Indagación que se basa en el supuesto de que las características del entorno social constituyen una realidad objetiva que es relativamente constante en el tiempo y el entorno. La metodología dominante es describir y explicar las características de esta realidad mediante la recogida de datos numéricos sobre conductas observables de muestras y sometiendo estos datos a análisis estadísticos.

Similarmente, los autores citados definen la investigación cualitativa como:

> Indagación que se basa en el supuesto de que los individuos construyen la realidad social en la forma de significados e interpretaciones, y que estas construcciones tienden a ser transitorias y situacionales. La metodología dominante consiste en descubrir estos significados e interpretaciones mediante el estudio de casos en profundidad en entornos naturales y sometiendo los datos resultantes a inducción analítica.

En nuestro caso, el análisis de las soluciones a los ítems de evaluación incluidos en el cuestionario, tanto en la faceta epistémica (soluciones expertas de referencia) como en la faceta cognitiva (soluciones dadas por los estudiantes), se realiza aplicando a los textos correspondientes las categorías de objetos primarios y secundarios que propone el EOS. Este análisis tiene un componente fuertemente interpretativo y contextual. Los tipos de configuraciones cognitivas que se determinan emergen del análisis de las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los sujetos que responden al cuestionario, tratándose, por tanto, de un análisis cualitativo.

Por otra parte, la finalidad de nuestra investigación es evaluar ciertas habilidades de visualización y razonamiento espacial de los sujetos, un rasgo que en nuestro caso se cuantifica mediante el grado de corrección de las respuestas al cuestionario. Se trata de una variable cuantitativa que se resume y analiza mediante técnicas estadísticas.

No es, sin embargo, una investigación experimental, puesto que no se realiza un control y manipulación de variables independientes, sino que se engloba en la investigación cuasi-experimental (Cook y Campbell, 1979). Siguiendo las clasificaciones que propone Bisquerra (1989) podemos encuadrar nuestro trabajo como investigación aplicada, puesto que va encaminada a la resolución de un problema práctico, que es la mejora de la formación de profesores en un área de contenido específica. Según la manipulación de las variables sería más bien una investigación "ex post facto", ya que hemos tratado de descubrir fenómenos que ocurren en forma natural, pero se han medido diversas variables para analizar su posible efecto. No ha habido manipulación experimental de las variables. Por sus fuentes, es empírica, aunque con elementos de investigación bibliográfica y de construcción teórica.

Para abordar los objetivos mencionados hemos realizado los siguientes estudios, cada uno de los cuales requiere implementar una metodología específica.

2.5.1. ESTUDIO 1: Caracterizar la VRE en las investigaciones en educación matemática, teniendo en cuenta las facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica implicadas.

Los resultados de este estudio se han presentado en el Capítulo 1. Se trata de un estudio básicamente de tipo documental, habiéndose recopilado las publicaciones sobre visualización y razonamiento espacial, descrito las herramientas teóricas usadas y los principales resultados obtenidos en las mismas. Los resultados se han clasificado según cuatro dimensiones o facetas: epistémica (contenidos geométricos tratados bajo el marco de la VRE), cognitiva (significados personales de los sujetos sobre VRE), instruccional (experiencias orientadas al desarrollo de habilidades de VRE) y faceta ecológica (aspectos curriculares, diferencias culturales, conexiones con otros contenidos).

Hemos procedido a una búsqueda sistemática de las publicaciones a partir de los handbooks de investigación y bases de datos bibliográficos (MathEduc).

2.5.2. ESTUDIO 2: Elaborar un modelo teórico específico sobre VRE en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Sección 2.3).

Este estudio se ha realizado en colaboración con el equipo de investigación de la Universidad de Granada que viene desarrollando el “enfoque ontosemiótico” del conocimiento y la instrucción matemática. En la Sección 2.3. hemos presentado el trabajo elaborado, que nos servirá de marco de referencia para analizar e interpretar los resultados de nuestro estudio de evaluación.

Se trata de un estudio de tipo documental y de construcción teórica que tiene en cuenta las nociones cognitivas usadas en la bibliografía sobre VRE sintetizadas en el Capítulo 1. El punto de vista ontosemiótico aporta la noción de configuración de objetos y procesos (en su doble versión, epistémica y cognitiva) que complementa y enriquece las nociones cognitivas de imagen mental, esquema, habilidades, etc., aportando un nivel de análisis más fino y operativo.

2.5.3. ESTUDIO 3: Seleccionar una muestra de tareas que permitan caracterizar las habilidades sobre VRE de futuros profesores. Aplicación a muestras piloto, análisis e interpretación de resultados de dichas muestras.

Este estudio se describe en el Capítulo 3 y se apoya en los resultados del estudio 1. La metodología de este estudio es de tipo mixto, cualitativo (selección y análisis a priori de los ítems) y cuantitativo (estudio mediante estadística descriptiva de los resultados de aplicación del cuestionario piloto).

El instrumento construido lo encuadramos dentro de la teoría psicométrica de maestría de dominio (Thorndike, 1989), ya que podemos considerar que la puntuación total en la prueba está relacionada con el grado de maestría o habilidad de los sujetos en un dominio dado de conocimientos y habilidades, en este caso, sobre visualización y razonamiento espacial.

Los ítems seleccionados serán descritos en términos de las habilidades de VRE necesarias para su resolución y, cada uno de ellos, se encuadrará dentro de la tipología de tareas visuales descritas en el Capítulo 1.

2.5.4. ESTUDIO 4: Elaboración de las configuraciones epistémicas ontosemióticas de los ítems del cuestionario de evaluación

Este estudio se realiza en el Capítulo 4 mediante el análisis ontosemiótico de los siete ítems que componen el cuestionario final de evaluación. Las configuraciones de objetos y procesos construidas sirven de modelo epistémico de referencia para el análisis e interpretación de las configuraciones cognitivas de los estudiantes identificadas en el estudio de evaluación.

Este estudio es básicamente cualitativo y consiste en aplicar la noción de configuración epistémica de objetos y procesos del EOS a cada uno de los ítems que componen el cuestionario.

La técnica del análisis ontosemiótico (Godino, 2002) se ha revelado como un recurso metodológico útil para nuestra investigación. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microscópico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis ontosemiótico permite revelar la complejidad ontosemiótica de una actividad matemática e identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en la resolución de una tarea matemática, así como identificar las limitaciones de los conocimientos y habilidades matemáticas efectivamente puestas en juego.

2.5.5. ESTUDIO 5: Evaluación de las habilidades de VRE de futuros profesores de matemáticas

En el Capítulo 5 informamos de este estudio consistente en la aplicación del cuestionario elaborado a una muestra de 400 estudiantes, futuros profesores de educación primaria, a fin de caracterizar sus habilidades de VRE.

El estudio de evaluación propiamente dicho consta de una parte cuantitativa y otra cualitativa. En la parte cuantitativa, primeramente se analiza la dificultad de los ítems en el global de la muestra y se compara la dificultad en los grupos de estudiantes, siempre contrastando con los resultados de los trabajos anteriores a los nuestros. Igualmente se analiza la puntuación global y en cada uno de los grupos que participan en la investigación.

Este estudio tiene también un fuerte componente cualitativo ya que se realiza un análisis en profundidad de ejemplos prototípicos de respuestas de estudiantes en cada ítem, el cual permite caracterizar tipos de configuraciones cognitivas, teniendo en cuenta los tipos de objetos primarias del EOS. El carácter cualitativo del estudio también se resalta en el análisis de los tipos de errores o conflictos que manifiestan los estudiantes al responder a cada ítem.

La incidencia en la muestra de estudiantes de los tipos de configuraciones cognitivas y de los tipos de errores es también analizada desde un punto de vista cuantitativo, usando técnicas estadísticas descriptivas. Nuestra investigación se puede, por tanto, inscribir dentro del paradigma metodológico emergente caracterizado por el uso de una combinación sinérgica de métodos cualitativos y cuantitativos de investigación (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009).

2.6. POBLACIÓN Y MUESTRA

En la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio o población de estudiantes sobre la que se centra la investigación son los estudiantes de magisterio. La población objetivo, de la que se han tomado las muestras, son los estudiantes de tercer curso de la Diplomatura de Maestro de la Universidad de Santiago de Compostela en sus distintas especialidades (Primaria, Infantil, Lengua extranjera y Musical). Se ha restringido la población por consideraciones operativas y porque, en general, estos estudiantes tienen unas características similares a las de los de otras comunidades españolas, con edades comprendidas entre los 21 y 23 años. De esta población se han recogido muestras intencionales (Ghiglione y Matalon, 1989).

La primera muestra piloto estaba formada por un total de 44 alumnos y la muestra definitiva está constituida por 400 alumnos, recogida a lo largo de tres cursos académicos (2005-2006; 2006-2007 y 2008-2009). Se ha intentado diversificar la muestra, dentro de lo posible, contando con estudiantes de diferentes especialidades, pensando que esta situación podía ofrecer una variabilidad mayor de respuestas.

En las tablas siguientes (Tabla 2.1, Tabla 2.2, Tabla 2.3) se muestra la frecuencia y porcentaje del número de estudiantes atendiendo a la especialidad, género y curso académico, respectivamente.

Tabla 2.1. Frecuencia y porcentaje del número de estudiantes por especialidad

Especialidad	Frecuencia	Porcentaje
Primaria	182	45,50
Infantil	71	17,75
Lengua extranjera	48	12,00
Musical	99	24,75
Total	400	100,00

Tabla 2.2. Frecuencia y porcentaje del número de estudiantes por género

Género	Frecuencia	Porcentaje
Mujer	310	77,50
Hombre	90	22,50
Total	400	100,00

Tabla 2.3. Frecuencia y porcentaje del número de estudiantes por curso académico

Curso	Frecuencia	Porcentaje
2005-2006	170	42,50
2006-2007	104	26,00
2008-2009	126	31,50
Total	400	100,00

La investigadora se desplazó personalmente a los cursos participantes para explicar la finalidad del cuestionario. Los alumnos respondieron a los cuestionarios como una actividad más a desarrollar en la clase de Matemáticas. Esa participación implicaba, entre otras cosas, que los estudiantes intentaran describir la estrategia o el procedimiento que los llevaba a dar una respuesta y que no se limitaran a marcar una opción o dar una respuesta sin explicarla.

2.6.1. VARIABLES Y TÉCNICAS DE ANÁLISIS

El análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems del cuestionario se realiza mediante la observación de las siguientes variables:

Variables cuantitativas:

1) Corrección de la respuesta a cada ítem, considerada como una variable dicotómica (correcta, incorrecta).
2) Nivel de habilidad en VRE medido por la puntuación total en los siete ítems que componen el cuestionario.

Variables cualitativas:

3) Especialidad cursada por el estudiante (Educación Primaria, Infantil, Lengua Extranjera, Musical).

4) Género.
5) Curso académico.
6) Tipo de error puesto de manifiesto en las respuestas (situacional, conceptual, procedimental o combinado).
7) Tipo de configuración cognitiva manifestada en las respuestas a cada ítem.

Para las variables cuantitativas se han aplicado técnicas descriptivas de análisis estadístico (tablas de frecuencias, promedios y dispersiones). También se ha aplicado análisis de varianza multifactorial para determinar la significación del efecto de las variables especialidad cursada, género y curso académico. Para las variables cualitativas se han elaborado tablas de frecuencias con objeto de describir la incidencia de los tipos de configuraciones y los tipos de conflictos.

La determinación de los tipos de configuraciones cognitivas y errores que manifiestan los estudiantes en sus respuestas y el posterior estudio de la incidencia, tanto de las configuraciones como de los errores en el conjunto de la muestra, es un caso de integración de métodos cualitativos y cuantitativos. No se trata de una mera yuxtaposición de métodos sino de una articulación sinérgica entre ambos enfoques.

La determinación de las configuraciones se realiza mediante el análisis de objetos y significados puestos de manifiesto en las prácticas operativas y discursivas de los sujetos. “El análisis cualitativo de estas fuentes de datos implica la aplicación de códigos a priori o emergentes para facilitar la interpretación del significado” (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009, p. 29). En nuestro caso se trata de los códigos propuestos por el EOS consistentes en los tipos de objetos primarios (situaciones, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y secundarios (tipos de dualidades cognitivas).

CAPÍTULO 3:

ELABORACIÓN DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de cualquier ciencia es adquirir conocimiento y para ello la elección del método adecuado que nos permita conocer la realidad es fundamental. Sin embargo, siguiendo a Vasilachis (2006, p. 21), no es suficiente producir conocimiento útil y relevante, sino que es fundamental dar cuenta de cada uno de los procesos de investigación; tanto de la selección como de la recolección de los datos, de su trascripción como de su análisis, de las decisiones como de las justificaciones del muestreo, de la codificación como de las relaciones entre conceptos, de la adaptación y/o modificación como de la creación de teoría, dicho de otro modo, exhibir cada una de las etapas que conducen a la obtención de los resultados.

Siguiendo las ideas expuestas en párrafo anterior, el primer paso a seguir consiste en describir el proceso de selección de los ítems que formarán parte del instrumento de evaluación (cuestionario). En este capítulo se mostrará y justificará el proceso seguido para la elección de los ítems y también se establecerá una descripción de estos desde algunas de las clasificaciones de tareas contenidas en las investigaciones anteriormente citadas.

Como se vio en el Capítulo 1, existen diferentes investigaciones que muestran la existencia de lazos entre la habilidad espacial y el rendimiento en tareas geométricas (Arrieta, 2006; Bishop, 1983; De Guire, 1982) y que, además, la instrucción puede mejorar esa capacidad espacial (Ben-Chaim et al., 1988; Gutiérrez, 1991; Olkun, 2003; Owens, 1992). De acuerdo con Cosío (1997), esa mejora será entendida como un progreso en la habilidad espacial, el cual supone el desarrollo de una serie de habilidades simples relacionadas de manera informal como son la habilidad para reconocer distintas vistas de un mismo elemento, la habilidad para realizar o reconocer una transformación de un elemento en otro, la habilidad de poder imaginar una escena sin estar presente para luego transformarla, la de producir una semejanza gráfica de información espacial, etc.

En el proceso de "ensayo" de ítems orientado a la selección de los mismos para la construcción del instrumento de evaluación, se elaboraron dos cuestionarios, un cuestionario piloto 1 (CP1) y un cuestionario piloto 2 (CP2) que fueron aplicados en tiempos diferentes a una muestra de estudiantes de 3º de la Diplomatura de Maestros de la especialidad de Educación Primaria, en la materia Didáctica de la Matemática I (Universidad de Santiago de Compostela). La elección de dos cuestionarios en lugar de uno más amplio tiene su justificación en la intención de que pudieran ser respondidos en una hora aproximadamente, para de esta forma no saturar a los alumnos con un número elevado de cuestiones no habituales en su práctica educativa. Se debe tener en cuenta que el plan de estudios de esta Diplomatura (BOE, 2000) no contempla ninguna materia de matemáticas hasta el tercer curso y, además, la mayor parte de los estudiantes provienen de un bachillerato de Humanidades o Ciencias Sociales. Esta circunstancia va a condicionar una limitación en la dificultad de las tareas presentadas, puesto que un porcentaje elevado de estudiantes podría llevar hasta un periodo de cuatro años sin ningún contacto con contenidos matemáticos.

3.2. SELECCIÓN DE LOS ÍTEMS DE LOS CUESTIONARIOS PILOTO

En cuanto a la característica intrínseca de los ítems de cada cuestionario, éstos fueron seleccionados de manera que ninguno fuese de la misma naturaleza que las actividades trabajadas en clase, para no distorsionar el objetivo de la prueba, en el sentido de no tener que trabajar con la variable instrucción específica de un concepto. A través de esos ítems se pretendía analizar diferentes aspectos relacionados con la habilidad y capacidad espacial, correspondiéndose con diversas tareas de las investigaciones descritas en la Sección 1.3.1: realizar cortes de figuras, rotar figuras tri y bidimensionales, completar figuras bidimensionales para formar una figura simétrica, desarrollar y transformar cuerpos tridimensionales, analizar diferentes puntos de vista de una misma composición, conteo de estructuras ortoédricas con agujeros, componer y recomponer formas, etc. Por lo tanto, las tareas seleccionadas serán cuestiones importantes desde el punto de vista de la investigación, al ser consideradas como tareas visuales según el marco teórico adoptado (Capítulo 2).

Por otra parte, las tareas forman parte de los objetivos propuestos en la investigación como objetivos curriculares, al estar contemplados los contenidos matemáticos, que intervienen, de forma explícita o implícita, en las mismas en el currículo de la formación de maestros. Estos contenidos se detallarán de una manera más específica y concreta en el Capítulo 4, al realizar las configuraciones epistémicas de cada uno de los ítems que compondrán el cuestionario definitivo.

Los resultados de Owens (1992, p. 208), en un estudio realizado con niños de segundo y cuarto de primaria, muestran que la experiencia con problemas espaciales bidimensionales afectan a los procesos del pensamiento bidimensional; sin embargo esos procesos no se transfieren a la resolución de los ítems en 3D. Este resultado justificaría la incorporación en el estudio de tareas en el espacio bidimensional. Este autor recalca la importancia y el gran potencial de la resolución de problemas concretos en la enseñanza primaria para conseguir ayudar a los niños en su aprendizaje espacial.

En la Tabla 3.1 se recoge la referencia de cada uno de los ítems que componen los dos cuestionarios piloto (CP1 y CP2). Como puede observarse en la siguiente tabla, la mayor parte fueron seleccionados de varias convocatorias del concurso de resolución de problemas por niveles "Canguro Matemático" (s.f.), en el que se intenta evitar la propuesta de tareas y problemas rutinarios o algorítmicos. El nivel educativo de la mayoría de los ítems corresponde a 1º de la E.S.O. En este nivel los enunciados de las tareas son bastante sencillos, siendo otro de los objetivos principales de esta fase que los ítems elegidos no bloquearan de entrada a los estudiantes para que se iniciaran en su resolución.

Tabla 3.1. Referencia y nivel educativo de los ítems de los cuestionarios piloto

	Referencia	Nivel educativo
CP1 Ítem 1	Canguro matemático 2000	1º de E.S.O.
CP1 Ítem 2	Canguro matemático 2004	1º de E.S.O.
CP1 Ítem 3	Canguro matemático 2003	1º de Bachillerato.
CP1 Ítem 4	Canguro matemático 2002	1º de E.S.O.
CP1 Ítem 5	Canguro matemático 2001	1º de E.S.O.
CP1 Ítem 6	De Lange (1988)	
CP2 Ítem 1	Canguro matemático 2003	3º de E.S.O.
CP2 Ítem 2	Canguro matemático 2004	1º de E.S.O.

CP2 Ítem 3	Canguro matemático 2003	1º de E.S.O.
CP2 Ítem 4	Canguro matemático 2004	1º de E.S.O.
CP2 Ítem 5	Canguro matemático 2000	1º de Bachillerato LOGSE y 3º B.U.P.
CP2 Ítem 6	Modificación de tareas de material educativo. Creación propia	
CP2 Ítem 7	Cosío (1997). Adaptación de Hoffer (1977)	2º B.U.P. y 4º E.S.O.

3.3. ESTRUCTURA TÉCNICA DE LOS CUESTIONARIOS

A la hora de construir los dos cuestionarios piloto (CP1 y CP2), pretendimos tener en cuenta una serie de criterios que afectan a cada uno de los ítems, los cuales se detallan a continuación:

- La respuesta correcta es única y no presenta características que la diferencien significativamente de las demás alternativas presentadas. La posición de la misma dentro de las opciones posibles varía según el ítem.
- Se presentan cuatro alternativas o distractores para cada uno de los ítems de respuesta múltiple. Se han evitado las frases del tipo "todas las anteriores" o "ninguna de las anteriores".
- Se ha procurado que la gramática y el lenguaje no fueran confusos, así como que los dibujos incluidos en cada ítem fuesen lo más claros posibles.
- Respecto a la formulación de la pregunta, esta se realiza de manera que sea corta y lo más atractiva posible. El planteamiento de la pregunta permite una única interpretación de la tarea que se debe realizar.
- Todas las cuestiones están planteadas en forma afirmativa a excepción de una en la que se ha procurado enfatizar la forma negativa.
- En el caso de la única cuestión abierta se ha dejado claro que lo era y dónde deberían contestar.
- Se pide una explicación del razonamiento o estrategia seguida en la resolución de la tarea.
- El tiempo estimado de resolución es una hora.

3.4. APLICACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS PILOTO A UNA MUESTRA DE ESTUDIANTES PARA MAESTROS

El cuestionario piloto 1 (CP1) fue pasado a los alumnos durante el segundo día de clase con el objetivo de no intervenir ni modificar los conocimientos sobre geometría que tenían interiorizados, derivados de su formación académica y de otros aprendizajes relacionados con la capacidad espacial, fuera y dentro del entorno escolar. El cuestionario piloto 2 (CP2) se pasó poco antes del examen oficial de la materia. Los dos cuestionarios tenían planteamientos similares con el fin de comparar los resultados desde un punto de vista más cualitativo que cuantitativo y analizar posteriormente las causas de la presencia de diferencias en los mismos (o la ausencia de las mismas).

A continuación se describen y analizan cada uno de los ítems aplicados a una muestra de 44 estudiantes de la Diplomatura de Maestros de Educación Primaria. Se empezará dicho estudio por los correspondientes al CP1 para continuar con los del CP2.

Después de la descripción de los ítems de cada cuestionario, se hará una valoración global de los resultados indicando los aspectos más destacados del estudio realizado, sin incluir el análisis pormenorizado de cada uno de ellos. Esta parte se desarrollará en el Capítulo 5 con aquellos ítems seleccionados para el cuestionario definitivo.

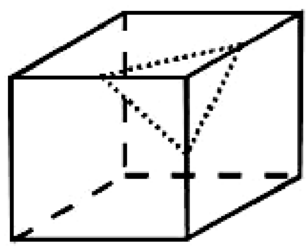
3.4.1. CUESTIONARIO PILOTO 1 (CP1)

A continuación se describen los seis ítems que constituyen este primer cuestionario y los resultados obtenidos en su aplicación a la muestra de 44 estudiantes.

3.4.1.1. CP1- Ítem 1

Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm. de lado como se indica en la figura, a distancia de 1 cm. sobre cada arista. ¿Cuántos vértices tiene el sólido así obtenido?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24



Podemos observar en la distribución de frecuencias de los resultados (Tabla 3.2) que hay un porcentaje bastante alto de alumnos que seleccionan como respuesta la opción e). Esta opción supone una interpretación incorrecta del enunciado en el sentido de que el corte se realiza en el punto medio de cada arista y no a menor distancia.

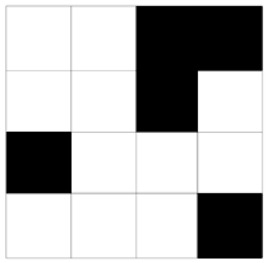
Tabla 3.2. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 1 del CP1

CP1-Ítem1OP	Frecuencia	Porcentaje
6	3	6,82
8	6	13,64
12	**17**	**38,64**
18	0	0,00
24	16	36,36
EB	2	4,55
Total	44	100,00

3.4.1.2. CP1-Ítem 2

¿Cuál es el menor número de cuadraditos que es necesario sombrear para que la figura resultante tenga por lo menos un eje de simetría?

a) 1 *b) 2* *c) 3* *d) 4* *e) 5*



Se ha incluido en la distribución de frecuencias (Tabla 3.3) una opción que se denota por 2I y que no aparece entre las opciones de respuesta. La razón de esta inclusión es que al realizar el análisis del ítem se encontró que el 22,73% de los alumnos aciertan en la opción marcada pero sus razonamientos y dibujos muestran que no es correcta la respuesta. La respuesta c), que corresponde a pintar 3 cuadraditos, es la que más alumnos han elegido, admitiendo diferentes posibilidades, aunque la solución no es minimal.

Tabla 3.3. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 2 del CP1

CP1-ítem2OP	Frecuencia	Porcentaje
1	1	2,27
2	**5**	**11,36**
2I	10	22,73
3	17	38,64
4	5	11,36
5	0	0,00
EB	6	13,64
Total	44	100,00

Este ítem ha resultado muy difícil para los alumnos, como se deriva del bajo porcentaje de respuestas correctas (11,36%).

En el análisis de las respuestas dadas a este ítem se han detectado diferentes opciones en la elección del tipo de simetría elegida y el porcentaje asociado a cada una:

- Simetría horizontal 23,4%
- Simetría vertical: 2,1%
- Otro tipo de simetría axial: 17 %

3.4.1.3. CP1-Ítem 3

Se forma un paralelepípedo rectángulo usando 4 piezas, cada una de ellas formada por 4 cubos (ver figura de la derecha).Tres de las piezas se ven por completo; la blanca sólo parcialmente. ¿Cuál de las 5 piezas siguientes es la blanca?

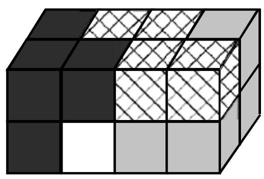
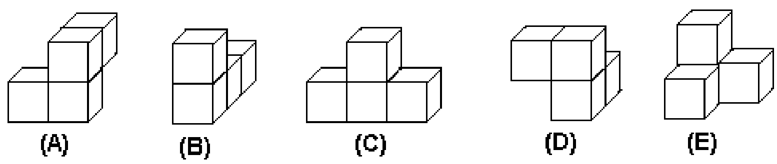


Figura 1



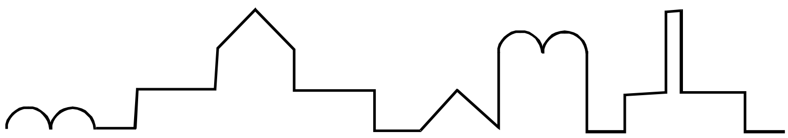
En la Tabla 3.4 se observa que el 45,45% de los estudiantes han tenido dificultades para resolver esta tarea.

Tabla 3.4. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 3 del CP1

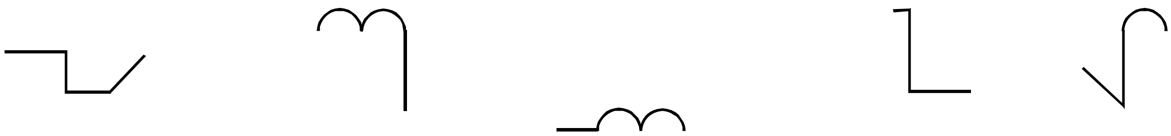
CP1-ítem3OP	Frecuencia	Porcentaje
A	3	6,82
B	4	9,09
C	**24**	**54,55**
D	3	6,82
E	6	13,64
EB	4	9,09
Total	44	100,00

3.4.1.4. CP1-Ítem 4

A lo lejos se ve la línea del horizonte



¿Cuál de los siguientes trozos no pertenecen a dicha línea?



a) b) c) d) e)

En la distribución de frecuencias (Tabla 3.5) la opción correcta es la mayoritaria, con un porcentaje muy elevado lo que se traduce en que este ítem ha resultado excesivamente fácil.

Tabla 3.5. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 4 del CP1

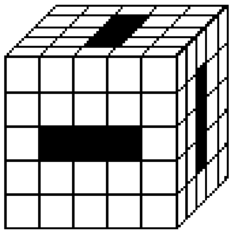
CP1-ítem4OP	Frecuencia	Porcentaje
A	2	4,55
B	0	0,00
C	**40**	**90,91**

D	1	2,27
E	0	0,00
EB	1	2,27
Total	44	100,00

3.4.1.5. CP1-Ítem 5

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



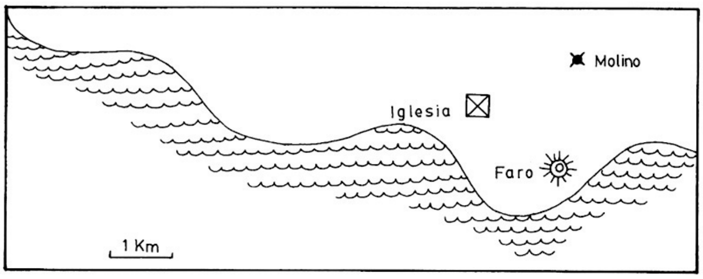
En la Tabla 3.6 se muestra la opción correcta, opción a), como la más frecuente a pesar de que no llega a alcanzar el 50%. Las opciones b) y d) están bastante próximas en porcentaje, pero la idea que subyace bajo la elección de cada una de ellas es totalmente diferente. El valor 80 proviene de no contemplar en los cálculos las intersecciones de los túneles, mientras que el valor 96 se obtiene considerando una o varias intersecciones.

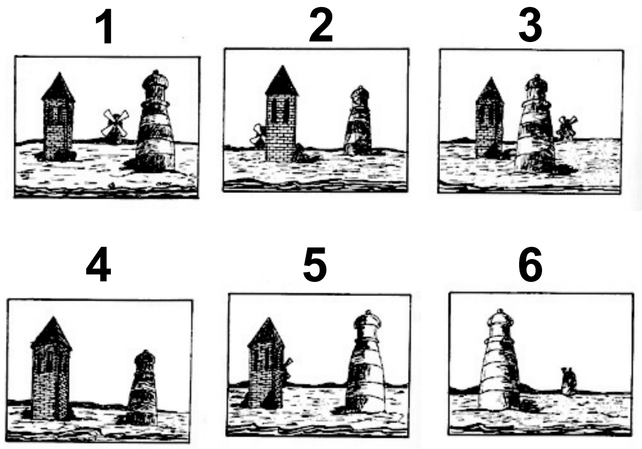
Tabla 3.6. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 5 del CP1

CP1-ítem5OP	Frecuencia	Porcentaje
88	**18**	**40,91**
80	8	18,18
70	3	6,82
96	9	20,45
85	4	9,09
EB	2	4,55
Total	44	100,00

3.4.1.6. CP1-Ítem 6

El siguiente mapa representa una parte de la costa de Galicia. El capitán de un barco que navegaba cerca de la costa tomó seis fotografías de construcciones que le gustaron. Las fotos se cayeron y se mezclaron. ¿Podrías decir el orden en que fueron tomadas esas fotografías. Se supone que el barco iba de izquierda a derecha





SOLUCIÓN

Este es un ítem sin opciones múltiples de respuesta para que el alumno eligiese. Deben construir la secuencia en la que fueron realizadas las fotos y escribirla en los cuadros en blanco. De este modo la Tabla 3.7 presenta una distribución de las respuestas en correctas e incorrectas, además de indicar los alumnos que no respondieron a dicho ítem.

Tabla 3.7. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 6 del CP1

CP1-ítem6OP	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	28	63,64
Incorrecto	15	34,09
EB	1	2,27

Total	44	100,00

3.4.2. VALORACIÓN GLOBAL DEL CUESTIONARIO PILOTO 1 (CP1)

En la Tabla 3.8 se recoge un análisis global de los resultados obtenidos por la muestra de alumnos para el CP1. Centrándonos en el ítem que presenta un porcentaje de respuestas correctas más elevado, el ítem 4, se puede observar que ese porcentaje supera en casi un 30% al siguiente. Consecuentemente, este ítem también alcanza el porcentaje más bajo de alumnos que no lo han contestado (Ns/Nc). En el otro extremo se encuentra el ítem 2, con un porcentaje extremadamente bajo de respuestas correctas (11,36%) en comparación con los demás y que a su vez muestra el porcentaje más alto de alumnos que optan por no contestar. Un análisis global del cuestionario nos permite concluir que, en función del ítem, los porcentajes son muy dispares, lo que pone de manifiesto las habilidades espaciales específicas necesarias para la correcta solución de cada uno.

Tabla 3.8. Porcentaje de respuestas correctas y de respuestas en blanco en el CP1

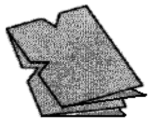
Nº ítem	Respuestas correctas	No sabe/No contesta
Ítem 1	38,64	4,55
Ítem 2	11,36	13,64
Ítem 3	54,55	9,09
Ítem 4	90,91	2,27
Ítem 5	40,91	4,55
Ítem 6	63,64	2,27

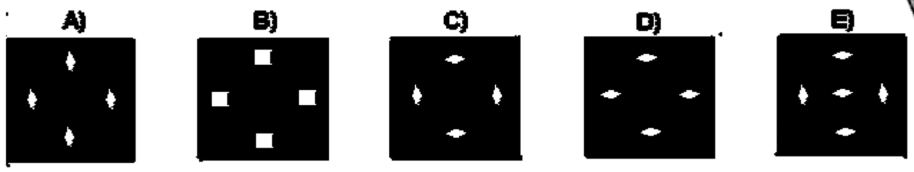
3.4.3. CUESTIONARIO PILOTO 2 (CP2)

El segundo cuestionario piloto diseñado para evaluar a los alumnos constaba de siete ítems, uno más que en el CP1, puesto que se observó que la elaboración de la respuesta correcta de uno de los ítems del primer test requería un tiempo mayor, lo que nos movió a incluir otro ítem para compensar ese problema y mantener así las mismas condiciones de tiempo de ejecución en ambos cuestionarios.

3.4.3.1. CP2-Ítem 1

Doblamos una hoja de papel y hacemos en ella los cortes que se ven en la figura. Luego desplegamos la hoja. ¿Qué es lo que se ve?





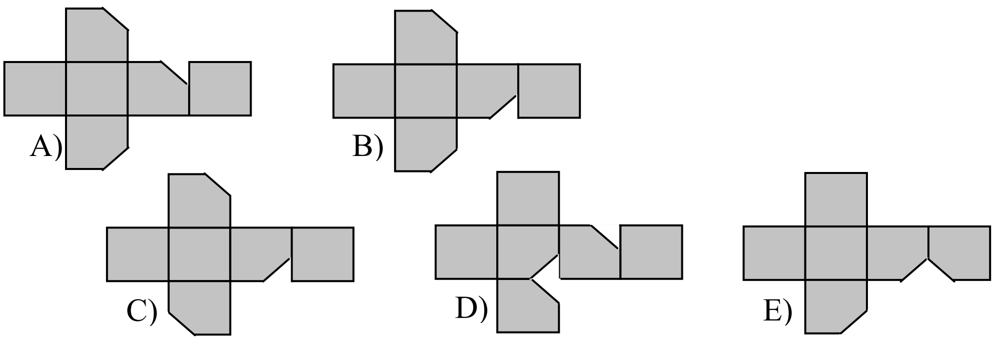
En la Tabla 3.9 se puede ver que se ha incluido una nueva opción de respuesta (AyD) que engloba a dos de las que ya se proporcionan en el enunciado de la tarea.

Tabla 3.9. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 1 del CP2

CP2-ítem1OP	Frecuencia	Porcentaje
A	1	2,27
B	1	2,27
C	**31**	**70,45**
D	4	9,09
E	6	13,64
AyD	1	2,27
EB	0	0,00
Total	44	100,00

3.4.3.2. CP2-Ítem 2

Cortamos el vértice de un cubo. ¿Cuál de los desarrollos planos que se presentan corresponde al cuerpo resultante?



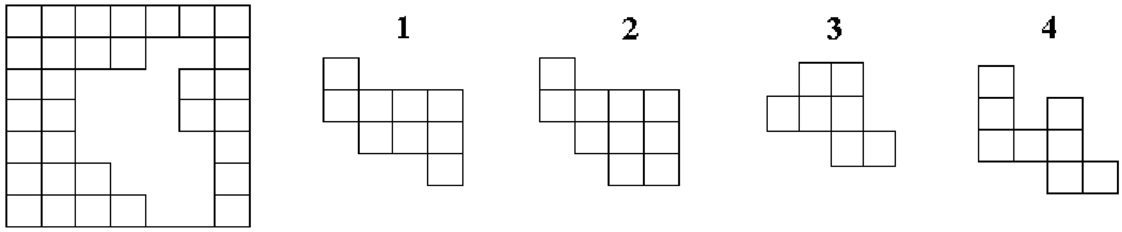
El porcentaje de respuestas correctas tan elevado (Tabla 3.10) ilustra la facilidad de la tarea para estos estudiantes.

Tabla 3.10. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 2 del CP2

CP2-ítem2OP	Frecuencia	Porcentaje
A	2	4,55
B	0	0,00
C	0	0,00
D	1	2,27
E	**41**	**93,18**
EB	0	0,00
Total	44	100,00

3.4.3.3. CP2-Ítem 3

¿Qué dos piezas de la derecha tendremos que usar para cubrir exactamente la superficie no cuadriculada de la figura de la izquierda?
A) 1 y 3 B) 2 y 4 C) 2 y 3 D) 1 y 4 E) 3 y 4



El alto porcentaje de respuestas correctas en este ítem coincide con el porcentaje del ítem anterior.

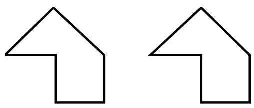
Tabla 3.11. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 3 del CP2

CP2-ítem3OP	Frecuencia	Porcentaje
A	2	4,55

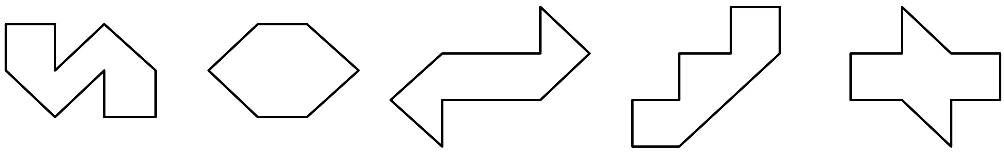
B	0	0,00
C	**41**	**93,18**
D	0	0,00
E	0	0,00
EB	1	2,27
Total	44	100,00

3.4.3.4. CP2-Ítem 4

Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa.



¿Qué figura de las siguientes NO podremos formar con estas dos piezas?



A B C D E

En la Tabla 3.12 se incluye una opción más (AyD) derivada de las respuestas dadas por los estudiantes. En este caso, el estudiante considera que ni la figura A ni la figura D se pueden obtener de las dos piezas anteriores sin levantarlas de la mesa. El análisis de las respuestas que marcaron la opción B nos lleva hacia un reconocimiento implícito de la convexidad de dicha figura en contraposición con la concavidad que presentan todas las demás.

Tabla 3.12. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 4 del CP2

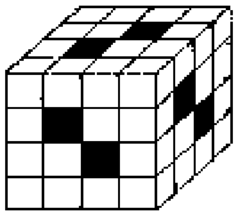
CP2-ítem4OP	Frecuencia	Porcentaje
A	5	11,36
B	7	15,91
C	1	2,27

D	**26**	**59,09**
E	4	9,09
AyD	1	2,27
EB	0	0,00
Total	44	100,00

3.4.3.5. CP2-Ítem 5

Tenemos un cubo 4x4x4 formado por 64 cubos 1x1x1. Hacemos seis agujeros en el cubo atravesándolo como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos quedarán del cubo inicial?

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 50



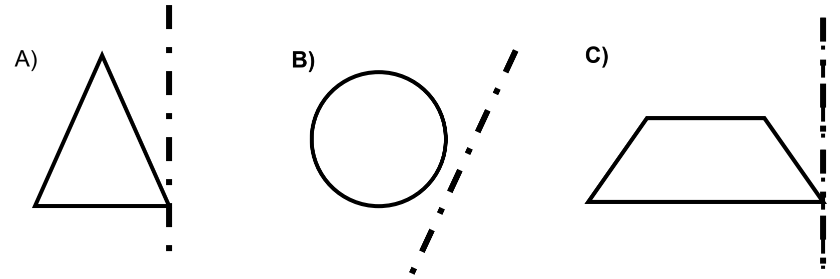
Este ítem tiene una estructura similar al ítem 5 del CP1, lo que se manifiesta también en la similitud del porcentaje de respuestas correctas (en torno al 40%). En la Tabla 3.13 podemos observar que el valor 46 tiene una frecuencia muy próxima al valor correcto y que proviene de no contemplar las intersecciones de cada tres túneles.

Tabla 3.13. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 5 del CP2

CP2-ítem5OP	Frecuencia	Porcentaje
40	3	6,82
42	3	6,82
44	**19**	**43,18**
46	16	36,36
50	3	6,82
EB	0	0,00
Total	44	100,00

3.4.3.6. CP2-Ítem 6

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras respecto de los ejes que se indican.



Este ítem es de respuesta abierta y por lo tanto no se presentan opciones posibles de respuesta, pues los alumnos han de construir (dibujar) representaciones ostensivas de la solución. Siguiendo el mismo esquema que en el ítem 6 del CP1, se ha elaborado la distribución de frecuencias distinguiendo únicamente entre soluciones correctas e incorrectas, incluyendo además una categoría para las soluciones parcialmente correctas al entender que son correctos uno o dos de los tres apartados que se contemplan en el enunciado.

La Tabla 3.14 presenta la distribución de frecuencias asociada a este ítem. Se observa que, en comparación con los demás ítems, presenta un porcentaje muy bajo de aciertos.

Tabla 3.14. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 6 del CP2

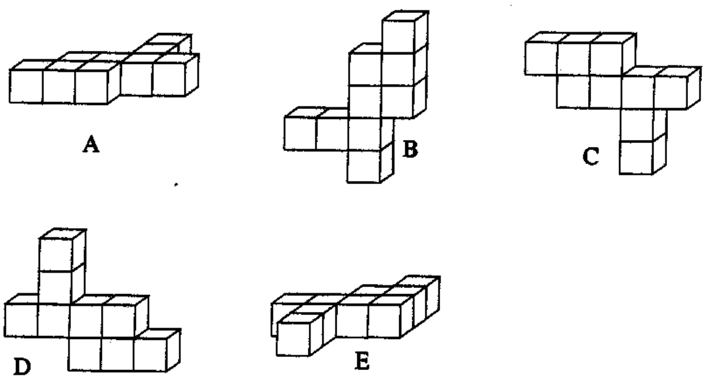
CP2-ítem6OP	Frecuencia	Porcentaje
Correcto	12	27,27
Parcialmente correcto	5	11,36
Incorrecto	22	50,00
EB	5	11,36
Total	44	100,00

En este caso, al realizar el análisis de las respuestas de los alumnos, nos hemos encontrado con situaciones en las que un estudiante puede ser hábil en la percepción visual y no poseer mucha destreza a la hora de dibujar, imaginar o transformar un mundo ausente (Cosío, 1997). De ahí que aparezcan representaciones de lo que construyen mentalmente difícilmente evaluables, lo que pone de manifiesto la importancia de contrastar estas respuestas con otro tipo de instrumento de evaluación, como pueden ser las entrevistas individuales, para analizar sus estrategias cognitivas. También es interesante observar el tipo de soluciones que aparecen en este ítem y que además en algún caso tienen una frecuencia considerable. Podemos clasificarlas en las siguientes:

- A) Tronco de cono / B) Cilindro / C) Tronco pirámide: 6,82 %
- A) Cono / B) Esfera / C) Tronco de cono: 20,45%
- Simetría: 15,91%. En este caso utilizan el eje de rotación como eje de simetría y por tanto dan como solución las figuras simétricas a las dadas con respecto a dichos ejes.

3.4.3.7. CP2-ítem 7

Los dibujos A, B, C, D y E representan construcciones con cubos de madera del mismo lado. En estas cinco construcciones hay una que es imposible conseguir girando en el espacio alguna de las otras cuatro. Di cuál de ellas es.



El enunciado de la tarea proporciona directamente la acción que hay que realizar. Como se muestra en la Tabla 3.15, el porcentaje de aciertos es muy elevado.

Tabla 3.15. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 7 del CP2

CP2-ítem7OP	Frecuencia	Porcentaje
A	1	2,27
B	2	4,55
C	0	0,00
D	1	2,27
E	**40**	**90,91**
EB	0	0,00

Total	44	100,00

3.4.4. VALORACIÓN GLOBAL DEL CUESTIONARIO PILOTO 2 (CP2)

El análisis en conjunto de todos los ítems correspondientes al CP2 se muestra en la Tabla 3.16. Tres ítems superan el 90% de respuestas correctas (ítem 2, ítem 3 e ítem 7) y sólo uno baja del 40%. En la columna de la derecha se puede ver que cinco de los siete ítems de la prueba son respondidos por la totalidad de la muestra. Destaca el porcentaje que corresponde al ítem 6, tanto por el número de respuestas correctas como por el número de alumnos que no contestan a la tarea.

Tabla 3.16. Porcentaje de respuestas correctas y de respuestas en blanco en el CP2

Nº ítem	Respuestas correctas	No sabe/No Contesta
Ítem 1	70,45	0
Ítem 2	93,18	0
Ítem 3	93,18	2,27
Ítem 4	59,09	0
Ítem 5	43,18	0
Ítem 6	27,27	11,36
Ítem 7	90,91	0

3.5. CRITERIOS DE REVISIÓN DE LOS ÍTEMS Y ELABORACIÓN DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO

Podemos considerar el trabajo realizado con los cuestionarios piloto como una primera experimentación encaminada a la selección de aquellos ítems más apropiados para confeccionar el cuestionario definitivo, además de definir las condiciones óptimas de resolución para su puesta en práctica y poner a punto los instrumentos y las técnicas más apropiadas para nuestro trabajo. En ese sentido nos ha permitido recabar información precisa sobre el tiempo aproximado de resolución, la opinión de los estudiantes a propósito de los ítems espaciales y refinar tanto los textos de los enunciados como los dibujos en algún caso. También se han podido detectar problemas relacionados con diferentes órdenes: comprensión de términos, influencia del orden de las opciones, dificultades para dibujar y otras consideraciones técnicas que aconsejan modificar algunos de ellos o retirarlos de la prueba, bien por su excesiva complejidad o bien por no aportar información relevante.

De esta forma, en el análisis de los ítems de los test piloto detectamos que varios resultaban muy sencillos (ítem 4 del CP1, ítem 2, ítem 3 e ítem 7 del CP2), atendiendo a su alto porcentaje de respuestas correctas en comparación con los demás. Así mismo, en alguno de ellos, como en el ítem 4 del CP1, las estrategias de resolución eran prácticamente iguales en todos los estudiantes por lo que se consideró que no aportaban ninguna información relevante al estudio. De la misma manera, en el CP2 se observó que el ítem 6 era extremadamente complicado, a pesar de haber trabajado durante el cuatrimestre conceptos muy relacionados con las destrezas que se requerían para su resolución. Sin embargo, el análisis de la riqueza de las estrategias utilizadas por los sujetos motivó que fuese considerado idóneo para ser incluido en el test definitivo, ahora bien, incluyendo una modificación consistente en la reducción del número de apartados a dos y reduciendo su dificultad, sobre todo a la hora de plasmar la representación gráfica del sólido resultante.

Los resultados obtenidos de la aplicación de ambos test nos permiten realizar un análisis comparativo entre ellos. El objetivo de esa comparación es, por un lado, ampliar el abanico para poder tomar decisiones sobre las cuestiones indicadas al comienzo de la sección (adecuación de los ítems al nivel de los estudiantes, dificultades en la resolución de las tareas, riqueza en la variedad de las estrategias proporcionadas por los estudiantes en la resolución de los ítems, etc.) y, además, tener una visión global de cada uno de los cuestionarios en relación a la variedad de tareas que componen cada uno, cual se ajusta mejor al tiempo de resolución, cual distribuye mejor los contenidos solicitados, etc.

Por otro lado, esta comparación también ofrece la posibilidad de observar si los contenidos tratados en la materia permitieron a los estudiantes recordar algunos conceptos básicos que les ayudasen en la resolución de los ítems, circunstancia que supondría una valoración global del cuestionario CP2 más alta (en términos de puntuación).

Con respecto al porcentaje de aciertos, podemos ver en la Tabla 3.17 que el del CP2 ha sido muy superior al del CP1 en todos los ítems. Esta afirmación también se verá reflejada en la comparación de las puntuaciones obtenidas en cada una de las pruebas.

Tabla 3.17. Porcentaje de respuestas correctas CP1/CP2

CP1	Respuestas correctas	CP2	Respuestas correctas

Ítem 1	38,64	Item 1	70,45
Ítem 2	11,36	Ítem 2	93,18
Ítem 3	54,55	Ítem 3	93,18
Ítem 4	90,91	Ítem 4	59,09
Ítem 5	40,91	Ítem 5	43,18
Ítem 6	63,64	Ítem 6	27,27
		Ítem 7	90,91

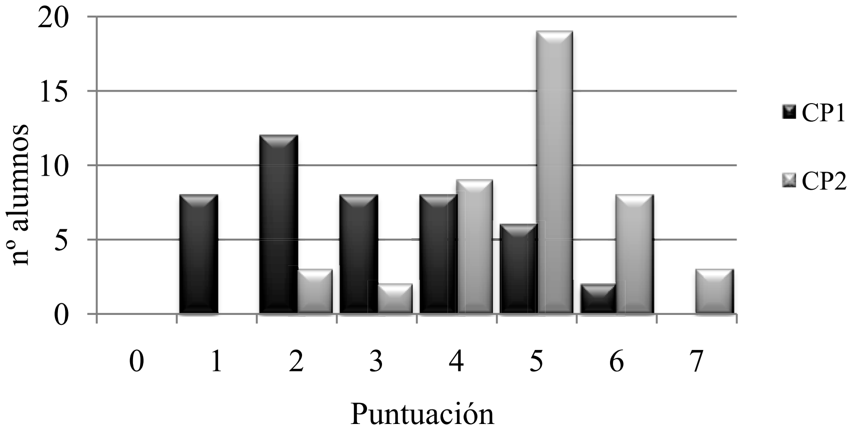
En la Tabla 3.18 se muestra una comparativa del porcentaje de alumnos que no contestan a cada uno de los ítems de los dos cuestionarios. La lectura que podemos realizar de estos datos es que en el caso del CP2 la totalidad de la muestra intentó contestar todos los ítems (correcta o incorrectamente), mientras que en el CP1 todos los ítems tuvieron un porcentaje de estudiantes que no contestaron a la tarea. De todos los ítems (CP1 y CP2), el ítem 2 del CP1 es el que alcanza el mayor porcentaje de respuestas en blanco, seguido del ítem 6 del CP2. La conexión entre esos dos ítems parece estar en los conceptos matemáticos implicados en su resolución, el concepto de eje de simetría en el primero y el de eje de rotación en el segundo, aunque es preciso tener en cuenta que en el primer caso se trata de una tarea bidimensional y en el segundo caso de una tarea en el espacio tridimensional.

Tabla 3.18. Comparación CP1/CP2 de porcentaje de Ns/Nc

	Item1	Item2	Item3	Item4	Item5	Item6	Item7
CP1	4,55	13,64	9,09	2,27	4,55	2,27	
CP2	0	0	2,27	0	0	11,36	0

Para poder realizar un análisis comparativo entre los resultados (calificaciones) obtenidos en cada uno de los cuestionarios se asignará un punto a cada estudiante por cada ítem correcto y cero puntos por cada uno incorrecto. El objetivo de esta puntuación es ver el número de ítems que han sido resueltos de forma correcta. En el siguiente gráfico se muestran conjuntamente los resultados obtenidos para cada uno de los cuestionarios.

Gráfico 3.1. Resultados comparativos CP1/CP2

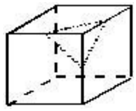
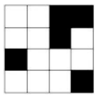
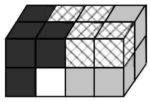
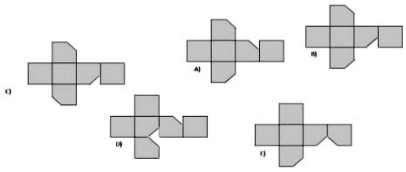
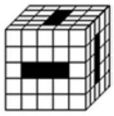
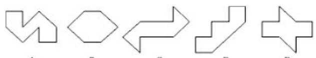


La media alcanzada por los estudiantes en el CP1 es de 4,92 puntos sobre 10. Se observa, además, que el 45 % no llega a alcanzar dicha media. Sin embargo, los resultados del CP2 proporcionan una media de 6,88, con el 70 % del alumnado por encima de ella.

Por otro lado, este análisis también nos proporcionó información que permitirá sentar las bases de partida sobre las que fundamentar las hipótesis de la investigación.

Para la elección de los ítems del cuestionario definitivo se tuvieron en cuenta diferentes características: el tipo de habilidades espaciales que se ponían en juego en la resolución, la dificultad de cada uno de ellos, la riqueza en estrategias de resolución, el tipo de respuesta exigida, la acción requerida, la dimensión del espacio en el que se realiza y la frecuencia de cierto tipo de errores. De esta manera, el cuestionario definitivo queda constituido por los ítems recogidos en la Tabla 3.19, en la que sólo se presenta su distintivo gráfico y el nivel educativo en el que se encuadra dentro de las referencias tomadas. Con respecto al nivel educativo, en el cuestionario definitivo destaca el ítem 6 que se asocia a 1º de Bachillerato. Las razones de esta inclusión son, por un lado, que su porcentaje de aciertos está por encima de la media del CP1 y, por otro, los tipos de argumentación proporcionados por los estudiantes en sus respuestas escritas. Además, la incorporación de este ítem cubre la parte de componer y descomponer formas tridimensionales que enriquece el cuestionario y complementa el tipo de tareas presentadas.

Tabla 3.19. Relación de ítems del cuestionario definitivo

Ítem	Distintivo gráfico	Nivel educativo
1		1º ESO
2		1º ESO
3		1º Bachillerato
4		1º ESO
5		1º ESO
6		1º ESO
7		3º ESO

3.6. CLASIFICACIÓN DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO DEFINITIVO

En el Capítulo 1 (Sección 1.4.1) se establece una lista extensa de las diversas tareas que se han identificado en las investigaciones analizadas en la revisión bibliográfica.

Se observa que dichas investigaciones muestran diferentes tipos de estudios: investigaciones sobre aspectos epistémicos, como el estudio de las representaciones planas de objetos tridimensionales (Gutiérrez, 1996b; Parzysz, 1988) y los procedimientos (Fischbein, 1993; Mesquita, 1992); investigaciones sobre aspectos cognitivos como las definiciones de procesos y descripción de habilidades (Bishop, 1983; Del Grande, 1990), la descripción de etapas y niveles (Mitchelmore, 1978; Piaget e Inhelder, 1956), las estrategias (Cosío, 1997; Gorgorió, 1996, 1998), los errores y las dificultades (Battista y Clements, 1996); investigaciones sobre experiencias o propuestas instruccionales (Berthelot y Salin, 1992; Clements, 2004; Galvez, 1985; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Lappan, Phillips y Winter, 1984); investigaciones con profesores (Gaulin, 1985; Malara, 1998).

Por otra parte, los estudios citados anteriormente diferentes tipos de actividades que involucran capacidades de orientación y visualización espacial, pero pocos incluyen una clasificación detallada de las tareas.

En el modelo propuesto por Wattanawaha (1977) y seguido por Cosío (1997), cada tarea espacial puede ser caracterizada y clasificada de manera única, atendiendo a cuatro criterios:

- *D*: indica el valor que representa el número de dimensiones del espacio en las que se resuelve el ítem espacial. Toma el valor 1 si la prueba exige pensar en una dimensión, el valor 2 si exige pensar en dos y el valor 3 si exige pensar en tres dimensiones.
- *I*: expresa el grado de interiorización exigido en la realización del ítem espacial (puede tomar los valores 0, 1, 2). Si la prueba puede ser resuelta a nivel perceptivo y no hay necesidad de construir una "imagen mental", o incluso la sola imagen mental necesaria es un "duplicado" de un estímulo dado o una imagen que corresponda una traducción sencilla del estímulo o de alguna de sus partes toma el valor 0. Cuando se tiene necesidad de construir una "imagen mental" para resolver la prueba, pero no existe la necesidad de transformar la imagen en el pensamiento, toma el valor 1. Si además de necesitar formar una imagen mental para resolver la prueba, es preciso que esta imagen sea transformada en el pensamiento *I* toma el valor 2.
- *P*: toma los valores 0, 1 o 2 dependiendo del tipo de representación de la respuesta exigido para la resolución del ítem espacial. De esta manera, si la forma de respuesta esperada del sujeto no exige la descripción, la identificación o el dibujo sobre papel de una imagen mental, *P* vale 0. Si la respuesta es una imagen a identificar a partir de un número de imágenes diferentes presentadas bajo la forma de diagramas o descritas por palabras o acciones, toma el valor 1 (la imagen a identificar deberá corresponder a la "imagen mental" final asociada a la prueba). Cuando la respuesta exige que la "imagen mental" sea dibujada sobre el papel o descrita por palabras, con la mano o por cualquier otro movimiento, *P* toma el valor 2.
- *T*: indica si se especifican o no las operaciones mentales necesarias para la resolución del ítem espacial. Si la prueba especifica la operación mental necesaria para su ejecución, esta variable T toma el valor 0. Si la prueba no

especifica la operación mental, pero da la información suficiente para determinarla toma el valor 1.

De esta forma, cada ítem puede ser representado por la cuaterna (*D, I, P, T*).

Olkun (2003, p. 8) parte de la idea de que la capacidad espacial consiste en "la manipulación mental de objetos y sus partes en el espacio bi y tridimensional". McGee (1979, p. 892) clasifica las tareas en dos grandes grupos: tareas de relaciones espaciales (orientación espacial) y tareas de visualización espacial. Las primeras implican rotaciones bi y tridimensionales y comparaciones de objetos (cubos), mientras que las segundas se refieren a la rotación de objetos o de sus partes en el espacio tridimensional, plegado y desarrollo de cuerpos, etc. La idea en la que se fundamenta esta partición es que en las tareas del primer tipo se realiza la manipulación del objeto como un conjunto entero, mientras que en las del segundo tipo la manipulación requiere la integración del estímulo que está compuesto por más de una parte o partes movibles. Esto motiva también en que las tareas de la primera clase son relativamente más fáciles y más rápidas de ejecutar.

Hershkowitz, Parzysz, y Van Dormolen (1996) identifican dos categorías de actividades relacionadas con el espacio y las formas dependiendo del tipo de relación entre los objetos que son observados y el observador. En el primer tipo la relación es directa, subjetiva e implica la reflexión sobre lo que el observador ve: el estudiante describe lo que ve como observador o lo que ve identificándose con un observador. En las actividades del segundo tipo la relación es indirecta, aunque objetiva, e implica la reflexión sobre cómo el observador ve: el estudiante tiene que reflexionar sobre la situación del observador, tiene que identificarse con dos personas, una que observa y la otra que observa al observador.

Berthelot y Salin (1992, p. 36) identifican tres grandes categorías de acciones para que el sujeto tenga un control adecuado de sus relaciones con el espacio sensible, esto es: reconocer, describir, fabricar o transformar objetos; desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos y reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento.

Gonzato, Fernández y Godino (2011), teniendo en cuenta esa categorización de acciones y centrándose en el contexto tridimensional, diferencian tres grandes familias de actividades, según el tópico específico tratado:

- Orientación estática del sujeto y de los objetos.
- Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.

- Orientación del sujeto en espacios reales.

La primera familia es una ampliación de la categoría de acciones de Berthelot y Salin (1992) "desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos" donde se incluyen las tareas que tratan el problema de la orientación del cuerpo del sujeto, del sujeto con relación a otros objetos, y la eventual orientación de objetos (orientaciones que involucran el conocimiento del esquema corporal y la posible proyección de este esquema en el objeto).

La segunda familia de actividades está relacionada con la categoría de acciones identificada por Berthelot y Salin como "reconocer, describir, fabricar o transformar objetos", en las cuales se incluyen también las tareas de representación (bi o tridimensional) de objetos tridimensionales (materiales o representados en el plano).

En la tercera familia se incluyen las actividades de reconocimiento, descripción, construcción, transformación, interpretación y representación de espacios de vida (espacios reales) o de desplazamientos.

Una importante diferencia entre las tareas de la familia 2 y 3 es que las actividades de "interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales" requieren que el sujeto cambie su punto de vista de manera "discreta", es decir, se requiere que el sujeto se imagine o se ponga en una determinada posición con respecto a una composición de objetos, sin dar importancia al movimiento que tiene que hacer para cambiar su posición, sino sólo al punto de vista final. Mientras que en las actividades de "orientación del sujeto en espacio reales" el punto de vista del sujeto cambia de manera continua a lo largo de su desplazamiento, es decir, su visión del espacio está vinculada a un movimiento continuo.

Otra diferencia destacable es el tamaño del espacio. Si en la familia 2 se trabaja con objetos aislados o composiciones de objetos (la composición es considerada como un todo), y la atención no se fija en el espacio donde se encuentran, sino sobre su estructura y su composición; en la familia 3 se consideran espacios más grandes, que puedan ser recorridos (física o mentalmente) por el sujeto.

Esta triple clasificación de las tareas de visualización y orientación espacial se puede observar en diferentes trabajos (Berthelot y Salin, 1992; Gaulin, 1985; Gorgorió, 1998; Lurçat, 1979). Por ejemplo Lurçat (1979) trata sobre actividades que requieren que el sujeto interprete la posición de su cuerpo, la posición de otro sujeto y la posición relativa de objetos, sea en un contexto estático (objetos y sujetos fijos, familia de tareas 1), como de movimiento (itinerarios, familia de tareas 3).

En Gorgorió (1998) se analizan las estrategias utilizadas por alumnos de 12 y 16 años al resolver nueve tareas que involucran la rotación espacial. Estas tareas están clasificadas en dos grupos, atendiendo a si la acción requerida para su resolución es de interpretación o de construcción. En las primeras se requiere que el estudiante reaccione sobre una acción geométrica ya realizada, mientras que en las segundas se requiere la construcción de un objeto o su dibujo. Se observa que entre los ítems de interpretación hay tres tareas que requieren la identificación de un objeto tridimensional tras una rotación (familia 2) y una tarea que requiere describir un itinerario entre dos puntos de una ciudad por medio de un mapa (familia 3). Esta variedad de tipos de tareas muestra la complejidad del tema y apoya la propuesta de clasificar en tres familias los tipos de problemas en los que intervienen habilidades de visualización y orientación espacial.

El tipo de tareas que se engloban en la familia 1 están más encaminadas hacia la educación infantil y han sido tratadas en nuestro trabajo. Centrándonos sólo en la geometría tridimensional, todos los ítems presentados en los cuestionarios CP1 y CP2 , a excepción de uno que pertenece a la Familia 3 (ítem 6 del CP1), se incluyen en la Familia 2. Por ese motivo, en la siguiente sección se tratará de profundizar en la descripción y análisis de esta última familia, así como de adaptarla a nuestro cuestionario, el cual incorpora varios ítems de geometría plana.

3.6.1. FAMILIA 2: TAREAS DE INTERPRETACIÓN DE PERSPECTIVAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

En esta familia de tareas se incluyen las actividades que requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales (perspectivas, vistas, etc), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas. Se observa que en estas tareas se construyen técnicas para representar un objeto o un espacio a la vez que se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

Son numerosas las investigaciones que estudian las estrategias, los conocimientos, las habilidades y las dificultades, puestas en juego en la resolución de diferentes actividades de perspectivas de cuerpos tridimensionales, tal y como se ha visto en la revisión bibliográfica. Describimos brevemente las tareas presentadas en algunos trabajos centrados en este tópico.

Gutiérrez (1996c, p. 36), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades:

- A partir de una representación plana del módulo, el estudiante tiene que construir el respectivo módulo físico.
- A partir del módulo (físico o presentado en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente), tiene que dibujar diferentes tipos de representaciones planas del mismo.
- El estudiante tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.

Observamos que las representaciones planas que Gutiérrez considera en este trabajo son la perspectiva (no tratada en el análisis del experimento), la representación por plantas, las vistas ortogonales, las vistas ortogonales codificadas y la proyección isométrica.

En Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) se describen dos actividades relacionadas con la interpretación de una representación plana de un objeto tridimensional: una requiere construir un objeto tridimensional a partir de sus vistas y la otra requiere dibujar un objeto tridimensional y estudiar las propiedades del objeto que se conservan en su representación.

Muchos trabajos analizados incluyen tareas de rotación de un objeto tridimensional. Por ejemplo, Gorgorió (1996, 1998) se centra en el estudio de las estrategias utilizadas por alumnos (12-16 años) al resolver tareas que involucran rotaciones espaciales.

Fischbein (1993) analiza el caso del desarrollo de un cubo como ejemplo de una práctica con estudiantes de actividades mentales en las cuales la cooperación entre el aspecto conceptual y el figural requiere un esfuerzo peculiar. Esta actividad se refiere al desarrollo de un cuerpo geométrico y está compuesta por tres partes:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico
- Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

De manera más general, Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988) estudian las habilidades de visualización espacial y el efecto de la instrucción mediante la utilización de un test de visualización espacial cuyos ítems requieren reconocer vistas ortogonales o perspectivas de composiciones de cubos (edificios), añadiendo o quitando cubos, combinando dos sólidos y aplicando la idea de vista codificada superior.

En el contexto de formación de profesores señalamos dos trabajos centrados en este tema: Malara (1998) y Gaulin (1985). Malara presenta una experiencia llevada a cabo con profesores de escuela secundaria consistente en resolver actividades que involucran la habilidad de visualizar el efecto de determinadas transformaciones sobre sólidos, o de imaginar la perspectiva de un sólido desde un determinado punto de vista. Gaulin analiza tres ejemplos de actividades propuestas a maestros en formación, para "desarrollar la visualización espacial y la intuición geométrica", dos de las cuales se centran en el estudio de las posibles representaciones de sólidos multicubos.

Analizando las investigaciones anteriores observamos que las tareas presentadas tienen en cuenta tres parámetros: el estímulo inicial presentado, la acción principal requerida para resolver la tarea y el tipo de repuesta solicitada. El estímulo inicial se refiere a la presencia o no, en la descripción de la tarea, del objeto físico, o de una de sus representaciones.

Las acciones principales requeridas para resolver las tareas que se presentan en las investigaciones son:

- Cambiar el tipo de representación (plana o tridimensional): representar un objeto físico con una representación plana, construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana, o convertir representaciones planas de tipos diferentes (perspectiva - proyección isométrica – vistas - vistas codificadas – fotografías -….). Observamos que el cambio de representación puede implicar también una rotación del objeto, un cambio de punto de vista,…
- Rotar: rotar el objeto completo o algunas de sus partes, o bien, de manera equivalente, cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). Observamos que en esta actividad no existe cambio de tipo de representación plana.
- Plegar y desplegar: plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado) o realizar el proceso inverso, desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.

- Componer y descomponer en partes: dadas dos o más piezas combinarlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes.
- Contar elementos: dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices,…)

Observamos que las acciones pueden aparecer de forma explícita o implícita en el enunciado de la tarea. También es posible encontrar actividades que combinen varias acciones.

En cuanto al tipo de repuesta solicitada se diferencia entre:

- Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional.
- Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.
- Identificación: si se requiere identificar la repuesta correcta entre más opciones.
- Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguna de los anteriores tipos de repuestas).

Con respecto a la clasificación atendiendo al tipo de respuesta, Gonzato et al. (2011), dividen las tareas de "construcción" de Gorgorió (1996) en construcción del objeto físico y dibujo como representación plana del objeto tridimensional, mientras que las tareas "de interpretación" de la autora corresponden al tipo de respuesta que ellos denominan de identificación.

Se presenta en la Tabla 3.20 una síntesis de la clasificación de las tareas propuestas.

Tabla 3.20. Clasificación de las tareas de interpretación de objetos tridimensionales

Estimulo inicial		Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Presencia del objeto físico	Objeto (y/o sujeto) móvil	Conversión entre representaciones (plana o 3D)	Construcción Dibujo
	Objeto (y sujeto) fijo	Rotar Plegar o desplegar	Identificación Verbal
Ausencia del objeto físico	Objeto observado previamente	Composición/ descomposición en partes	Otras
	Objeto presentado en el plano	Conteo de elementos	

Podría tenerse en cuenta también para esta clasificación el tipo de objeto (geométricos, multicubos, cotidiano, etc.); el tipo de representación plana utilizado (perspectiva, por proyecciones ortogonales codificadas,…) y el tamaño del espacio: micro (objeto solo), meso (composición de objetos). Se observa que al trabajar con un objeto fijo, ausente o representado en dos dimensiones, sin posibilidad de manipularlo, las acciones requeridas serían “mentales”, como por ejemplo imaginar rotar un objeto, cambiar el punto de vista, etc. Por otro lado, es preciso tener en cuenta que una tarea puede involucrar más de una acción y si la respuesta es de dibujo puede además necesitar de diferentes técnicas (dibujo en perspectiva caballera, en proyección, etc.).

En este trabajo se ha seguido la clasificación de las tareas según la acción principal requerida para su resolución (Gonzato et al., 2011) a la vez que se ha intentado adaptar la clasificación a tareas en el plan. Como se ha visto en el Capítulo 1 (Sección 1.4.3), desde el punto de vista de la acción a realizar hay tareas donde la acción principal es básicamente la misma en dos y tres dimensiones, lo que nos permite aplicar la clasificación dada por estos autores.

La Tabla 3.21 recoge esta clasificación aplicada a las tareas que constituyen nuestro cuestionario definitivo. Como todas ellas se realizan en ausencia del objeto físico ya no procede contemplar la característica “estímulo inicial” en la tabla. Por lo tanto, la acción realizada siempre será mental. Por otra parte, Cosío (1997), como se vio en la sección anterior, incorpora al tipo de respuesta la componente tipo de representación de la respuesta (*P*) exigido en la realización del ítem y que especifica si la representación de la respuesta exige la identificación o construcción de una imagen. Dicha característica también se muestra en la Tabla 3.21.

Tabla 3.21. Clasificación de las tareas del cuestionario definitivo

Nº de ítem	Espacio	Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta	*P*
Ítem 1	3D	Conteo de elementos	Identificar	0
Ítem 2	2D	Realizar simetría	Dibujar e Identificar	2
Ítem 3	3D	Componer y descomponer en partes	Identificar	1
Ítem 4	3D	Plegar y desplegar	Identificar	1
Ítem 5	3D	Conteo de elementos	Identificar	0
Ítem 6	2D	Componer y descomponer en partes	Identificar	1
Ítem 7	3D	Rotar	Dibujar	2

3.7. COMPONENTES DE LA VRE PUESTOS EN JUEGO EN CADA ÍTEM

En el momento de elegir un modelo físico o gráfico que represente un determinado concepto matemático, se tiende hacia aquel que parezca más adecuado en función de variables como la fidelidad con que el modelo representa al concepto o los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo existe otra variable que es necesario contemplar a la hora de realizar esa elección, se trata de la facilidad con que los estudiantes interpretan los objetos o las figuras y les dan el significado conceptual que los autores quieren comunicar. De esta manera, las representaciones que resultan demasiado complejas a los estudiantes, que sólo son capaces de transmitirles los conceptos de forma parcial o bien les sugieren ideas equivocadas o confusas, son representaciones inadecuadas y deben evitarse (Gutiérrez, 1998a, p. 194). De ahí que la elección del modelo de representación plana de sólidos sea fundamental para la enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial.

Sack y Vázquez (2008) proponen cinco tipos de representaciones de objetos tridimensionales a las que los estudiantes deben enfrentarse: modelos tridimensionales, modelos gráficos bidimensionales convencionales que se asemejan al objeto tridimensional, representaciones abstractas bidimensionales que se parecen poco al objeto tridimensional, representaciones verbales y simulaciones dinámicas de objetos tridimensionales por ordenador.

Partiendo de que todas las tareas propuestas se realizan en ausencia del objeto físico, la atención se fijará en los modelos gráficos. En el proceso de comprensión del concepto subyacente a una representación plana, hay que recorrer dos pasos: el primero corresponde a la interpretación de la figura plana para así convertirla en un objeto tridimensional, y el segundo paso será interpretar ese objeto para convertirlo en el concepto geométrico objeto de estudio. Esto conduce, siempre que se manejen objetos espaciales y sea necesario representarlos mediante figuras planas, al planteamiento de un problema relacionado con la capacidad de visualización espacial de los estudiantes, y con su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales, o para interpretar correctamente las representaciones elaboradas por otros. Por ello la capacidad de visualización espacial es uno de los (meta) conocimientos claves en este problema.

Según la idea de Parzysz (1988), existen varios niveles de representación de un sólido geométrico, entendido como el objeto teórico caracterizado por su definición formal matemática. Estos niveles se corresponden con diferentes cantidades de información perdida. El primer nivel corresponde a las representaciones tridimensionales como los modelos en madera, papel o varillas. El segundo corresponde a las representaciones bidimensionales, que están más alejadas de los sólidos que modelizan, ofreciendo menos información que las anteriores.

Siguiendo a Gutiérrez (1998a, p. 198), una representación plana es perfecta cuando transmite al observador la misma cantidad de información que el cuerpo tridimensional real que representa, y como no existe ninguna representación que cumpla esta condición, es necesario que los estudiantes sepan manejar varias de ellas (perspectiva, ortogonal o vistas laterales, isométrica, ortogonal codificada), para de este modo poder seleccionar la más adecuada en cada situación. Además, parte de la información que se conserva al construir e interpretar una representación plana, se debe a que se han compartido ciertos códigos y claves, lo que motiva que determinados datos objetivos se interpreten siempre de la misma forma, lo que llama Parszyz (1988) "restitución de significado". Cuando no se conocen esos códigos se produce, eventualmente, una lectura errónea de las representaciones planas.

En la misma línea, Pittalis, Mousoulidesy Christou (2009, p. 385) sostienen que uno de los ingredientes más importantes para realizar con éxito tareas de geometría tridimensional es la habilidad para manipular diferentes modos de representación de objetos tridimensionales. Esto contrasta con el hecho de que dichos convencionalismos, necesarios para la correcta interpretación de los distintos modos de representación y que no son triviales, no se enseñen ni estén presentes en el currículo de la escuela tradicional (tal y como se ha visto en el Capítulo1).

Las representaciones utilizadas en los ítems de la prueba corresponderían al segundo nivel de representación descrito por Parzysz (1988). En el caso de los ítems 1, 3 y 5, la proyección paralela conserva información del aspecto visual, pero se pierde la parte oculta de los sólidos. En el caso de la proyección ortogonal se mantiene la información sobre la estructura de los sólidos (cantidad de elementos, posiciones relativas), pero se pierde información relativa a su aspecto visual global. Los sólidos que se han utilizado en este trabajo son el cubo (ítem 1, ítem 6) y el "módulo multicubo" (ítem 3 e ítem 5), que es un sólido formado por varios "cubitos" iguales pegados de manera que sus caras se superponen. En el ítem 1, ítem 3 e ítem 5, se ha utilizado como representación plana de un módulo multicubo la proyección paralela, que tiene la ventaja de conservar el paralelismo.

En el Capítulo 1 se describen cada una de las habilidades de visualización necesarias para poder poner en funcionamiento los procesos que permitan trabajar con las imágenes mentales: identificación visual, constancia perceptual, rotación mental, percepción de las posiciones y relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Dichas habilidades, al igual que los procesos y las imágenes mentales puestos en juego, dependerán de las tareas propuestas como se verá más adelante.

En las secciones siguientes se especificarán estas componentes de la VRE para cada uno de los ítems del cuestionario definitivo (Anexo 3) y también se hará referencia al grupo de tareas al que pertenecen según la descripción realizada en el Capítulo 1 (Anexo 4).

3.7.1. ITEM 1: CUBO TRUNCADO

Se combinan aquí dos tareas, la principal que es la de conteo y la de cortar un sólido (cubo en nuestro caso) por planos a una distancia determinada del vértice (tareas E17 y E26). Aunque no hay que identificar específicamente la sección que produce el corte pues ya viene dada por imagen ostensiva que aparece en el enunciado.

Como se ha visto en la Tabla 3.20, si se atiende al tipo de respuesta solicitada, este ítem es una tarea de identificación y si atendemos a la acción requerida es de conteo de partes, en concreto de vértices. No hay necesidad de crear una imagen mental para su resolución ni tampoco se exige la identificación sobre el papel de ninguna imagen mental. Sin embargo, es bastante habitual que se movilice una imagen mental del cuerpo resultante durante el proceso de resolución.

En cuanto a la imagen ostensiva que se presenta en el enunciado de la tarea es una representación en perspectiva paralela de un cubo con un vértice cortado.

La habilidad de relaciones espaciales se pone en juego al establecer la relación entre el plano que realiza el corte a una determinada distancia del vértice y las aristas del cubo a las que corta. Es la relación entre la inclinación del plano y el cubo la que establece el número de vértices de la figura resultante.

Se aplica la habilidad de identificación visual para poder reconocer la figura o los elementos del cubo que permanecen una vez que se han efectuado (mentalmente) los ocho cortes al cubo inicial. No se pide como respuesta una representación ostensiva de la figura resultante, sin embargo aquellos estudiantes que marcan ostensivamente todos los cortes sobre el cubo, como una ayuda para la resolución de la tarea, han de identificar los vértices de la nueva figura aislándolos de la estructura que corresponde al cubo.

En cualquier caso, tal y como indica Gutiérrez (1998a, p. 206), se puede observar que en estos dibujos, formados por conjuntos de líneas paralelas, perpendiculares y oblicuas que se tocan o se cortan, unos segmentos pueden actuar como distractores de otros y que el trabajo con determinadas direcciones puede llegar a ser más fácil que con otras (vertical y horizontal).

3.7.2. ITEM 2: SIMETRÍAS EN EL PLANO

La tarea solicita crear una figura simétrica, lo que nos lleva hacia el grupo de tareas P09, para ello nos dan parte de la figura y se deben sombrear el número mínimo de cuadraditos para que la figura tenga al menos un eje de simetría. Se debe indicar el eje de simetría de la figura creada, lo que se incluye en el grupo P10.

El ítem exige pensar en dos dimensiones y, aunque se construye una imagen mental para resolverlo, no es necesario transformarla en el pensamiento.

A pesar de que la respuesta solicitada en este ítem aparezca en términos de identificación de una de las opciones, se pidió expresamente en la prueba que se sombrearan los cuadraditos, por lo tanto, la imagen mental ha de ser representada sobre el papel y la respuesta se interpreta de dibujo.

En este ítem se ponen en juego habilidades de identificación visual y de reconocimiento de las relaciones espaciales. Una vez formada la figura se debe aislar del contexto, en este caso de la cuadrícula, para obtener una imagen completa de la misma. La habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales es necesaria para construir partes simétricas a las dadas y en conjunto obtener una figura con, al menos, un eje de simetría. La habilidad de memoria visual, siempre y cuando no se utilice la estrategia de aplicación de las propiedades de la simetría axial, permite recordar las características, en este caso de posición, que tendrían las cuadrículas dependiendo del eje de simetría utilizado.

La habilidad de rotación mental se pone en movimiento cuando se contempla el movimiento de la simetría como el efecto de doblar por el eje de simetría y hacer coincidir las dos partes simétricas. En ese caso, al ser la actividad sin la presencia de objeto físico, la acción a realizar es mental y se produce un movimiento de los cuadraditos negros saliendo del plano para coincidir con los nuevos sombreados (o viceversa).

3.7.3. ITEM 3: ORTOEDRO ENCAJABLE

Es una tarea que se encuadra en el grupo de las tareas E14, en las que se compone un sólido a partir de varias piezas, en este caso diferentes. Llegar a la solución requiere otra acción, la de rotar (tareas E11), pues la pieza correcta no se encuentra en la posición adecuada para formar el ortoedro.

El ítem requiere movimiento y construcción de imágenes mentales en un espacio tridimensional. La acción requerida no está explícita en el enunciado y para la resolución de la tarea es preciso construir una imagen mental y transformarla en el pensamiento.

Este ítem es muy rico en cuanto a las habilidades espaciales que se ponen en juego al resolverlo. La habilidad del reconocimiento de las relaciones espaciales permite establecer las relaciones entre las diferentes piezas que forman el ortoedro y el propio ortoedro. Así, la habilidad de reconocimiento de las posiciones espaciales establecerá la posición concreta dentro del ortoedro de cada una de las piezas. La constancia perceptual permite reconocer que las piezas mantienen su forma aunque dejen de verse total o parcialmente y que sus propiedades no varían al cambiarlas de posición y girarlas.

Cuando los alumnos tienen que enumerar una disposición 3D de cubos de un prisma rectangular, deben estructurar la disposición de forma que coordinen la información que ellos han construido desde las vistas ortogonales de las caras del prisma. Los estudiantes deben coordinar vistas ortogonales, más allá de la concepción de estructura local de mezcla de puntos de vista y reconocer cuales de esas vistas están interrelacionadas.

El tipo de representación plana utilizado en este ítem es la perspectiva paralela, tanto para la construcción completa (ortoedro) como para las diferentes opciones de respuesta que se dan. Al utilizar la representación en perspectiva paralela, las relaciones entre los cubos que integran el módulo son de posición (delante, detrás, encima, debajo) y de orientación (están en líneas perpendiculares o paralelas).

3.7.4. ITEM 4: DESARROLLO DEL CUBO SIN VÉRTICE

La tarea se corresponde con el tipo de tareas agrupadas en la clase E23. En este caso el objetivo consiste en identificar el desarrollo plano de un cubo al que se ha cortado previamente uno de sus vértices. Esta tarea se combina con tareas de identificar cortes de sólidos por diferentes planos (E26).

Se potencia en este ítem la habilidad de discriminación visual. Al montar mentalmente los diferentes desarrollos se comparan con la imagen que se tiene de un cubo con un vértice cortado, o bien se realiza el desarrollo de un cubo con un vértice cortado y se compara dicho desarrollo con las diversas opciones que se dan.

El proceso de desarrollar y plegar sólidos pertenece al proceso VP de Bishop (1983) ya que involucra la manipulación y extrapolación de imaginería visual. Según Piaget (1956) pasar de un sólido a un desarrollo supone realizar una acción mental y al mismo tiempo coordinar diferentes puntos de vista.

Diezmann y Lowrie (2009, p. 422) hablan de un error en particular que se produce al hacer una asociación incorrecta entre dos partes de una misma forma o entre una parte de la forma y la correspondiente parte de su desarrollo plano. Además, consideran que una dificultad presente en este tipo de situaciones, y en particular para este ítem 4, es la memoria visual limitada.

Por otro lado, tal y como detalla Fischbein (1993, p. 159), hay una serie de conocimiento tácito sobre el cubo (caras cuadradas, igualdad de lados, ángulos rectos, etc.) implicado en las operaciones mentales sin el cual la operación en conjunto no tendría sentido.

Siguiendo a Mesquita (1992), el doble estatus de los objetos geométricos también está presente en el espacio de tres dimensiones, que además se incorpora a las dificultades propias de conversión de representaciones. El desarrollo de un sólido tiene características particulares que lo diferencian de otro tipo de representaciones externas. Por un lado, conserva la forma y la magnitud de las caras, los lados y las relaciones métricas en dos dimensiones del cuerpo tridimensional. Pero por otro lado, existen puntos del espacio que tienen dos imágenes en el plano (fenómeno de splitting) lo que se convierte en uno de los obstáculos asociados a este tipo de representación.

Mesquita habla de tres aspectos que se deben considerar a la hora de trabajar con este tipo de representaciones: la producción y reconocimiento de un desarrollo, la identificación del reconocimiento de los criterios de un desarrollo y, por último, la identificación de las relaciones entre los elementos del desarrollo y los del cubo.

El desarrollo plano que se presenta en el ítem, en todas las opciones de respuesta, corresponde a la representación estereotipada de desarrollo de un cubo (prototipo), es el tipo 1-4-1 (en forma de T o de cruz). Debido a su regularidad y simetría parece ser el desarrollo más fácil de asociar con un cubo: la disposición de las caras conduce hacia la imagen estereotipada de cubo como cuatro caras laterales y dos bases, además, da una visión anisótropa en la que la dirección horizontal es preferente (propio de culturas occidentales). Mesquita (1992, p. 29) cita tres tipos de relaciones que hay que tener en cuenta en este proceso de desarrollar un cubo: a) la relación de correspondencia entre un elemento del cubo y su correspondiente elemento o elementos en su desarrollo, b) la relación de partición en dos, para poder reconocer aquellos elementos que deben ser divididos; c) la transferencia de las relaciones del cubo sobre el desarrollo (contigüidad de las caras, paralelismo de caras y aristas, etc.) Esta autora establece tres niveles en la comprensión del desarrollo de un cubo: el primer nivel está dominado por la percepción (figural), el segundo nivel, llamado funcional, articula de forma parcial el cubo y su desarrollo, se espera que se reconozcan algunos criterios y alguna relación entre elementos del cubo y, el tercer nivel o nivel estructural, comprende una articulación completa del cubo y su desarrollo, estableciendo una correcta identificación de las configuraciones, reconocimiento de los criterios y de las relaciones entre los elementos del cubo y del desarrollo.

3.7.5. ITEM 5: CUBO PERFORADO

La tarea pertenece al grupo de tareas E17, en particular a las que solicitan contar el número de cubos que forman una estructura. La única variante con respecto al resto de tareas de ese grupo es que en este caso el sólido no es compacto, sino que tiene tres túneles que lo atraviesan.

Esta tarea está presentada como una tarea dónde la acción principal requerida es de conteo. Para realizar dicha acción se ponen en funcionamiento las habilidades de reconocimiento de relaciones y posiciones espaciales. Estas habilidades son imprescindibles para poder dibujar representaciones planas de módulos de cubos, sobre todo en los que utilizan la estrategia por capas para resolver esta tarea. Al utilizar la representación en perspectiva paralela, las relaciones entre los cubos que integran el módulo son de posición (delante, detrás, encima, debajo) y de orientación (están en líneas perpendiculares o paralelas), al igual que ocurría en el ítem 3.

La investigación llevada a cabo por Battista y Clements (1996, p. 290) sugiere que las nociones de estructura espacial, formación de composiciones (unidades) y la coordinación e integración de las operaciones son componentes esenciales para el desarrollo de la comprensión de estas disposiciones por parte de los estudiantes.

Para realizar la enumeración de una disposición 3D, los estudiantes se centran en las disposiciones de cuadrados que aparecen en las caras exteriores de la disposición 3D.

Estos deben considerar tales disposiciones 2D como representaciones de unidades compuestas de cubos, no de caras de cubos o cuadrados. Para crear esta representación y mantenerla mientras se cambia de una vista de la disposición a otra, los estudiantes deben construir y coordinar perspectivas. Así, no sólo deben verse cuadrados que representan caras de cubos sino también conjuntos de caras (como las de los lados) que deben ser coordinadas con otros conjuntos debido a que ellas representan a los mismos cubos.

Además, para enumerar los cubos de una disposición 3D, los alumnos deben tener un modelo mental de la disposición. De acuerdo con Battista (1994), un modelo mental es una versión mental análoga a un objeto cuya estructura es idéntica a la estructura percibida o concebida del objeto que representa, y que es usada para simular interacciones con el objeto. El modelo mental del estudiante de una disposición determina como el estudiante interpreta su imagen o vistas de la disposición (matriz). Integrar vistas de un objeto 3D es construir un modelo mental coherente del objeto que posea esas vistas, requiere que esas vistas sean coordinadas.

Según Battista y Clements (1996, p. 288) la estructuración espacial proporciona la entrada a la enumeración y, por otra parte, los intentos de enumerar generan reestructuración espacial. La primera afirmación la podemos observar en que algunos alumnos utilizan la estructuración en capas para enumerar y esa estructura les ofrece resultados exactos, sin embargo, el empleo de la estructura de mezcla de caras les lleva a errores en el conteo. La investigación de estos autores puso de manifiesto que en tareas de enumerar, los alumnos pueden cambiar su estructura espacial a una más organizada, sobre todo cuando al comparar resultados de una operación de conteo, estos no coinciden. Según estos autores, esta reflexión sobre actos de contar debería ayudar a los estudiantes a estructurar espacialmente una situación, lo que es consistente con las teorías de cómo se forman las imágenes mentales.

La medición es fundamental para entender la estructura de las formas, usar sistemas de coordenadas para determinar localizaciones en el espacio, especificar transformaciones, y establecer el tamaño de los objetos. En la línea de Battista (2007, p. 891), se utiliza aquí el término medición geométrica en su sentido matemático amplio y abstracto, como el concepto de asignar números a entidades geométricas de acuerdo a un conjunto de axiomas. En este caso, la medición geométrica incluye el significado de que los números pueden usarse para cuantificar la cantidad del atributo volumen de un objeto geométrico, determinando el número de unidades atributos contenidos en el objeto. Este proceso requiere de una integración de conocimiento conceptual y procedimental.

3.7.6. ÍTEM 6: COMPONER FORMAS CON DOS PIEZAS IGUALES

La tarea se incluye dentro de grupo de tareas P13, cuyo objetivo es formar una figura con varias piezas dadas bajo la condición de que dichas piezas sólo se pueden trasladar y girar en el plano, por lo tanto también se combina con la acción de identificar una figura en diferentes posiciones (E08). La tarea requiere también la acción de identificar las dos piezas (tareas P04) en las opciones que se ofrecen en el enunciado.

Esta tarea se presenta para ser resuelta en el plano y exige la construcción de imágenes mentales y transformarlas en el pensamiento. Al igual que Owens (1992, p. 202), aquellas operaciones que encarnan acciones de juntar dos figuras para formar otra, se contemplan como procesos de pensamiento espacial, así como la imaginería visual usada para representar, reconocer y/o reproducir una forma o posición.

Una de las habilidades puestas en juego es el reconocimiento de las relaciones espaciales que lleva a identificar correctamente las relaciones entre las dos piezas, en cada una de las figuras (si están giradas, si son simétricas, etc.). Otra es la habilidad de conservación de la percepción para reconocer que las piezas mantienen su forma independientemente de haberlas girado. La combinación de ambas es la habilidad de conservación de las relaciones espaciales, presente en la resolución del ítem. También es necesaria la habilidad de identificación visual para reconocer las dos piezas en cada una de las figuras. De acuerdo con la distinción que hace Bishop (1989), el proceso interpretativo necesario, en este ítem, para generar imágenes visuales (físicas o mentales) es el proceso de comprensión de las representaciones visuales para extraer la información que contienen, lo que Bishop llama interpretación de la información figurativa (IFI).

Se producen imágenes mentales dinámicas al aplicar diferentes movimientos a las dos piezas para poder situarlas en las diversas posiciones que dan lugar a las opciones del enunciado de la tarea. En este caso estaríamos considerando la habilidad de rotación mental.

3.7.7. ITEM 7: GENERACIÓN DE CUERPOS MEDIANTE ROTACIONES EN EL ESPACIO

La tarea tiene dos objetivos claros: crear una imagen mental de un objeto tridimensional y dibujar una representación plana de tal objeto. En cuanto al tipo de tareas en las que se enmarca, esta tarea pertenece al grupo E27, donde dada una figura plana se pide dibujar el cuerpo de revolución que genera dicha figura al girar alrededor de un eje dado. Esta tarea conlleva la acción de realizar una representación plana (perspectiva, por niveles, ortogonal, etc.), lo que implica al grupo de tareas E03.

Para responder correctamente a este ítem hay que integrar, al menos, a) la habilidad de rotación mental, ya que hay que producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración en movimiento; b) habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio, para mantener la distancia o no a los ejes, fundamental para tener una imagen conceptual correcta y c) habilidad de conservación de las relaciones espaciales (conservación de la percepción y reconocimiento de las relaciones espaciales).

El proceso que se debe poner en juego, en este ítem, para generar imágenes visuales (físicas o mentales), es inverso al que se produce en el ítem anterior, lo que Bishop (1989) llama procesamiento visual (VP), el cual convierte la información abstracta o figurativa en imágenes visuales y, además, transforma unas imágenes visuales ya formadas en otras.

En cuanto al tipo de respuesta que se pide, esta es de dibujo. Ello supone que los estudiantes han de realizar una representación ostensiva de la solución. Aunque, de entre las diferentes formas de dibujo de sólidos, la perspectiva aún siendo la más natural y frecuente, es la más difícil de realizar con corrección. Esto se debe a que hay varias componentes, de distinto carácter, asociadas a la dificultad de los estudiantes para hacer dibujos en perspectiva: evolutiva, destreza de dibujo y cultural. Por otra parte, casi todas las representaciones que aparecen en los libros de texto y casi todas las que aprenden los estudiantes son proyecciones paralelas y no en perspectiva.

El trabajo de Hazama y Akai (1993), sobre representaciones de figuras tridimensionales con modelos y sin ellos, muestra como la representación en perspectiva fue una de las más usadas en los alumnos. Un porcentaje muy bajo de alumnos utilizaron otro tipo de representación (vistas ortogonales, por niveles, redes, etc.). Los estudiantes también hicieron uso de información suplementaria añadida a sus dibujos en perspectiva, incluido algún otro tipo de representación plana: descripciones verbales, indicando atributos de componentes, relaciones y estructura (nº de caras, vértices, caras curvas, líneas de puntos, etc.). Una manera de controlar las dificultades técnicas y los conflictos entre lo que quieren dibujar y lo que dibujan es mediante la incorporación de leyendas a sus representaciones. Según estos autores, las representaciones gráficas de figuras tridimensionales son medios importantes para comunicar información espacial entre el profesor y ellos, entre estudiantes y otros estudiantes y a sí mismos.

Mitchelmore (1980a) argumenta que incluso la representación de líneas paralelas y perpendiculares en el espacio es una tarea bastante dificultosa tanto para los adultos como para los niños. Cuando los estudiantes tienen que realizar un dibujo en perspectiva primero suelen hacer un esbozo bastante rudimentario de la vista frontal del objeto y después lo van modificando basándose en otras perspectivas del objeto. Los estudiantes tienen que unificar diferentes imágenes mentales que corresponden a diferentes perspectivas del objeto. Este autor intenta describir el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva a través de la existencia de cuatro etapas de tipo piagetiano (esquemática plana, esquemática espacial, pre-realista y realista).

Ciñéndonos a representaciones en papel, Guillén et al. (1992) y Gutiérrez (1998a) coinciden en identificar tres tipos de representaciones de sólidos: *representaciones gráficas*, en las que si hay algo de texto este es irrelevante y no ofrece ninguna información adicional; *representaciones verbales*, en las que los dibujos, si aparecen, tienen un valor secundario y pueden omitirse sin que se pierda información; y, por último, *representaciones mixtas*, en las que el dibujo y el texto se complementan y la pérdida de uno supone la pérdida de la mitad de la información. En esta tarea, los estudiantes tienen que crear y representar una imagen dinámica. Según este autor, la diversidad de formas de representación que surgen y la frecuencia de cada una, tienen mucho que ver con la forma en que haya sido planteada la tarea. Así, en la investigación llevada a cabo por Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989), se intenta evitar el uso de palabras como “dibujar”, “describir”, “explicar” o “escribir” para que no prevalezca una forma sobre otra, ya que ese era uno de los objetivos de su investigación. En nuestra situación, se dice explícitamente en el enunciado que “dibujen de forma aproximada” y, por ello, lo esperado sería que prevaleciera la representación gráfica sobre la verbal.

CAPÍTULO 4:
MODELOS EPISTÉMICOS DE REFERENCIA DE LOS ÍTEMS DEL CUESTIONARIO

4.1. INTRODUCCIÓN

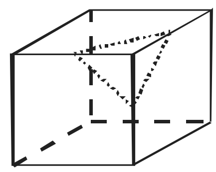
En este capítulo se realizará el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales. El análisis se realiza a dos niveles distintos y complementarios como se ha visto en el Capítulo 2. En el primero se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico (Godino, 2002). A continuación aplicamos los atributos contextuales que corresponden a las cinco dualidades: extensivo-intensivo, unitario-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y personal-institucional.

Como un primer nivel de análisis resumimos los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes en la actividad de solución de la tarea. Así mismo, se indica que las entidades lingüísticas desempeñan el papel de expresión (o representación de todas las restantes entidades) y el papel de ayuda o instrumento para la realización de los procedimientos y argumentaciones. Las situaciones problemas motivan o constituyen la razón de ser del sistema de definiciones, proposiciones y procedimientos implicados, mientras que dicho sistema conceptual y procedimental resuelve la situación-problema. Finalmente, los argumentos justifican los conceptos y proposiciones emergentes y los procedimientos implementados. Esta identificación de objetos y procesos desarrolla y amplía el análisis realizado por Hershkowitz (1989) en el que presenta el efecto que tienen en la adquisición de un concepto matemático la cantidad de elementos que componen su definición formal. De la misma forma Gutiérrez y Jaime (1996, p. 22) se plantean que los errores de los estudiantes no son debidos únicamente a que no comprenden la estructura lógica de las definiciones sino al desconocimiento de los conceptos previos utilizados en una definición.

4.2. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 1: CUBO TRUNCADO

Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm. de lado como se indica en la figura, a distancia de 1 cm. sobre cada arista. ¿Cuántos vértices tiene el sólido así obtenido?

a) 6   b) 8   c) 12   d) 18   e) 24



4.2.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) Los cortes de las esquinas del cubo se hacen por los puntos medios de cada arista, ya que la arista mide 2 cm y el corte se hace a distancia de 1cm.
2) Estos puntos son los vértices del nuevo sólido formado, ya que son los puntos en los que concurren los segmentos que unen los puntos medios de las aristas contiguas del cubo inicial.
3) El cubo tiene 12 aristas, lo que se puede verificar contando las aristas del “cubo transparente” representado.
4) Por tanto, el nuevo poliedro formado al truncar las esquinas del cubo por el punto medio de las aristas tiene 12 vértices.

4.2.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal: esquina, cubo, arista, lado, vértices, sólido, distancia, cortar, indicar, obtenido.

- Gráfico: Dibujo de un cubo, punteando la intersección de uno de los planos de corte con el cubo.
- Simbólico: a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24

- Conceptos
  - Previos: Cubo, arista, distancia, vértice, lado, centímetro, esquina, triángulo, cuadrado, perspectiva, cuerpo espacial, volumen, polígono regular.
  - Emergentes: Cuboctaedro, sólido truncado, intersección de planos.
- Propiedades/ proposiciones
  - Previas: Todas las caras de un cubo son iguales. En un cubo todas las aristas tienen la misma longitud. Todas las caras de un cubo son cuadrados. El cubo tiene 12 aristas. En cada vértice de un cubo confluyen tres caras (tres aristas). Un plano que corta a uno de los vértices de un cubo afecta a tres caras adyacentes.
  - Emergentes: El cubo truncado tiene 12 vértices.
- Procedimiento
  - Identificar los puntos medios de las aristas del cubo con los vértices del sólido resultante.
  - Contar el número de aristas del cubo.
- Argumento. Como el corte se hace por el punto medio de las aristas (dato contenido en el enunciado), el nuevo sólido tendrá tantos vértices como aristas tenga el cubo. Como el cubo tiene 12 aristas, el nuevo cuerpo tridimensional tendrá 12 vértices.

4.2.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

Realizamos a continuación un segundo nivel de análisis del problema y su solución aplicando los atributos contextuales introducidos en el EOS.

4.2.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular – general)

El problema está formulado en términos particulares para un cubo de unas dimensiones específicas (L = 2 cm), y el corte de las esquinas se hace también a una distancia particular. A pesar de ello se pide justificar una propiedad con un cierto grado de generalidad: Siempre que hagamos el corte en estas condiciones se obtiene un nuevo sólido que tiene 12 vértices. Se supone que el lector no va a tener ninguna dificultad en generalizar el resultado para un cubo de cualquier dimensión L, si el corte se hace a distancia L/2 de los vértices. En realidad se está pidiendo demostrar el siguiente resultado con un cierto grado de generalidad: si a un cubo de lado L se le cortan las esquinas a la distancia L/2 desde cada vértice se obtiene un poliedro de 12 vértices.

La argumentación se puede hacer en términos empíricos, contando físicamente los vértices en la representación pictográfica de un cubo particular, pero la propiedad que se obtiene es necesariamente verdadera si se cumplen las condiciones impuestas.

Este problema admite diversas generalizaciones que ponen en juego habilidades de visualización y razonamiento geométrico relevantes en el estudio de los cuerpos geométricos (sólidos de Arquímedes).

a) Caracterización del cubo truncado. Se puede pedir la caracterización completa del nuevo poliedro formado. Se obtienen dos tipos de caras, 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros. El número total de caras del cubo truncado por los puntos medios de las aristas es de 14. El número de aristas, será: 6 caras cuadrangulares a razón de 4 lados, 24 lados; 8 caras triangulares a razón de 3 lados, 24 lados. Total 48 lados; cada dos caras comparten un mismo lado, luego el número total de artistas del cubo truncado será de 24. Se comprueba el teorema de Euler: Caras + Vértices = Aristas + 2; 14 + 12 = 24 + 2.
b) El corte de las esquinas se hace a una distancia menor que la mitad de la longitud del lado, pero la misma en cada vértice. Si el corte se hace a un tercio de la cara cuadrada del cubo original obtenemos el cubo truncado. Las caras serán 6 octógonos y 8 triángulos. El número de vértices es 24 y el número de aristas 36.
c) Proponer la tarea para otro tipo de poliedro regular menos habitual (octaedro, tetraedro, dodecaedro, icosaedro). El nuevo sólido tendría tantos vértices como aristas el anterior, en el caso de que el corte se haga a mitad de la arista, o el doble si se hace a una distancia menor que $\frac{L}{2}$, siendo L la longitud de la arista. Incluso podría evitarse la condición de que el poliedro fuera regular.
d) Proponer la tarea para cualquier tipo de poliedro.

4.2.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

El cubo "existe" como entidad unitaria, tanto en su versión ostensiva, sólido material, como entidad mental e ideal. Pero además es un sistema en el que se puede identificar diversas componentes (caras, vértices y aristas) entre las que existen relaciones. En el caso de la tarea propuesta, se trata de justificar una conjetura en la que intervienen distintas componentes. Al aplicarle la operación de truncamiento se obtienen nuevos elementos (tipos de caras y de vértices) que forman un nuevo sistema descrito como un poliedro arquimediano (cuboctaedro).

El sujeto que resuelve la tarea debe ser capaz de identificar los componentes, de operar con ellos y componer nuevos objetos. En este caso, se obtiene el cubo truncado y un teorema sobre el número de vértices de ese nuevo sistema. La solución del problema requiere "descomponer" el sistema en sus componentes, para llegar a una nueva integración final. El enunciado del teorema: "el cubo truncado tiene 12 vértices", debe ser articulado con su demostración correspondiente.

Los conceptos y propiedades previas, que intervienen en el enunciado de la tarea y en su resolución, deben tener para el sujeto un estatus unitario, reificado, estar disponibles para su interpretación y aplicación. El cubo se puede ver como un sistema formado por un cuboctaedro y ocho pirámides de base triangular.

Hipótesis $H1_{It1}$: La descomposición del cubo como un sistema formado por 12 aristas dispuestas de una forma determinada donde la acción a realizar va a producir un vértice en cada una de ellas no es fácil de detectar por algunos de los estudiantes de magisterio.

4.2.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

Ya hemos dicho que todos los objetos lingüísticos intervinientes están en relación de representación respecto de las entidades regulativas a las cuales sirven de soporte y expresión. El dibujo tiene además una función instrumental: permite "reconstruir" metafóricamente un cubo material sobre el que es posible contar los vértices; en este caso es un recurso para facilitar la acción de contar requerida. También permite ver que en cada vértice nuevo concurren cuatro caras, dos cuadrangulares y dos triangulares. El dibujo "ayuda" a ver que el punto medio de una arista es un vértice del nuevo cuerpo.

Todo el ejemplo, la tarea y su solución, está evocando (expresando) un contenido no ostensivo: el nuevo teorema obtenido, que es realmente la significación que se pretende lograr con toda la actividad.

Hay pues unos significados patentes, los puramente representacionales del lenguaje en relación a los conceptos y demás entidades intervinientes; pero el EOS ayuda a identificar nuevos significados como consecuencia de la ontología introducida, en particular los objetos no ostensivos (mentales e ideales).

Vemos como en el enunciado se utilizan dos palabras (lado y arista) para indicar el mismo concepto, al igual que esquina y vértice, lo cual puede provocar algún conflicto semiótico.

El enunciado de la tarea incorpora elementos lingüísticos que refieren a objetos ostensivos evocados (sólido, esquinas, distancia, cortar, etc.). Los distractores incluidos en las opciones de respuestas constituyen "teoremas falsos" que hay que descartar.

Hipótesis $H2_{It1}$: *La relación entre lo que mide la arista y la distancia a la que se hace el corte va a quedar en segundo plano, lo que va a dificultar que los estudiantes lleguen a la solución correcta.*

4.2.3.4. Dualidad Ostensivo - No ostensivo

La tarea involucra un dibujo que representa esquemáticamente un sólido con una realidad física evocada. Tanto el dibujo como la palabra "cubo" (objetos que se muestran por sí mismos, esto es, objetos ostensivos) refieren a un objeto mental (no ostensivo, la imagen que cada sujeto tiene en su cerebro como consecuencia de su experiencia personal con cierta clase de objetos empíricos). Pero el lenguaje evoca además otra clase de entidades: el cubo como objeto geométrico regido por una definición (poliedro cuyas caras son todas cuadradas). Es un objeto ideal, que emerge del sistema de prácticas operatorias y discursivas de las personas ante cierta clase de experiencias, pero que adquiere un nuevo tipo de realidad diferente de los objetos perceptibles y de sus imágenes mentales.

De la regla que define un cubo se deduce necesariamente que en cada vértice concurren 3 caras cuadrangulares y que en total el cuerpo debe estar formado por 6 caras; en consecuencia debe tener 8 vértices y 12 aristas.

El sujeto que se enfrenta a esta tarea tiene en su mente imágenes de los cuerpos materiales, pero ha de poseer, además, las reglas conceptuales y proposicionales de los objetos que intervienen en el enunciado y cuya aplicación a la situación permiten la emergencia de nuevas reglas.

Podemos formular la siguiente hipótesis: en el caso de la geometría, los objetos ostensivos (sólidos materiales, representaciones pictográficas, etc.) son necesarios ya que el planteamiento de los problemas involucra, al menos en el nivel elemental, al espacio sensible. Pero la solución y, en especial, su generalización requiere un proceso de modelización mediante los objetos geométricos ideales, cuya naturaleza no es mental, sino sociocultural (o matemática).

La tarea evoca un sólido que se puede hacer ostensivo (aunque la tarea no lo pide) si se marcan todos los cortes sobre el cubo dado. Sin embargo, en esa representación ostensiva aparecen elementos del cubo inicial y elementos de la nueva figura que hay que saber discriminar para poder obtener la imagen del nuevo cuerpo.

4.2.3.5. Dualidad Personal – Institucional

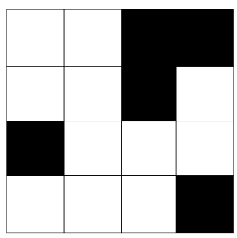
El análisis a priori realizado sobre una respuesta experta tiene un carácter institucional (o epistémico), esto es, social o compartido. En este caso podríamos incluso distinguir dos posibles instituciones de referencia: La matemática formal o pura, donde el teorema demostrado tiene una validez universal y atemporal. La matemática informal, escolar, donde se puede admitir una argumentación empírica como medio de aceptación del enunciado.

Cada sujeto individual enfrentado a las tareas pedidas tendrá una relación personal con los objetos intervinientes y emergentes, que el EOS describe como “configuración cognitiva”. Estas configuraciones cognitivas son dependientes de las configuraciones epistémicas (institucionales) con las que el sujeto ha entrado en relación en los procesos de estudio en los que ha participado.

Hipótesis $H3_{It1}$: la práctica poco habitual de este tipo de actividades de truncamiento puede ser un factor explicativo de las dificultades de los estudiantes al resolver esta tarea.

4.3. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 2: SIMETRÍAS EN EL PLANO

¿Cuál es el menor número de cuadraditos que es necesario sombrear para que la figura resultante tenga por lo menos un eje de simetría? Indica en el dibujo cuáles serían esos cuadraditos.



a) 3 *b) 5* *c) 1* *d) 4* *e) 2*

4.3.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) Considerar que un cuadrado (la malla cuadrangular) tiene cuatro ejes de simetría: horizontal, vertical, diagonal izquierda-derecha y diagonal derecha-izquierda. Será necesario hacer un análisis exhaustivo de casos.
2) Simetría respecto del eje vertical. Es necesario sombrear 5 cuadraditos que se corresponderían respectivamente con los simétricos de los cinco cuadraditos negros.
3) Simetría respecto del eje horizontal. Es necesario sombrear 3 cuadraditos que se corresponderían con los dos que faltan para lograr el simétrico de la L invertida superior y otro para simetrizar el cuadradito negro de la izquierda.
4) Simetría respecto del eje diagonal derecha-izquierda. Es necesario sombrear 3 cuadraditos, dos para simetrizar los cuadrados negros aislados y uno para simetrizar el cuadrado de la esquina de la L invertida.
5) Simetría respecto del eje diagonal izquierda-derecha. Sería necesario sombrear 2 cuadraditos para simetrizar los dos cuadrados que forman los extremos de la L invertida.
6) Como el problema enuncia la restricción de que el número de cuadrados a sombrear sea mínimo la solución es la que aporta la simetría respecto del eje diagonal izquierda-derecha.

4.3.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal (términos y expresiones): Cuadraditos, figura, eje, simetría, “por lo menos uno”, dibujo, “menor número”, sombrear, indicar.
  - Gráfico: Gráfico de una red cuadrangular con algunos cuadrados sombreados en negro que conforman una figura disconexa de la que no forma parte la cuadrícula.
  - Simbólico: a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2
- Conceptos
  - Previos: Figura geométrica plana (cóncava, convexa, conexa, inconexa, regular, irregular), simetría axial, ejes de simetría, número mínimo de un conjunto finito de números naturales, cuadrado como polígono regular,

cuadrícula, teselas, área, unidad de medida de área, movimientos directos o inversos.

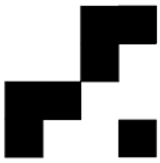
– Emergentes: Figura no convexa, figura no conexa, puntos fijos.

- Propiedades/Proposiciones

– Previas: El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría. Las propiedades que se derivan de la definición de simetría axial (equidistancia al eje y perpendicularidad entre el eje y el segmento que une un punto con su transformado). La simetría axial está asociada a la acción de levantar una figura del plano. Las simetrías son movimientos inversos (cambian la orientación de las figuras). Las teselas se unen por lados de la misma longitud.

– Emergentes: En las condiciones del enunciado de la tarea el menor número de cuadraditos a sombrear es dos como se muestra en la Figura 4.1.

Figura 4.1. Figura solución



- Procedimiento

– Visualizar los posibles ejes de simetría de la figura, que derivan de los 4 que tiene el cuadrado exterior (malla cuadrangular).

– Sombrear mentalmente los cuadraditos necesarios para que cada uno de los ejes sea un eje de simetría.

– Contar los cuadraditos en cada una de las situaciones.

– Elegir aquella situación que nos dé el menor número de cuadraditos para que la figura tenga un eje de simetría, al menos.

– Sombrear los dos cuadraditos, solución del problema.

- Argumento: argumentación deductiva a partir de la definición de cuadrado, de la propiedad de que tiene cuatro ejes de simetría, de la definición de simetría axial y comprobación exhaustiva de los cuatro casos. Finalmente la aplicación de la propiedad que define el orden de los números naturales, para obtener el número mínimo. Este argumento permite establecer la validez del procedimiento seguido.

4.3.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

4.3.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular – general)

La noción de eje de simetría es una generalidad (intensivo) que debe ser particularizada en este caso a los ejes de simetría de un cuadrado (extensivos), concretamente a los del cuadrado exterior que forma la cuadrícula.

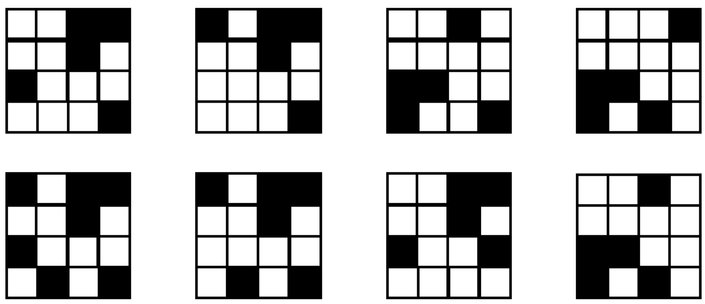
La particularización de la definición de eje de simetría a este caso puede resultar conflictiva por tres motivos:

- La figura inicial es irregular e inconexa y no presenta ninguna simetría axial visible.
- Otra dificultad se corresponde con la necesidad de construir la figura a la cual se va a aplicar el eje de simetría, lo que implica considerar los cuadraditos que faltan según el eje de simetría que elija.
- Usualmente las figuras geométricas manejadas en la institución escolar suelen ser conexas. Aquí se está generalizando la noción de figura geométrica ampliándola a figuras inconexas.

Se pueden identificar las siguientes variables de tarea:

a) Modificar la situación de los cuadraditos sombreados (Figura 4.2). También incluir alguno más.

Figura 4.2. Modificación de la situación de los cuadrados sombreados



b) Cambiar “al menos un eje” por “un eje”.

c) Cambiar “menor número” por un número fijo de cuadrados.

d) Presentar una figura conexa.

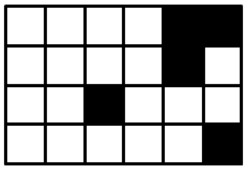
e) Exigir un número de cuadrados de forma que la figura resultante tenga un número determinado de ejes de simetría.

f) Suprimir la cuadrícula y aportar instrumentos de dibujo.

g) Exigir que la figura tenga más de un eje de simetría.

h) Cambiar la forma y tamaño del polígono matriz (Figura 4.3).

Figura 4.3. Malla rectangular



i) Exigir el mínimo número pero añadiendo la condición de que la figura resultante sea conexa. En este caso se puede imponer la condición de que la unión de los cuadraditos se haga sólo por las aristas o permitir que sea a través de aristas o/y vértices.

j) Evitar los distractores (se da el valor 1 que es una solución imposible).

4.3.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

La resolución del problema requiere movilizar el sistema de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que se indican a continuación. El sistema formado por los tres conjuntos de cuadraditos marcados en la cuadrícula cuadrangular es considerado como partes de una única figura. Sin embargo, para conseguir una figura con al menos un eje de simetría se puede trabajar con dichas partes por separado, teniendo en cuenta que forman parte de un todo. Cada una de esas partes ha de tener su figura simétrica, ser simétricas o formar parte de otra figura simétrica con respecto a un único eje.

También se debe considerar que la figura está enmarcada en una malla cuadrangular que hace de marco de referencia para obtener la solución, pero que dicha malla no forma parte de ella.

La resolución de la tarea requiere su descomposición en cuatro subproblemas correspondientes a cada uno de los ejes de simetría del cuadrado. Una vez obtenidos los cuatro números es preciso decidir cuál es el menor de una colección de cuatro números, lo que le permite marcar la opción correcta descartando los demás distractores.

Hipótesis $H1_{It2}$: Algunos sujetos pueden tener dificultades en hacer esta interpretación de la noción de figura. La idea de figura como un todo unitario puede llevar a los estudiantes a interpretarla como una figura conexa.

4.3.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

La expresión “menor número” hace referencia a una colección de números naturales, cada uno de los cuales (salvo el 1) se corresponden con el número de cuadraditos que se deben sombrear para construir las figuras resultantes de las simetrías respecto de los cuatro ejes del cuadrado. Esta interpretación obliga al sujeto a considerar de forma exhaustiva todas las posibilidades de simetrización de una figura con respecto a estos ejes.

La expresión “al menos un eje” significa que puede tener que analizar más de un eje de simetría para lograr el mínimo número de cuadraditos a sombrear. Esta expresión realmente no modifica la solución del problema, pero se convierte en un distractor que puede dificultar la interpretación de la tarea a resolver por parte de algún estudiante.

Las expresiones “menor número” y “tener por lo menos un eje de simetría” deben ser combinadas con la representación gráfica que se da de forma ostensiva y también relacionadas con la definición de figura. No tener en cuenta alguno de esos aspectos modificará la solución de la tarea. La segunda expresión conduce al análisis de los cuatro ejes de simetría de la malla cuadrangular en la que se encuentra enmarcada la figura. Para cada uno de los cuatro ejes se juega con el menor número de cuadraditos que hacen falta para tener a ese eje como eje de simetría. El enunciado no impone la restricción de que la figura tenga que ser conexa, lo que da más libertad para construir la solución y reducir el número de cuadraditos a utilizar.

Hipótesis $H2_{It2}$: La representación gráfica de la figura a completar provocará conflictos en los estudiantes al considerar las partes de la figura como partes totalmente independientes. De esta manera se estará actuando sobre tres figuras o bien sobre una de ellas.

Hipótesis $H3_{It2}$: La expresión “tenga por lo menos un eje de simetría” puede producir un conflicto semiótico al interpretarla como que “tenga por lo menos uno”.

4.3.3.4. Dualidad Ostensivo - No ostensivo

La tarea exige una respuesta ostensiva, consistente en sombrear y marcar una de las opciones.

Un sujeto que posea la capacidad de realizar todo el proceso de manera mental sólo movilizaría como ostensivos el marcado de la opción correcta y el sombreado de dos cuadraditos faltantes. La resolución de la tarea realizada mentalmente requeriría la movilización de los objetos conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos descritos anteriormente, en su faceta no ostensiva y personal. Así mismo el sujeto utilizará elementos lingüísticos no ostensivos (imágenes mentales, gestos interiorizados, etc.).

Otros sujetos pueden realizar la tarea con nuevos objetos ostensivos: trazado físico de los ejes, doblado del papel, por ensayo-error marcando cuadraditos auxiliares, gestos para colocar ejes de simetría y cuadraditos, señalar casillas, etc.

4.3.3.5. Dualidad Personal – Institucional

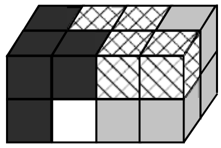
Entre los procesos de interpretación que debe movilizar un sujeto para resolver esta tarea destacamos sus concepciones acerca de lo que significa una simetría axial, así como la consideración de esta figura disconexa como una única figura, lo que representa una generalización de lo que usualmente se interpreta por "figura" (figura conexa). Por otro lado debe ser consciente de que hay dos figuras, una que se muestra a través del gráfico (de la que no forma parte la cuadrícula) que se corresponde con la figura inicial, y otra que es la figura resultante de sombrear ciertos cuadraditos para componer la figura simétrica a la que alude la tarea.

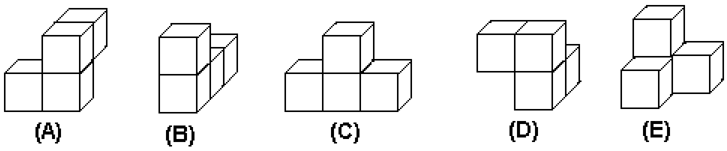
Los tipos de errores previsibles se infieren al comparar posibles respuestas de un sujeto con los significados institucionales establecidos. Entre los significados potencialmente conflictivos destacamos, a priori, los siguientes:

a) Los errores derivados de no reconocer las propiedades o la definición de simetría axial.
b) Los errores derivados de no reconocer el número de ejes de simetría de un cuadrado.
c) Los derivados de no tener en cuenta la restricción impuesta en el enunciado de la tarea de que el número de cuadraditos a añadir para construir la figura simétrica debe ser mínimo. Esto es consecuencia de no considerar los distintos ejes de simetría de un cuadrado, o bien de considerar que la figura ha de ser conexa, o bien de considerar las partes de la figura como partes totalmente independientes.
d) Las dificultades para reconocer como "figura geométrica" una figura no conexa que no se adapta al patrón habitual en la institución escolar.
e) El apoyo institucional asociado a la introducción de una cuadrícula en el interior del cuadrado puede funcionar como un distractor para los estudiantes.

4.4. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 3: ORTOEDRO ENCAJABLE

Se forma un paralelepípedo rectángulo usando 4 piezas, cada una de ellas formada por 4 cubos (ver la figura de la derecha). Tres de las piezas se ven por completo; la blanca sólo parcialmente. ¿Cuál de las 5 piezas siguientes es la blanca?





4.4.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) "Visualizar" el paralelepípedo. Calcular cuántos cubitos pequeños lo forman.
2) Observar que la parte superior está cubierta completamente por las piezas coloreadas o rayadas.
3) Observar los cubitos que vemos de la parte inferior (4 delanteros y el de la esquina trasera derecha). Sólo uno de ellos (de los que están delante) es blanco.
4) "Visualizar mentalmente" los cubitos que no son visibles en la representación de la figura (tres consecutivos en la parte de atrás).
5) Girar 90º la figura c), abatiéndola hacia delante. Trasladarla hasta encajarla en el paralelepípedo para comprobar que es la solución.

4.4.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal (términos y expresiones): paralelepípedo rectángulo, piezas, cubos, figura, ver, completo, blanca, parcialmente. Términos y expresiones: "se forma un paralelepípedo rectángulo usando 4 piezas", "tres de las piezas se ven por completo", "la blanca sólo parcialmente".
  - Gráfico: 5 construcciones multicubo formadas cada una de ellas por cuatro cubos. Dibujo de un paralelepípedo rectángulo formado por 16 cubos unidad agrupados en 4 piezas diferentes, cada una de un color.

- Simbólico: (A), (B), (C), (D), (E), y los números 4 y 5.

- Conceptos
  - Previos: Cubo, volumen, lado, arista, vértice, cuadrado, perspectiva, unidad de medida de volumen, cuerpo espacial, ortoedro.
  - Emergentes: Movimientos rígidos en el espacio, paralelepípedo rectángulo, vistas ortogonales, representación por niveles.
- Propiedades/Proposiciones
  - Previas: Los movimientos rígidos (simetrías, giros, traslaciones) mantienen las propiedades métricas de las figuras. El volumen como producto de tres dimensiones. El volumen es una magnitud sumativa. Los cubitos unidad se unen por las caras.
  - Emergentes: La pieza blanca es la c).
- Procedimiento
  - Eliminar la parte superior del paralelepípedo.
  - Marcar mentalmente, en el nivel inferior (malla $4 \times 2 \times 1$), los cubitos que se ven y el color que tiene cada uno.
  - Observar que quedan tres cubitos en la parte de atrás que no tienen un color asignado porque no se ven desde esa perspectiva.
  - Combinar esos tres cubitos con el cubito blanco visible para formar la pieza blanca.
  - Identificar esa pieza con la que se da en la opción c), aunque abatida.
- Argumento: En el nivel superior son visibles todos los cubitos que lo forman y ninguno de ellos es de color blanco, por tanto, todos los cubitos de la pieza blanca están en la capa inferior. El número de cubitos en la “capa superior” ha de ser el mismo que en la inferior (8) por ser un ortoedro rectángulo. Igualmente sucede con el número de cubitos de las filas delantera y trasera de cada capa (4). De esos ocho espacios, los cuatro de delante se pueden ver y sólo uno de ellos es de color blanco, por tanto los otros tres estarán en la parte de atrás. En esa parte de atrás es visible, desde la perspectiva que se tiene, un cubito de la pieza gris que completa la pieza gris. Quedan entonces tres cubitos alineados no visibles en esa parte. Como todas las piezas menos la blanca se ven, esos cubos han de pertenecer a la pieza blanca. De esa manera se tiene que debajo de los dos cubos rayados de atrás hay dos cubos blancos así como debajo del cubo negro de atrás.

Por tanto, hay tres cubos blancos alineados que junto con el cubito blanco visible, unido a estos por el del medio, forman la pieza blanca. De ello se deduce que la pieza blanca es la c). Para que encaje hay que girarla hacia delante 90º (abatirla hacia delante).

4.4.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

4.4.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular-general)

El problema está formulado para el caso particular de un ortoedro de volumen $4 \times 2 \times 2$ cubitos unidad. Hay dos capas y, en cada una de ellas, hay 8 cubitos. Si se analizan los cortes por capas (representación por niveles de un sólido tridimensional) se obtiene un método para aplicar a otras situaciones de este tipo, variando cualquiera de las dimensiones. Así mismo se puede variar el número de cubitos que forman cada una de las piezas.

El dibujo en perspectiva permite visualizar tres caras a la vez, que son las que dan la parte sustancial de la información.

Se pueden tener en cuenta las siguientes generalizaciones y variables de tarea:

a) Mantener las dimensiones del paralelepípedo dado y modificar el número de cubitos unidad que forman las piezas (considerar cuatro piezas de tres cubitos y una de cuatro). En este caso, no cabría la posibilidad de que todas las piezas estuvieran formadas por el mismo número de cubitos unidad, además no habría la posibilidad de que todas las piezas que forman el sólido fueran distintas.

b) Aumentar alguna o varias de las tres dimensiones $(\mathrm{n} \times \mathrm{m} \times \mathrm{l};\ \mathrm{n}, \mathrm{m}, \mathrm{l} \geq 1)$. También aquí se puede considerar la variable "número de cubitos unidad que forman las diferentes piezas del sólido".

   Esta situación conduce a plantearse la tarea de ver cómo varía el número de cubos que se ven, dependiendo del valor que tomen las dimensiones del ortoedro (x, y, z). El número de cubos ocultos va a condicionar la unicidad de solución. Así, en la Tabla 4.1 se puede establecer la generalización del número de cubos visibles en función de las dimensiones del ortoedro.

Tabla 4.1. Cubos visibles en función del valor de las dimensiones

nº de cubos totales (T)	nº de cubos visibles (V)	nº de cubos ocultos (O)
$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot y + (z-1)x + (z-1)(y-1)$	$(z-1)(x-1)(y-1)$

c) Otra actividad podría partir de dar las secciones y que los propios alumnos construyan/determinen cómo son cada una de las piezas y representen las diferentes vistas del cubo completo construido.

   El procedimiento de hacerlo por niveles facilita en gran medida la resolución de la tarea. En el enunciado no se pide este tipo de generalizaciones (variaciones sobre el enunciado).

4.4.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

El paralelepípedo rectángulo es una entidad unitaria. También lo son cada una de las piezas que lo forman, al igual que las piezas que se dan como opciones en el enunciado. Por otro lado, también es una entidad sistémica al estar formado por cuatro piezas que están dispuestas de una forma determinada. Para otra disposición diferente a la incluida en el enunciado, la forma de la pieza blanca podría variar. Las relaciones entre las piezas son fundamentales para poder llegar a la solución, así como con la coordinación de las vistas ortogonales del paralelepípedo.

El ortoedro dado, como unidad sistémica, se puede descomponer en otros elementos diferentes a esas cuatro piezas (cuadriculada, gris, negra y blanca). Se trata de hacer secciones. En este caso, cada una de las secciones son entidades sistémicas al estar formadas por cubos de diferentes colores. Hay que saber establecer las relaciones entre los cubos de igual color que están en una sección y los de la otra (u otras, dependiendo de cómo se realicen esas secciones) haciendo corresponder la posición adecuada en cada uno de los niveles.

OE: Ortoedro encajable, PB: pieza blanca, PC: pieza cuadriculada, PG: pieza gris PN: pieza negra.

$$PB = OE - (PC \cup PN \cup PG)$$

Hipótesis $H1_{It3}$: No establecer las relaciones entre las piezas formando parte de un todo unitario puede llevar a los estudiantes a elecciones erróneas.

4.4.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

En el enunciado de la tarea se presentan una serie de elementos que deben ser conocidos por los sujetos como el cubo y el paralelepípedo rectángulo. Para la realización de la tarea es necesario el dibujo en perspectiva del paralelepípedo rectángulo donde aparecen, también de forma ostensiva, tres de las cuatro piezas que lo forman. El dibujo en perspectiva, aunque da una imagen un poco distorsionada de la realidad, permite evocar una entidad mental (no ostensiva) que se corresponde con la entidad ideal paralelepípedo rectángulo.

Las opciones dadas en la tarea como posibles soluciones corresponden también a representaciones en perspectiva, es decir, son objetos ostensivos. Sin embargo, en el enunciado no se dice nada específico acerca de la posibilidad de que las piezas se puedan girar. La manera de formular la pregunta puede hacer entender que la solución viene dada por una de las opciones presentadas, pero en la posición en la que aparecen, sin posibilidad de que esas piezas puedan cambiar de posición en el espacio.

El hecho de dar las posiciones de las piezas de una manera estática, al igual que la representación del ortoedro, puede motivar que los estudiantes discriminen en base a ello. La asociación de la representación de la pieza E, con un cubito blanco adelantado, con el cubito blanco que se ve en la figura (paralelepípedo rectángulo) puede llevar a los alumnos a una solución equivocada.

Los cubos que componen cada una de las piezas se unen por caras completas (no se aceptan uniones por vértices). La perspectiva de la pieza E hace que sólo se vean tres cubos, característica que puede provocar que esa pieza sea descartada a causa de no visualizar uno de ellos, al no tener en cuenta la propiedad anterior.

Hipótesis $H2_{It3}$: No explicitar en el enunciado que las piezas que se dan como opciones que se pueden girar puede crear conflictos a los estudiantes y aumentar su dificultad.

4.4.3.4. Dualidad Ostensivo - No ostensivo

La tarea pide determinar cuál de las opciones que se dan se corresponde con la pieza blanca que forma el paralelepípedo. La noción de paralelepípedo rectángulo (objeto no ostensivo) se apoya de manera ostensiva en un dibujo en perspectiva.

Las entidades ostensivas dadas por las representaciones en perspectiva de todas piezas, menos la blanca, nos permitirá formar una imagen (entidad no ostensiva) de la pieza blanca que podemos contrastar con las opciones que nos da la tarea (objetos ostensivos). La solución también puede partir de hacer ostensivos todos los pasos para llegar a deducir cómo es la pieza blanca. Esto se consigue utilizando cortes de nivel en cualquiera de los sentidos o bien realizando la representación de las diferentes vistas ortogonales del paralelepípedo.

Hipótesis $H3_{It3}$: La resolución de la tarea a través de métodos no ostensivos dificultará la obtención de la solución correcta. Esto indicará que los alumnos no están habituados a crear imágenes mentales y manipularlas en la mente.

4.4.3.5. Dualidad Personal – Institucional

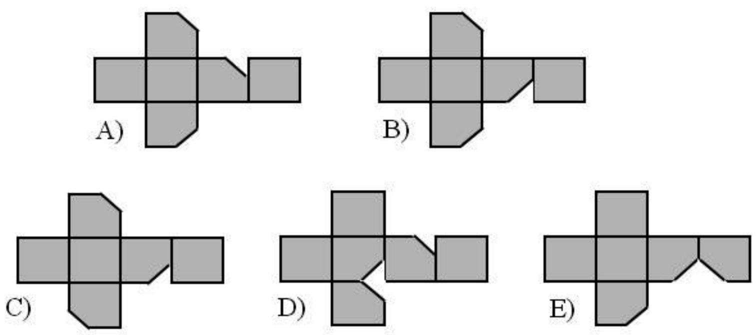
El significado institucional de paralelepípedo rectángulo no es cotidiano para nuestros alumnos, lo que implica que su significado personal se limite a la imagen que se da en el enunciado.

Por otra parte, las estrategias utilizadas para la resolución de la tarea, observadas en la muestra, dejan patente que no hay un trabajo muy definido en relación con las diversas representaciones planas de objetos tridimensionales, ni con los dibujos en perspectiva, ni con cortes de figuras tridimensionales. Estas actividades no son habituales en la institución escolar de referencia.

Haber trabajado con bloques multilink, cubo SOMA u otro tipo de material manipulable favorecería enormemente la resolución de esta tarea.

4.5. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 4: DESARROLLO DEL CUBO SIN VÉRTICE

Cortamos una esquina de un cubo. ¿Cuál de los desarrollos planos que se muestran corresponde al cuerpo resultante?



4.5.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) Visualizar mentalmente un cubo.
2) Cortar mentalmente uno de sus vértices, creando una imagen mental del sólido resultante. Mantener esa imagen en la mente.

3) Montar parcialmente los sólidos a partir del desarrollo, comenzando por las uniones en las que hay aristas con cortes.
4) Descartar aquellos desarrollos en los cuales coincidan aristas cortadas, con aristas sin cortar.
5) Sólo queda la opción E).
6) Plegar mentalmente la opción E), observando que coinciden aristas de igual longitud.
7) Comprobar que al plegar dicha opción se tiene la imagen mental de un cubo con un vértice cortado.

4.5.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal (términos y expresiones): vértice, cubo, desarrollos planos, cuerpo resultante, mostrar, corresponder.
  - Gráfico: 5 desarrollos planos formados por 3 cuadrados completos y otros 3 a los que falta una esquina.
  - Simbólico: A), B), C), D), E)
- Conceptos
  - Previos: Vértice, cubo, pentágono, lado, triángulo, desarrollo plano, arista, cuadrado, cuerpo espacial, perspectiva.
  - Emergentes: Poliedros truncados, ángulo poliedro, intersección de planos.
- Propiedades/Proposiciones
  - Previas: Todas las caras de un cubo son iguales. Todas las caras de un cubo son cuadrados. Todas las aristas de un cubo tienen la misma longitud. Un cubo tiene 12 aristas. En un cubo confluyen tres caras en cada vértice. El corte de un plano a uno de los vértices de un cubo afecta tres caras adyacentes. Un cubo tiene distintos desarrollos planos. El desarrollo plano de un sólido es un tipo de representación plana que respeta la forma y la magnitud de las caras y las aristas, manteniendo también las relaciones métricas (en dos dimensiones). En un desarrollo plano varios puntos del plano pueden ser imagen del mismo punto en el espacio.
  - Emergente: El desarrollo plano del cubo sin vértice es el E).
- Procedimiento

- Montar (mentalmente) los sólidos a partir de los desarrollos dados, comenzando por las uniones en las que hay aristas con cortes.
- Descartar aquellos desarrollos en los cuales coincidan aristas cortadas, con aristas sin cortar.

- Argumento: Todos los desarrollos planos de las opciones se corresponden con un hexaminó que al plegarlo forma un cubo. Como en un cubo confluyen tres caras en cada vértice, al cortar uno quedarán cortadas tres de sus caras adyacentes. Eso indica que aquellos desarrollos planos en los que una arista cortada es adyacente a una arista completa quedan descartados. En base a esa proposición (condición necesaria pero no suficiente) se descartan todos menos el E). La solución es ese desarrollo ya que al plegar mentalmente las caras, aquellas que contienen las tres aristas cortadas se unen formando una cara triangular.

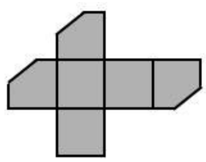
4.5.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

4.5.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular-general)

Utilizar el cubo como sólido a desarrollar supone utilizar una de las figuras más conocidas por los estudiantes y quizás uno de los pocos desarrollos planos que son capaces de reconocer. En la tarea propuesta se elige uno de los desarrollos planos del cubo más característico (en forma de cruz) y, además, es el mismo en todas las opciones de respuesta que se proponen. El objetivo de la tarea es la reconstrucción mental no ostensiva del cubo para comprobar si coinciden los cortes, partiendo de que el desarrollo presentado siempre da lugar, al montarlo, a un cubo.

Se puede dar una condición suficiente para este ítem: "Si al menos una cara cortada del desarrollo comparte una de las aristas cortadas con otra cara que no está cortada, ese desarrollo no es la solución". De esta manera se pueden descartar todos los desarrollos que tengan una situación de ese tipo. En la tarea que tenemos todos los caso excepto el E) están en esa situación. No es condición necesaria, como se muestra en la Figura 4.4.

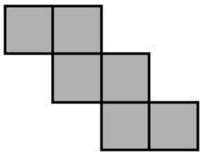
Figura 4.4. Condición no necesaria



A continuación se describen algunas variables de tarea que se pueden considerar en este ítem:

a) Dar diferentes desarrollos planos del cubo. Se puede observar que algunos desarrollos planos presentan mayor dificultad que el proporcionado en el enunciado (Figura 4.5).

Figura 4.5. Desarrollo del cubo en forma de escalera



b) Presentar diferentes desarrollos planos, incluyendo alguno imposible, es decir, que no de lugar a un cubo (esto equivale a trabajar con todos los hexaminós que existen).

c) Incluir caras figurativas. Ello requeriría incluir en el enunciado la representación de un cubo con el vértice truncado. La tarea supondría que no sólo sería necesario comprobar la condición necesaria para el vértice, sino también si el desarrollo corresponde al cubo presentado con la disposición de las figuras en perfecto orden. Este tipo de situaciones supondrían un nivel más de dificultad al tener en cuenta dos factores: la construcción del cubo y la situación de los cortes. Sin embargo, se podría pensar que el primer factor puede utilizarse para discriminar desarrollos.

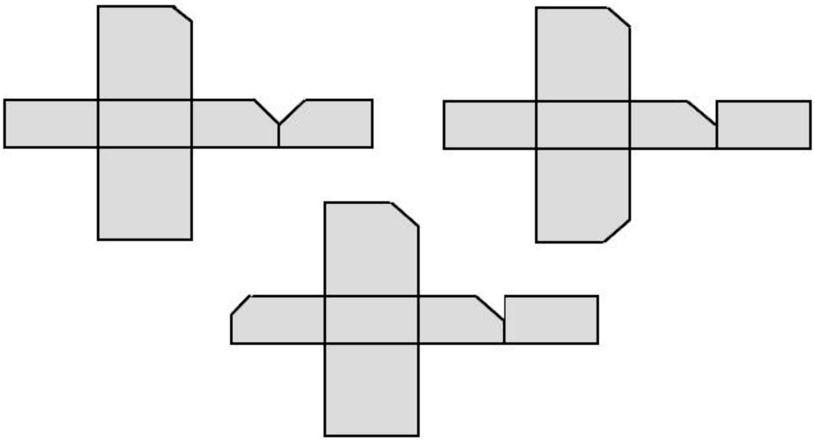
d) Truncar el cubo por más de un vértice, separados o juntos. Incluso proponer el desarrollo de un cubo con todos los vértices truncados, en este caso habría que decidir si el corte se hace a mitad de la arista o a un tercio (cuboctaedro o cubo truncado).

e) Incluir varias opciones válidas.

f) Plantear la tarea con el tetraedro regular o con cualquiera de los demás sólidos platónicos.

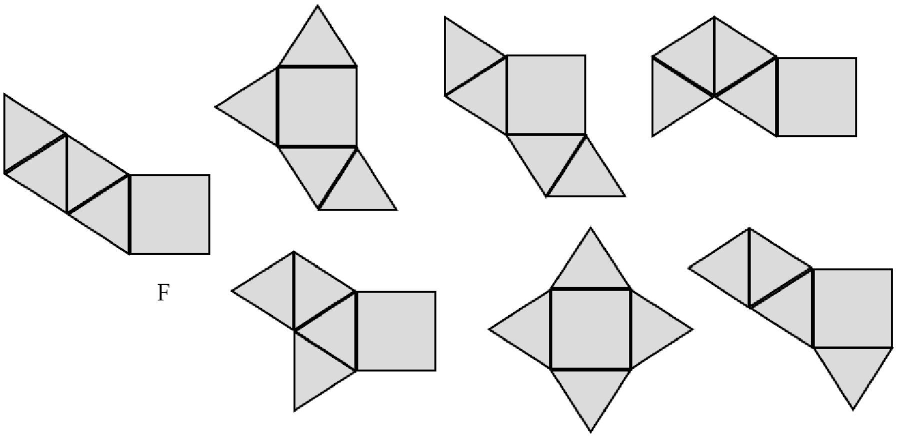
g) Tomar un poliedro que mantenga ciertas características similares a un cubo (por ejemplo, prisma recto de base rectangular). La situación es similar a la de la tarea propuesta. Se ha perdido la condición de ser regular, sin embargo visualmente, los desarrollos planos de la figura mantienen un gran parecido con los del cubo presentado en el ítem 4 (Figura 4.6).

Figura 4.6. Desarrollos prisma recto de base rectangular con un vértice cortado



h) Considerar otro tipo de poliedro que, aún no cumpliendo con las características anteriores (ser regular o bien ser un ortoedro), pueda resultar relativamente sencillo (por ejemplo, una pirámide de base cuadrangular). Se puede elegir uno de los desarrollos planos y situar los cortes o bien jugar a la vez con los seis desarrollos (Figura 4.7) y con la situación de vértices. En este caso, al no ser un poliedro regular, sería necesario indicar qué tipo de vértice se corta ya que determinaría el número de caras que se ven afectadas (3 o 4) y el tipo de las mismas (cuadrado o triángulo). Se podrían añadir desarrollos que no formaran el poliedro (desarrollo F).

Figura 4.7. Desarrollos de una pirámide cuadrangular



4.5.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

El cubo (su evocación) y cada uno de los desarrollos planos del mismo que aparecen lo hacen desde su vertiente de objetos unitarios. A su vez el cubo se puede ver como un sistema físico formado por cada uno de sus elementos constituyentes: vértices, aristas y caras.

El cubo con el vértice cortado se puede ver como una entidad sistémica formada por una serie de componentes (aristas, caras y vértices) pero, simultáneamente, es una entidad unitaria en sí mismo. Dadas las representaciones gráficas de los desarrollos planos del cubo parece útil pensar en dichas figuras como sistemas formados por seis elementos (cuadrados y pentágonos) dispuestos de una forma determinada en cada uno de ellos.

Al cortar (de forma no ostensiva u ostensiva) uno de los vértices del cubo, este también aparece como un sistema en el que, por un lado, está la parte que se extrae (pirámide triangular) y, por otro, la figura que resulta de quitarle al cubo esa pirámide. Para resolver la tarea es imprescindible establecer las relaciones que existen entre una y otra parte.

4.5.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

Los diferentes objetos que aparecen, cubo, vértice, desarrollo plano del cubo y corte, son familiares para los alumnos, lo que "a priori", hace suponer que no se presentarían conflictos entre expresión y contenido. De hecho, la tarea es interpretada correctamente por la mayoría de los sujetos muestrales, a pesar de que, en algunos casos, la acción mental de recomponer un cubo a partir de un desarrollo plano les resulte difícil.

El enunciado de la tarea no recoge de forma ostensiva qué tipo de corte se hace ni a qué distancia del vértice, pero se hace ostensivo mediante las representaciones gráficas de los distintos desarrollos, aunque sin ser explicitado en el enunciado escrito, lo que puede dar lugar a algunas dificultades a la hora de resolver el problema.

4.5.3.4. Dualidad Ostensivo – No ostensivo

El problema hace referencia a un objeto no ostensivo y a una acción sobre el objeto de la que tampoco se da una representación ostensiva. Sí se proporcionan de manera ostensiva varios posibles desarrollos planos del objeto evocado, para decidir cual de ellos corresponde al cubo con un vértice cortado.

De hecho, el no hacer ostensiva la inclinación del plano que provoca el corte, y el vértice del cubo en el que se realiza, puede originar diferentes conflictos en los estudiantes, a la hora de resolver la tarea: ¿tiene que ser uno concreto o no depende del vértice elegido? O bien, ¿cómo se realiza el corte? De ahí que muchos sujetos necesiten hacer ostensiva la situación de partida (hacer un representación gráfica de un cubo con un vértice cortado).

La reconstrucción de los cubos para ver si coinciden o no los cortes en un único vértice pasa por un proceso mental (no ostensivo) en el que cada individuo utiliza la información que proviene de sus experiencias anteriores con objetos físicos parecidos. El hecho de que no sea posible hacer ostensiva esta reconstrucción dificulta bastante la argumentación de los alumnos.

También se pueden dar argumentaciones basadas en la situación de los cortes para discriminar. Sin embargo el proceso de montar los cubos (proceso no ostensivo) es necesario.

4.5.3.5. Dualidad Personal – Institucional

El trabajo con cubos, como sólido tridimensional, es muy utilizado en la comunidad educativa en casi todos los niveles y en muy variados contextos. Es una figura conocida por el alumnado y con la que están acostumbrados a trabajar. Lo mismo ocurre con el desarrollo plano presentado, que no resulta nuevo para ellos. Se encuentran ante una situación familiar y eso parece darles seguridad a la hora de dar una respuesta.

Lo que no es tan habitual en la institución escolar es trabajar con sólidos truncados (salvo el cono y pirámide) y con sus respectivos desarrollos planos. Además, la mayoría de los problemas con este tipo de figuras están más encaminados al tratamiento métrico que al conocimiento de la forma.

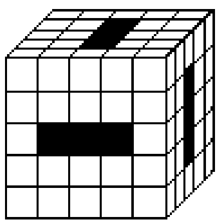
Hipótesis H1$_{It4}$: Dadas las características del tipo de sólido (un cubo) y el desarrollo plano elegido, la tarea va a resultar fácil a los estudiantes de magisterio.

El trabajo con material manipulativo podría ayudar a desarrollar competencias para resolver tareas de este tipo (construcción de sólidos tridimensionales, cortes de figuras y actividades donde estén involucrados desarrollos planos de figuras). La ayuda de software apropiado como el programa informático Poly puede ser interesante para favorecer este tipo de actividades.

4.6. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 5: CUBO PERFORADO

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



4.6.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.

2) Tomando el cubo pequeño como unidad, el volumen del cubo grande es 125 unidades $5 \times 5 \times 5 = 125$.

3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades ($3 \times 5 \times 1 = 15$).

4) Sin embargo existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a 125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.

5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, $15 - 3 = 12$.

6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar $15 - 3 - 3 + 1 = 10$

7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será, $15 + 12 + 10 = 37$, y el volumen del cubo con los túneles será, $125 - 37 = 88$.

4.6.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal (términos y expresiones): Hacer, túneles, atravesar, cubo, grande, pequeño, quedar, indicar, ortoedro, unidades, intersecciones. “Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande”.
  - Gráfico (Icónico): Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos y tres túneles que lo atraviesan”.
  - Simbólico: $5 \times 5 \times 5 = 125$; $3 \times 5 \times 1 = 15$; $15 - 3 = 12$; $15 - 3 - 3 + 1 = 10$; $15 + 12 + 10 = 37$; $125 - 37 = 88$
- Conceptos/ definiciones
  - Previos: cubo, arista, lado, vértice, cuadrado, volumen, unidad de medida de volumen, perspectiva, cuerpo espacial, ortoedro.

- Emergentes: volumen de un sólido perforado, intersección de ortoedros, representación por niveles, vistas ortogonales.

- Propiedades/ proposiciones
  - Previas: El volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista. El volumen como producto de tres dimensiones. El volumen es una magnitud sumativa. Los cubitos unidad se unen por caras completas. Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos. Propiedades de las operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación).
  - Emergente: En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 88.
- Procedimiento
  - Calcular el volumen total del cubo grande a través de la fórmula del volumen de un cubo (arista^3).
  - Calcular el volumen de cada túnel (ortoedro) a través de la fórmula del volumen de un ortoedro $(\text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto})$.
  - Descontar los cubitos que coincidan como parte de varios túneles.
  - Restarle al volumen total del cubo grande el volumen ocupado por los túneles teniendo en cuenta las intersecciones de los mismos.
- Argumento: Teniendo en cuenta que el cubo de $5 \times 5 \times 5 = 125$ unidades (cubito unidad) está formado por el cubo perforado y los túneles y que el volumen es una magnitud sumativa, el volumen del cubo perforado será el volumen del cubo entero menos el volumen de los túneles (considerando las intersecciones entre ellos). De ahí se deduce que el volumen del cubo perforado es de 88 unidades.

4.6.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

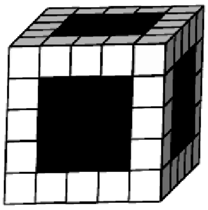
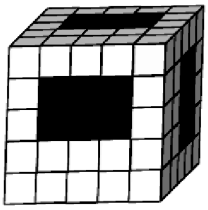
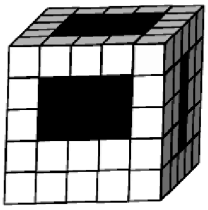
4.6.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular– general)

La tarea se puede generalizar y modificar de diversas maneras:

a) Situación A. Se mantienen las mismas dimensiones del cubo dado en este ítem pero se varía la dimensión de los túneles así como la condición de que sean iguales entre sí (Figura 4.8).

Figura 4.8. Cubos perforados con túneles de diferentes dimensiones

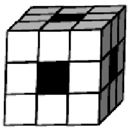
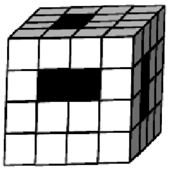
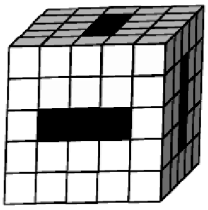
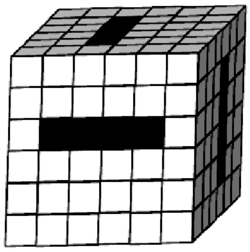
Túneles de $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ Túneles de $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ Túneles de $\mathbf{2} \times \mathbf{3}; \mathbf{1} \times \mathbf{3}\ ;\ \mathbf{3} \times \mathbf{3}$

b) Situación B. Suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, de $(\mathrm{L}-2) \times 1$ unidades. La fórmula que nos daría el número de cubitos del cubo perforado de $\mathrm{L} \times \mathrm{L} \times \mathrm{L}$ cubitos unidad sería: $\mathrm{L}^3 - 3\mathrm{L}^2 + 9\mathrm{L} - 7$ (Figura 4.9).

Figura 4.9. Cubos de arista L y túneles de dimensiones $(\mathrm{L}-2) \times 1$

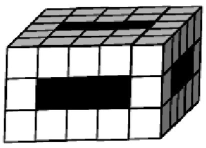
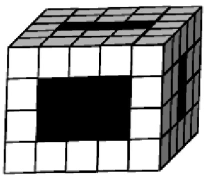
20 cubitos **45** cubitos 88 cubitos 155 cubitos

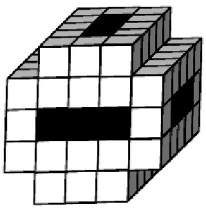
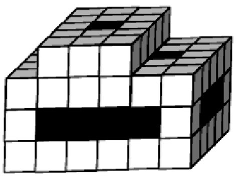
c) Situación C. Variar el tipo de figura utilizada (Figura 4.10).

Figura 4.10. Otro tipo de construcciones

Ortoedros

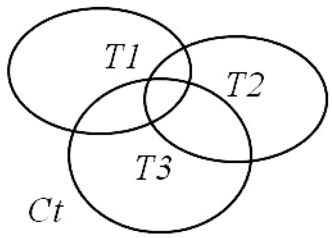
Otro tipo de figuras

4.6.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

Las nociones de cubo, ortoedro (túneles), así como las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forman un sistema). Si simbolizamos por *Ct* (cubo tunelado o cubo perforado), *C* (cubo), *T1, T2, T3* los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar con la siguiente operación conjuntista:

$$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$$



A su vez, el cubo tunelado forma un todo unitario a partir del cual se pueden deducir una serie de propiedades. Esa visión unitaria proviene de establecer las relaciones necesarias entre sus diferentes componentes.

Hipótesis $H1_{It5}$: Las relaciones que se establecen entre las diferentes partes del sistema y el sistema son determinantes para la resolución de la tarea.

4.6.3.3. Dualidad Expresión – Contenido (significante – significado)

El uso de representaciones conjuntistas y algebraicas puede ayudar a visualizar el problema y a generalizarlo. La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas: $\mathrm{C} = \mathrm{Ct} \cup (\mathrm{T1} \cup \mathrm{T2} \cup \mathrm{T3}) - (\mathrm{T1} \cap \mathrm{T2}) - (\mathrm{T1} \cap \mathrm{T3}) - (\mathrm{T2} \cap \mathrm{T3}) + (\mathrm{T1} \cap \mathrm{T2} \cap \mathrm{T3})$

La acción a realizar (conteo) parece estar clara para los estudiantes de la muestra. Por otra parte, la expresión "se hacen túneles que atraviesan" contrasta con el dibujo del cubo perforado presentado en el enunciado. Esta representación ostensiva del cubo tunelado permite ver sólo tres de las caras con la entrada de los tres túneles correspondientes y no su salida.

Hipótesis $H2_{It5}$: La expresión del problema mediante un dibujo en perspectiva, sin señalar las intersecciones interiores ni las salidas ocultas de los túneles, es otro factor de dificultad potencial.

4.6.3.4. Dualidad Ostensivo – no ostensivo

El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático); en ambos casos es una entidad no ostensiva. La regla general que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que, en sí misma, no es ostensiva, aunque se expresa de manera ostensiva con la escritura simbólica, 125 – 15 – 12 – 10 = 88.

Las intersecciones que se producen entre los tres túneles son acciones mentales que no tienen una representación gráfica ostensiva en el enunciado. Una manera de hacer una representación ostensiva no simbólica de dichas intersecciones es a través de la representación por niveles.

Hipótesis $H3_{It5}$: El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema.

4.6.3.5. Dualidad Personal – Institucional

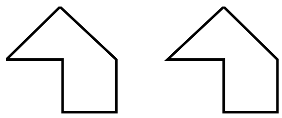
La tarea requiere poner en juego las nociones de cubo, volumen de un cuerpo, unidad de medida de volumen. En el caso de la noción de cubo pensar en este objeto en términos de los elementos que lo constituyen puede ser un obstáculo para la resolución de la tarea.

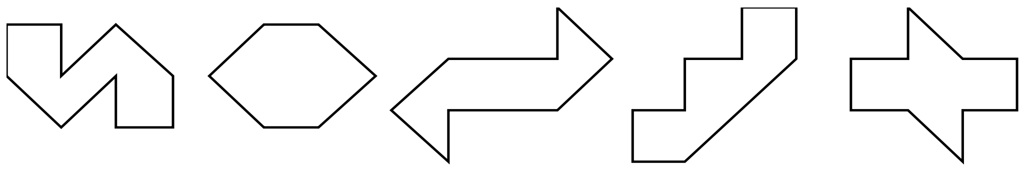
Considerando continente y contenido como dos situaciones distintas de una misma cualidad de los cuerpos “ocupar espacio” hay que distinguir entre capacidad como espacio creado y volumen como espacio ocupado. Esta relación entre capacidad y volumen es muy complicada, además, los usos que se pueden derivar del concepto de volumen varían según se opte por una concepción unidimensional en la que no se puede contar más de una vez la misma unidad de medida, o por una concepción tridimensional en donde la medida será el resultado del producto de tres dimensiones (Del Olmo, Moreno y Gil, 1989).

Hipótesis $H4_{It5}$: El significado personal puede tener limitaciones sobre las nociones de cubo, de volumen y unidad de medida del volumen.

4.7. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 6: COMPONER FORMAS CON DOS PIEZAS IGUALES

Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa. ¿Qué figura NO podremos formar con estas dos piezas?





A B C D E

4.7.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) Observar que el enunciado dice implícitamente que no se permite formar las figuras con una pieza simétrica de las piezas dadas.
2) Dividir cada pieza en dos partes congruentes con las piezas dadas.
3) Mover mentalmente las piezas iniciales para formar cada una de las figuras.
4) Analizar qué tipo de movimientos llevan a la colocación de las piezas para formar cada figura.
5) Todas las figuras, excepto la D, se pueden formar girando y trasladando las dos piezas dadas.
6) Para formar la figura D hay que utilizar una pieza simétrica de una de las piezas dadas. Por tanto esa figura no se puede construir con las dos piezas dadas. Habría que aplicarle una simetría a una de las piezas para hacerlo (físicamente habría que levantar una de las piezas de la mesa para obtener la pieza en la forma necesaria para formar la figura).
7) Comprobar que hay una única solución.

4.7.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguaje
  - Verbal (términos y expresiones): Tener, piezas, idénticas, mover, figura, formar, giros, traslaciones, simetría axial. "Sin levantar de la mesa".
  - Gráfico: Dos piezas idénticas. 5 figuras diferentes que se pueden formar o no con esas dos piezas idénticas.
  - Simbólico: A, B, C, D, E.
- Conceptos
  - Previos: Lado, ángulo recto, teselas, figura geométrica plana (cóncava, convexa, regular e irregular), simetrías, giros y traslaciones en el plano, área, unidad de medida de área.
  - Emergentes: Orientación de una figura, movimientos directos e inversos.
- Propiedades/Proposiciones
  - Previas: Los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras. Las simetrías cambian la orientación, son movimientos inversos. La simetría axial está asociada a la acción de levantar una pieza del plano. Las teselas se unen por lados de la misma longitud.
  - Emergente: La figura que no se puede formar sin levantar una de las piezas dadas es la D.
- Procedimiento
  - Mover mentalmente, aplicando movimientos de traslación y giro, las dos piezas iniciales para formar cada una de las figuras.
- Argumento: El enunciado afirma que no está permitido levantar las piezas de la mesa, lo que quiere decir que no es posible componer las figuras con una pieza que sea la simétrica de una de las piezas dadas. La figura buscada es aquella que para su construcción necesita de la aplicación de una simetría axial a alguna de las piezas de partida. Se identifican en cada una de las figuras las dos piezas. Una vez hecho eso se analiza qué movimiento (giros y traslaciones) de las piezas tal y como están en el enunciado lleva a la posición para formar dichas figuras. La solución es la D porque es la única figura de las dadas que no se puede formar mediante giros o/y traslaciones de las piezas dadas. Es necesario que una de ellas sea la simétrica de la otra. Por tanto para construirla se necesita levantarla de la mesa (voltearla).

4.7.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

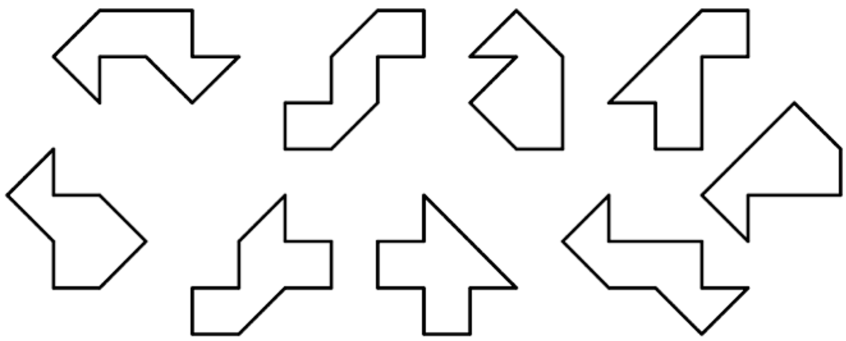
4.7.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular – general)

Se podría generalizar la solución diciendo que siempre que la figura tenga un "pico" mirando hacia la derecha, esa figura no se puede construir con las dos piezas idénticas que se ofrecen, sin levantar una de ellas de la mesa. En el caso de que no se perciban alguno o los dos "picos" (casos A, B, D), tendríamos que encontrar las dos piezas que componen cada figura, para observar si alguna de las piezas es simétrica de la otra respecto de un eje, en cuyo caso no respetaría las condiciones de la tarea.

Generalizaciones y variables de tarea:

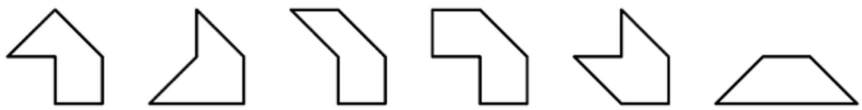
a) Añadir más figuras formadas por dichas piezas (Figura 4.11) (sin restricción).

Figura 4.11. Más figuras construidas con las dos piezas



b) Tener dos piezas distintas (de igual área o no), que mantengan medidas iguales para que al componerlas encajen por alguno de sus lados. Algunas de ellas se muestran en la Figura 4.12.

Figura 4.12. Otras piezas posibles

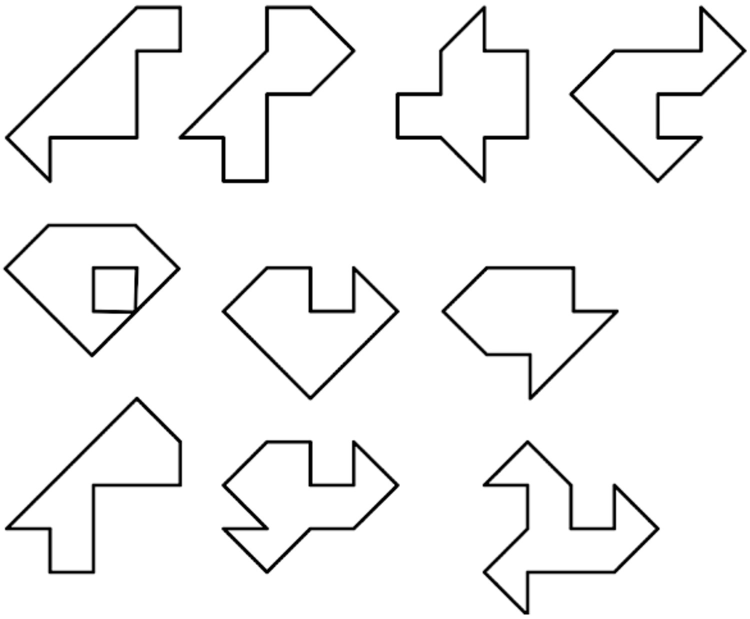


De esta manera se pueden considerar dos figuras simétricas para componer figuras, una simétrica y la otra no, las dos no simétricas (como en el caso de este ítem), con la misma área, etc.

c) Incluir como opciones de respuesta figuras imposibles de formar con las dos piezas.

d) Construir figuras con tres piezas iguales, con cuatro, etc. En la construcción de figuras con tres piezas pueden surgir figuras con una o más piezas simétricas a las piezas dadas (Figura 4.13).

Figura 4.13. Algunas figuras construidas con tres piezas iguales

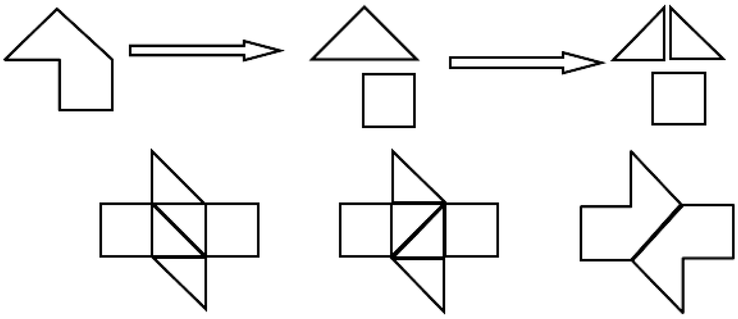


e) Seleccionar otro tipo de figuras cuya base no fuera un triángulo rectángulo isósceles, ya que todas las figuras que aparecen arriba se construyen a base de triángulos de ese tipo para favorecer la unión de las piezas a la hora de formar las figuras.

4.7.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

Cada una de las dos piezas se podrían ver como un sistema formado por un cuadrado y un triángulo isósceles rectángulo, o bien como un sistema de dos triángulos rectángulos isósceles iguales (de área la mitad del anterior) y un cuadrado (Figura 4.14). Sin embargo, en este caso es fundamental ver cada una de las piezas como un todo unitario ya que, al descomponerlas, podemos recolocar las diferentes partes para formar las distintas figuras de manera que se pierda el carácter unitario de cada una de las piezas dadas, necesario para llegar a la solución.

Figura 4.14. Descomposición de las piezas dadas



Las figuras que se presentan son objetos unitarios en sí mismos, pero también son sistemas formados, en este caso, por dos piezas. La construcción de esas figuras con las dos piezas ha de respetar una condición impuesta en el enunciado. En el caso de considerar cada pieza divida en dos subpiezas (triángulo isósceles y cuadrado), todas las figuras podrían formarse sin levantar ninguna pieza de la mesa pues las dos subpiezas son figuras simétricas.

Hipótesis H1$_{It6}$: La descomposición de las piezas en otras más pequeñas actuando de manera independiente y no como un todo pueden conducir a soluciones erróneas.

4.7.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

Es fundamental la representación gráfica de las dos piezas idénticas, pues nos está informando de que las dos piezas de partida se encuentran en esa posición concreta. En la información dada en el enunciado si sólo se presentara una pieza, podría interpretarse que lo que se solicita es encontrar si las figuras que se muestran como opciones de respuesta, están o no formadas por dos piezas iguales a la dada.

La expresión "mover sin levantar de la mesa" puede provocar conflictos en la resolución de la tarea. Se ha elegido esa expresión para evitar la palabra simetría y hacerlo más coloquial, sin embargo dicha expresión también puede interpretarse como "no solapar las piezas" para lo que tendríamos que levantar una de ellas de la mesa.

Por otra parte, en el enunciado no se expresa, de forma explícita, que las piezas, se unen por lados de igual longitud y sin que se solapen.

Hipótesis H2$_{It6}$: La estructura del enunciado (frase, punto, frase interrogativa) puede hacer que el sujeto centre su atención el verbo "formar" y en consecuencia tener dificultades para completar la tarea.

4.7.3.4. Dualidad Ostensivo - No ostensivo

Las piezas, así como las posibles figuras que se pueden formar nos vienen dadas de forma ostensiva mediante una representación gráfica. El camino para ir de las piezas a las figuras se apoya básicamente en acciones mentales (no ostensivas), pero podemos ayudarnos haciendo ostensiva la partición de las figuras en las dos piezas idénticas dadas, aunque esto sería precedido por el proceso mental de visualizarlas. Todo tipo de movimiento para formar las figuras a partir de las piezas es realizado de forma mental, no ostensiva, movilizándose imágenes dinámicas.

Hipótesis $H3_{It6}$: El carácter no ostensivo de la formación de las figuras con las dos piezas puede crear errores y dificultades a los estudiantes.

Hipótesis $H4_{It6}$: La realización de movimientos (giros, traslaciones, simetrías) de forma no ostensiva aplicados a las piezas supone una dificultad considerable para nuestros alumnos.

La visualización de algunas de las figuras (A o B) puede no concordar con la imagen mental (elemento no ostensivo) que podemos crear uniendo las dos piezas (en el caso A se percibe una zona que parece demasiado "estrecha" para haberse formado con las dos piezas dadas).

4.7.3.5. Dualidad Personal – Institucional

La idea personal de concepto de simetría axial no parece estar ligada a la expresión "levantar del plano", sino al de un movimiento realizado en el plano, a la de una transformación realizada sobre una figura dada. En el plano institucional el concepto de simetría axial está asociado a una transformación en el plano que invierte la orientación. Para realizarla físicamente tenemos que salir de él (Jaime y Gutiérrez, 1996).

Las actividades realizadas en la institución escolar relacionadas con las simetrías axiales no suelen salir del contexto formal, de la aplicación y comprobación de las propiedades que las definen (contexto puramente matemático). Se echan en falta actividades relacionadas con el reconocimiento de esta transformación que determinen que se trata de ese movimiento en concreto y no de una traslación o giro.

Hipótesis $H5_{It6}$: Podemos conjeturar que la acción "levantar de la mesa" no será asociada a una simetría axial lo cual podrá ser una explicación de la dificultad de la tarea.

4.8. MODELO EPISTÉMICO DE REFERENCIA DEL ÍTEM 7: GENERACIÓN DE CUERPOS MEDIANTE ROTACIONES EN EL ESPACIO

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras respecto de los ejes que se indican.

4.8.1. SOLUCIÓN EXPERTA

1) Observar si las figuras tocan o no al eje alrededor del cual van a girar y en qué punto o puntos lo hacen.
2) Observar que cada punto de la figura original recorre una circunferencia con centro en la intersección del eje de giro con el plano perpendicular al eje que contiene a dicho punto.
3) Imaginar, a continuación, la rotación de la figura completa.
4) Considerar los posibles huecos que pueden quedar.
5) Dibujar los cuerpos resultantes tal como pide el enunciado. En el caso A) tendremos un tronco de cono al que se le quita un cono invertido. En el caso B) tendremos una esfera achatada por lo polos con un agujero en el centro en forma de otra esfera achatada por los polos (Figura 4.15).

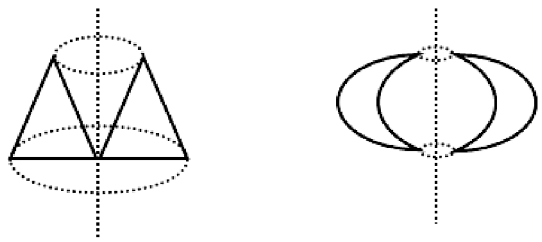
4.8.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS

- Lenguajes
  - Verbal (términos y expresiones): Dibujar, forma, cuerpos, obtener, girar, aproximada, figuras, ejes, indicar, distancia a los ejes, hueco, “hacer girar las figuras respecto de los ejes”.

- Gráficos: Dibujo de un triángulo isósceles y un eje vertical que pasa por el vértice situado más a la derecha. Otro dibujo de una lúnula y un eje a corta e igual distancia de los extremos inferior y superior de la misma.
- Simbólico: A), B)

- Conceptos
  - Previos: Triángulo, cuerpos espaciales, girar en el espacio, ejes de giro, perspectiva, vértice, volumen, distancia al eje, figura geométrica plana, trayectoria, circunferencia, movimientos rígidos en el espacio.
  - Emergentes: Figuras de revolución, hueco, puntos fijos, agujero, cono, tronco de cono, esfera achatada por los polos, vistas ortogonales, representación por niveles.
- Propiedades/Proposiciones
  - Previas: Un giro de una figura alrededor de un eje mantiene la distancia de la figura a dicho eje. Los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras. Los sólidos de revolución tienen infinitos planos de simetría.
  - Emergentes: Los sólidos representados en la Figura 4.15.

Figura 4.15. Representación plana de los sólidos de revolución que se obtienen



- Procedimiento
  - Hacer girar mentalmente, sobre un plano perpendicular al eje de rotación, cada punto de cada una de las figuras planas dadas.
  - Dibujar una representación plana (vistas ortogonales, representación por niveles, perspectiva) de las imágenes mentales creadas (sólidos de revolución) tal como pide el enunciado. Por ejemplo trazando las figuras simétricas de las dadas y la trayectoria de algunos de los puntos del contorno de la figura para conferir un aspecto tridimensional a la figura (Figura 4.15).
- Argumento: En cualquiera de los dos casos, al hacer girar la figura plana respecto a los ejes respectivos, cada punto de la figura original recorre una

trayectoria que es una circunferencia con centro en la intersección del eje de giro con el plano perpendicular al eje que contiene a dicho punto.

En el caso de la figura A, se tiene un único punto fijo (vértice inferior derecho del triángulo), lo que da lugar a que la figura tenga un hueco en su interior de altura la altura del triángulo original. El resultado de la revolución en la figura A) sería un tronco de cono al que se le quita un cono invertido cuya base es la base superior del tronco y su vértice es el centro de la base mayor del tronco de cono. La solución aparece realizando una imagen mental. El lado exterior (el más alejado del eje) formaría la superficie lateral de un tronco de cono. La base del triángulo dará lugar a un círculo que será la base del tronco de cono y de la figura final obtenida. El lado del triángulo que toca al eje formaría al girar el cono invertido que forma el hueco central de la figura.

En la figura B), el hecho de que la figura esté alejada del eje (no tiene puntos fijos) dará lugar a una figura "con agujero". Para configurar el sólido de revolución obtenido, se visualizan las superficies que obtendría al hacer girar cada una de las dos curvas que forman dicha figura ("luna"). Estas superficies delimitarán el sólido final.

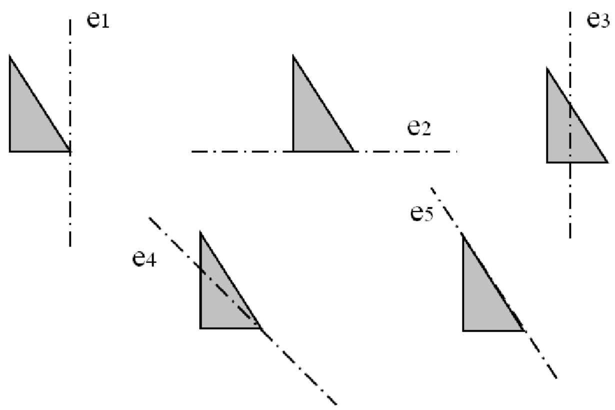
La curva exterior daría lugar a una especie de "esfera achatada" con dos huecos circulares en cada polo, de radio igual a la distancia del vértice de la lúnula al eje de giro. La curva interior da lugar al hueco que tendría un sólido macizo formado por la superficie exterior, con forma de tubo (cuyos extremos son las circunferencias citadas antes) que se ensancha en su parte central por efecto de la curvatura de la forma inicial (Figura 4.15).

4.8.3. RELACIONES ONTOSEMIÓTICAS

4.8.3.1. Dualidad Extensivo – Intensivo (particular – general)

Para ir de lo particular a lo general, se deben aplicar las propiedades de los giros en el espacio, respecto de un eje. Podemos modificar las condiciones del problema, de varias formas:

a) Variar la posición del eje.



b) Giro alrededor de dos ejes.

c) Aplicar el procedimiento del enunciado a otro tipo de figuras.

En general, se puede establecer que si la figura no toca al eje (no tiene puntos fijos) se producirá un hueco con orifico de salida y entrada (un “agujero”), si la figura toca en un punto al eje sólo habrá hueco sin orificio de salida, si lo toca en varios puntos, los huecos pueden ser “internos”, sin orificios de entrada o salida.

4.8.3.2. Dualidad Unitario – Sistémico

Cada una de las figuras planas que se presentan es un todo unitario al que hay que aplicar un movimiento continuo alrededor del eje. Esa acción sobre la figura va produciendo un cambio de posición en el espacio y el conjunto continuo formado por la sucesión de esas nuevas figuras en posiciones diferentes da lugar al sólido resultante. Podríamos entenderlo como un continuo de la misma figura siguiendo el sentido del giro alrededor del eje dado.

Las dos situaciones se tienen que analizar desde un punto de vista en el que las figuras y los respectivos ejes forman un sistema que depende de la figura, el eje y la relación entre ambos (si toca o no al eje, el número de puntos que tocan al eje, la distancia al eje, etc). Todo ese carácter sistémico es el que determina la resolución de la tarea.

La representación ostensiva de los sólidos que se generan puede darse a través de la representación ortogonal, por niveles o vistas codificadas. Cualquiera de las vistas (perfil, planta y alzado) o de los niveles son partes de un sistema cuyas partes es necesario coordinar para conformar un todo unitario (las figuras espaciales generadas).

Hipótesis $H1_{It7}$: No tener en cuenta el carácter sistémico de la realización de la tarea (figura, eje y distancia al eje) conducirá a soluciones erróneas.

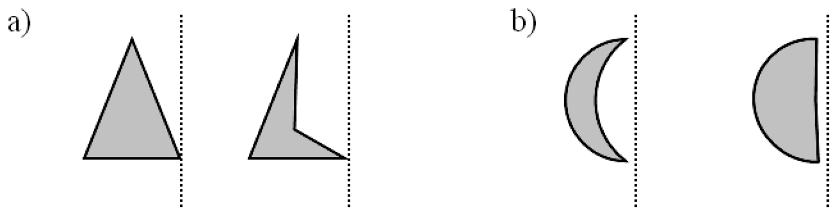
4.8.3.3. Dualidad Expresión – Contenido

La palabra "espacio" aparece en el título del ítem pero no en el enunciado. Esto puede provocar que se interprete la palabra girar erróneamente, lo cual unido al efecto visual que provocan los ejes, en ambas situaciones, haga que se aplique una simetría axial a cada una de las figuras presentadas en lugar del movimiento pedido.

Tanto en el caso A) como en el B) la situación de los ejes con respecto a la figura está dando información relevante para la construcción de los sólidos resultantes. Esta información, que es visual, ha de ser captada por el sujeto que realiza la tarea.

La tarea solicita que se dibujen de forma aproximada los sólidos resultantes. No se indica de forma explícita que se especifiquen las características relevantes de los mismos, lo que puede traer consigo que los sujetos se limiten a dibujar el exterior de la figura cuando el interior también es determinante. Puede haber figuras que exteriormente sean iguales y por dentro diferentes como se muestra en la Figura 4.16.

Figura 4.16. Considerar sólo el exterior de la figura



Hipótesis H2It7: La representación dada del objeto y del eje en el enunciado de la tarea puede inducir al sujeto a interpretar que la tarea requiere simplemente dibujar la figura simétrica.

4.8.3.4. Dualidad Ostensivo - No ostensivo

La descripción de la tarea se apoya en elementos ostensivos gráficos para representar la acción a realizar sobre los objetos. Esta descripción podría realizarse mediante elementos lingüísticos, pero la información que ofrecen las imágenes permite hacer la composición de lugar de una manera más rápida y ágil. Sin embargo, la visualización de estas representaciones gráficas (elementos ostensivos) que nos ofrece el enunciado puede actuar como obstáculo epistemológico al evocar otro tipo de situaciones que utilizan esas mismas imágenes gráficas para otro tipo de transformaciones (simetrías axiales).

Las imágenes mentales (elementos no ostensivos) que cada individuo tiene de los cuerpos resultantes obedecen a experiencias previas con objetos físicos parecidos a los que se presentan. Además, este proceso mental no sólo requiere la creación de la imagen final sino de una sucesión de imágenes en movimiento.

Plasmar de forma ostensiva los cuerpos resultantes requiere de una descripción bastante detallada, o bien de una representación gráfica que puede llegar a ser complicada si no se tiene una cierta destreza al dibujar. También es posible hacerlo a través de varias posiciones de la figura inicial con el objetivo de recrear lo que ocurre en el plano no ostensivo (mental) o diferentes vistas de los objetos tridimensionales creados.

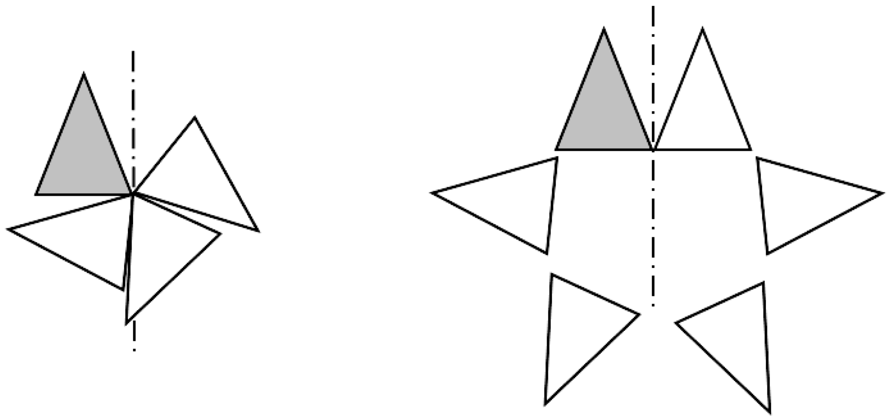
Hipótesis $H3_{It7}$: La representación plana de los cuerpos generados o su descripción verbal será una tarea difícil para los estudiantes.

4.8.3.5. Dualidad Personal – Institucional

Cualquiera de las dos situaciones presentadas parte de figuras planas conocidas y tienen cierta similitud con dos de los tres ejemplos más habituales de figuras de revolución (cono y esfera). El caso de partir de otras figuras que no tuvieran ningún referente, podría complicarse mucho la resolución de la tarea.

El significado personal de giro en el espacio es probable que diste del institucional, sobre todo en cuanto a la aplicación física del concepto. Esto conduce a que el giro se haga alrededor del eje (o del punto que toca al eje) pero sin salirse del plano (Figura 4.17).

Figura 4.17. Giros en el plano



El significado personal de giro en el espacio también puede confundirse con el de simetría axial. Las actividades habituales en la escuela para realizar una simetría axial suelen formularse de forma análoga a la que se ha utilizado en el enunciado de la tarea (cambiando “cuerpo”, por “figura” y “giro” por “simetría”), siendo muy probable que esta sea la situación más representativa del significado personal de los sujetos. Además algunos estudiantes entienden que, en lugar de una sucesión continua en el espacio, de movimientos en torno al eje de giro, se trata de una única posición estática, generada por un giro, en el espacio, de 180 grados respecto del eje.

En cualquiera de los dos casos anteriores postulamos que

Hipótesis $H4_{It7}$: los significados personales no concuerdan con el institucional, en el que las figuras que se generan son sólidos de revolución y que por tanto son el producto de hacer girar una curva alrededor de un eje, manteniendo todas las propiedades que definen un giro (equidistancia al eje de giro, etc.).

4.9. SÍNTESIS DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS PUESTOS EN JUEGO EN EL CUESTIONARIO

En las tres tablas siguientes (Tabla 4.2, Tabla 4.3 y Tabla 4.4) tratamos de recoger de forma sintetizada el contenido y los conocimientos (conceptos, propiedades y procesos/procedimientos) incluidos en la prueba y que han aparecido en el análisis precedente.

Tabla 4.2. Conceptos recogidos en la prueba

Conceptos	Nº de ítem						
	1	2	3	4	5	6	7
Ángulo poliedro.	×			×			
Ángulo recto.						×	
Área.		×				×	
Arista.	×		×	×	×		
Circunferencia.							×
Cono.							×
Cuadrado.	×	×	×	×	×		
Cuadrícula.		×					
Cubo.	×		×	×	×		
Cuboctaedro.	×						
Desarrollo plano de un cuerpo espacial.				×			
Eje de giro.							×
Eje de simetría.		×					
Esfera achatada por los polos.							×

Figura geométrica plana (cóncava, conexa, convexa, inconexa, regular, irregular, polígono, no polígono).		×				×	×
Figuras de revolución.							×
Figuras tridimensionales con agujero.					×		×
Figuras tridimensionales con hueco.							×
Intersección de ortoedros.					×		
Intersección de planos.	×			×			
Lado.	×		×	×	×	×	
Movimientos directos e inversos.		×				×	
Movimientos rígidos en el espacio.			×				×
Movimientos rígidos en el plano.		×				×	
Número mínimo de un conjunto finito de números naturales.		×					
Ortoedro.			×		×		
Paralelepípedo rectángulo.			×				
Pentágono.				×			
Perspectiva.	×		×	×	×		×
Poliedro regular.	×			×	×		
Polígono regular.	×	×					
Puntos fijos de un movimiento.							×
Representación por niveles.			×		×		×
Sólido tridimensional (cuerpo espacial).	×		×	×	×		×
Sólido truncado.	×			×			×
Teselas.		×				×	
Trayectoria.							×
Triángulo.	×			×			×
Tronco de cono.							×
Unidad de medida de área.		×				×	
Unidad de medida de volumen.			×		×		
Vértice.	×		×	×	×		×
Vistas ortogonales.			×		×		×
Volumen de un sólido perforado.					×		
Volumen.			×		×		×

Tabla 4.3. Síntesis de las propiedades utilizadas en la prueba

Propiedades	Nº de ítem						
	1	2	3	4	5	6	7
Todas las caras de un cubo son iguales.	×			×			
Todas las caras de un cubo son cuadrados.	×			×			
Todas las aristas de un cubo tienen la misma longitud.	×			×			
Un cubo tiene 12 aristas.	×			×			
En cada vértice de un cubo confluyen tres caras (tres aristas).	×			×			
Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.		×					
Propiedades que se derivan de la simetría axial (equidistancia al eje, perpendicularidad entre el eje y el segmento que une un punto con su transformada).		×					
Los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras.		×	×			×	×
Las simetrías son movimientos inversos (cambian la orientación de las figuras).		×				×	
Las teselas se unen por lados de la misma longitud.		×				×	
La simetría axial está asociada a la acción de levantar una figura del plano.		×				×	
El volumen es una magnitud sumativa.			×		×		
El volumen como producto de tres dimensiones.			×		×		
Los cubitos unidad se unen por caras completas.			×		×		
Un cubo tiene diferentes desarrollos planos (11).				×			
El desarrollo plano de un sólido respeta la forma y la magnitud de las caras y aristas manteniendo también las relaciones métricas (en dos dimensiones).				×			
Un plano que corta a uno de los vértices de un cubo afecta a tres caras adyacentes.	×			×			
En un desarrollo plano de un sólido varios puntos del plano				×			

	1	2	3	4	5	6	7
pueden ser imagen del mismo punto del espacio.							
El volumen de un cubo se determina elevando al cubo su arista.					×		
Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos.					×		
Los sólidos de revolución tienen infinitos planos de simetría.							×
Un giro de una figura alrededor de un eje mantiene la distancia de la figura a dicho eje.							×
Propiedades de las operaciones aritméticas elementales (suma, resta, multiplicación).					×		

Tabla 4.4. Síntesis de los procesos/procedimientos

Procesos/procedimientos	Nº de ítem						
	1	2	3	4	5	6	7
Visualizar los posibles ejes de simetría de una figura.		×					
Sombrear cuadraditos.		×					
Dividir una figura en dos partes congruentes.						×	
Componer y recomponer varias piezas para formar una figura plana.						×	
Descomponer y recomponer varias piezas para formar un sólido.			×		×		
Montar mentalmente cubos a partir de sus desarrollos planos.				×			
Cortar mentalmente un vértice a un cubo.	×			×			
Calcular el volumen de un cubo como producto de tres dimensiones.					×		
Calcular el volumen de un ortoedro como producto de tres dimensiones.			×		×		
Procesos de conteo (nº de cubitos).			×		×		
Visualizar (mentalmente) las diversas intersecciones de los túneles.					×		
Realizar (de forma ostensiva o no ostensiva) una			×				

representación por niveles.							
Calcular el número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos.					×		
Crear mentalmente una imagen del sólido de revolución que resulta en cada uno de los casos presentados (Creación de imágenes mentales dinámicas).							×
Realizar (de forma ostensiva) una representación plana (perspectiva) de los sólidos de revolución generados.							×

CAPÍTULO 5:

COMPETENCIAS DE LOS ESTUDIANTES DE MAGISTERIO SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo realizaremos un análisis global de los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba, detallando tanto la frecuencia de cada opción de respuesta como el porcentaje de aciertos para cada uno de los siete ítems. Así mismo se considerarán los resultados globales atendiendo al curso y la especialidad cursada.

El núcleo central del capítulo está dedicado a un estudio exhaustivo de las respuestas dadas a cada uno de los siete ítems desde la noción de configuración cognitiva. Para cada ítem definiremos un conjunto de configuraciones cognitivas asociadas al mismo, extraídas a partir de las respuestas que los alumnos han dado. El análisis de los diferentes elementos primarios junto con los errores y dificultades surgidas permiten construir conexiones entre las distintas configuraciones en cada uno de los ítems y establecer relaciones con investigaciones anteriores. El estudio de las respuestas de los alumnos desde esta perspectiva de las configuraciones cognitivas supone una herramienta que rompe con la estructura proporcionada por el análisis independiente de argumentos y errores.

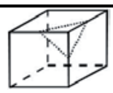
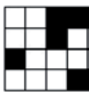
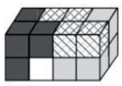
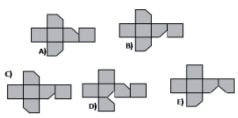
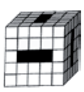
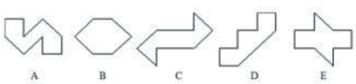
Tal y como señalan Gutiérrez y Jaime (1996), el estudio de los errores es fundamental para que los profesores conozcan cuáles son las dificultades y reacciones de los estudiantes sobre un tema, y como éstos interpretan los objetos matemáticos; sin considerar, no obstante, la enseñanza de las matemáticas como una actividad encaminada a detectar y perseguir errores y dificultades de los estudiantes (errores debidos a debilidades de conocimiento o a falta de cuidado, o bien a ideas erróneas que provienen de distractores visuales consecuencia de la tendencia de los alumnos a dejarse llevar por su percepción visual).

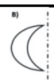
Para cada ítem se elaborará una tabla reflejando la frecuencia y porcentaje de las respuestas, se describirán las configuraciones cognitivas asociadas, el análisis cuantitativo de las mismas y se analizarán los errores situacionales, conceptuales y procedimentales. También se analizará en cada ítem la "efectividad" de cada una de las configuraciones asociadas. Esta idea de la "efectividad" se toma de Gorgorió (1998, p. 227) y se modificará para que sea pertinente sólo para aquellas configuraciones susceptibles de producir resultados correctos (configuración válida para lograr el resultado que se espera).

5.2. RESULTADOS GLOBALES

En un primer acercamiento a los resultados de la prueba, en la tabla 5.1 se muestra el número de respuestas correctas a cada ítem, lo que nos proporciona una idea del nivel de dificultad de cada uno de ellos. El ítem 2 y el ítem 7 han resultado especialmente complicados como se puede deducir del porcentaje de respuestas correctas (8,5 % y 4% respectivamente). El ítem 4 es el único en el que se supera el 40 % de aciertos, coincidiendo estos resultados con los obtenidos en el test piloto.

Tabla 5.1. Distribución del número de respuestas correctas por ítem

Ítem	Distintivo gráfico	Frecuencia	Porcentaje
1		73	18,25
2		34	8,50
3		154	38,50
4		304	76,00
5		85	21,25
6		151	37,75

7			16	4,00

Atendiendo a los datos recogidos en la Tabla 5.1, los ítems se pueden agrupar, en cuanto al índice de dificultad (Muñiz, 2002), de mayor a menor, de la siguiente manera:

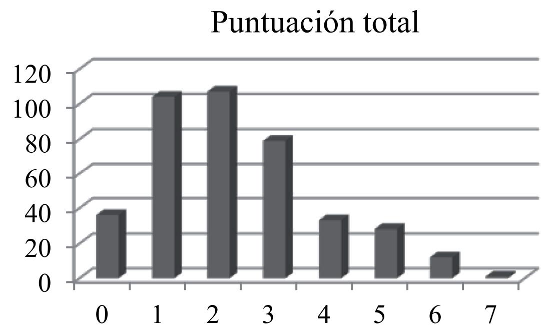
- Ítem 7: 0,042
- Ítem 2: 0,13
- Ítem 1 / Ítem 5: 0,24 / 0,29
- Ítem 3 / Ítem 6: 0,56 / 0,45
- Ítem 4: 0,87

Globalmente podemos señalar que el cuestionario ha resultado bastante difícil para los estudiantes. Teniendo en cuenta el bajo porcentaje de respuestas correctas asociadas a cada uno de los ítems, esta situación debería motivar la realización de un análisis que nos muestre los conflictos que se han producido en la resolución de las diferentes tareas propuestas.

Asignando un punto a cada respuesta correcta, la variable "puntuación total" varía en un rango de 0 a 7 puntos para el cuestionario definitivo. La Tabla 5.2 nos muestra la frecuencia de las diferentes puntuaciones obtenidas para la muestra de 400 sujetos.

Tabla 5.2. Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales obtenidas globalmente

Puntuación	Frecuencia	Porcentaje
0	36	9
1	104	26
2	107	26,75
3	79	19,75
4	33	8,25
5	28	7
6	12	3
7	1	0,25
Total	400	100



La variable especialidad (Tabla 5.3) nos permite observar si se detecta algún tipo de relación entre la puntuación obtenida y la especialidad cursada por los alumnos. Como se muestra en la siguiente tabla, es la especialidad de Lengua Extranjera la que obtiene los resultados globales más bajos en cuanto a puntuación, y los más altos en cuanto a porcentaje de sujetos que no obtuvieron ningún ítem correcto.

Tabla 5.3. Frecuencia y porcentaje por especialidad

	Primaria		Infantil		Lengua Extranjera		Musical	
Valor	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
0	10	5,49	7	9,86	9	18,75	10	10,10
1	48	26,37	25	35,21	12	25,00	19	19,19
2	45	24,73	22	30,99	16	33,33	24	24,24
3	44	24,18	11	15,49	6	12,50	18	18,18
4	13	7,14	3	4,23	5	10,42	12	12,12
5	15	8,24	3	4,23	0	0,00	10	10,10
6	7	3,85	0	0,00	0	0,00	5	5,05
7	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	1,01
Total	182	100	71	100	48	100	99	100

La Tabla 5.4 describe los datos referidos a los cursos académicos en que se realizó la prueba.

Tabla 5.4. Frecuencia y porcentaje por curso

	2005-2006		2006-2007		2008-2009	
Valor	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0	18	10,59	6	5,77	12	9,52
1	56	32,94	21	20,19	27	21,43
2	46	27,06	34	32,69	27	21,43
3	32	18,82	19	18,27	28	22,22
4	11	6,47	12	11,54	10	7,94
5	7	4,12	6	5,77	15	11,90
6	0	0,00	6	5,77	6	4,76
7	0	0,00	0	0,00	1	0,79
Total	170	100	104	100	126	100

En relación al análisis diferenciado de las respuestas atendiendo al género, los resultados se muestran en Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Frecuencia y porcentaje por género

	Mujeres		Hombres	
Valor	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0	31	10,00	5	5,56
1	95	30,65	9	10,00
2	84	27,10	23	25,56
3	58	18,71	21	23,33
4	21	6,77	12	13,33
5	14	4,52	14	15,56
6	6	1,94	6	6,67
7	1	0,32	0	0,00
Total	310	100	90	100

5.2.1 ANÁLISIS DE VARIANZA

Con el fin de determinar el efecto sobre la puntuación total en la prueba de los factores género, especialidad y curso académico en que fue aplicada, se ha realizado un análisis de la varianza multifactorial para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación total (variable dependiente, PTOTAL).

La Tabla 5.6 muestra la media de PTOTAL para cada uno de los niveles de los factores. También muestra los errores estándar de cada media, los cuales son una medida de la variabilidad en su muestreo. Las dos columnas de la derecha muestran intervalos de confianza del 95,0% para cada una de las medias.

Tabla 5.6. Tabla de medias por mínimos cuadrados para PTOTAL con intervalos de confianza del 95,0%

			Error	Límite	Límite
Nivel	Casos	Media	Estándar	Inferior	Superior
Media global	400	3,02244			

Curso:					
2005-2006	170	2,75594	0,16597	2,42964	3,08224
2006-2007	104	3,06664	0,232412	2,60971	3,52357
2008-2009	126	3,24475	0,227069	2,79832	3,69117
Especialidad:					
Primaria	182	3,13496	0,140586	2,85856	3,41135
Infantil	71	2,93721	0,296305	2,35467	3,51975
Lengua Ex.	48	2,70954	0,323776	2,07299	3,34609
Musical	99	3,30807	0,195415	2,92388	3,69226
Género:					
Hombre	90	3,55409	0,212529	3,13625	3,97192
Mujer	310	2,49080	0,123311	2,24837	2,73323

A partir del análisis de escalas del software SPSS, así como del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza multifactorial de efectos fijos, hemos obtenido los componentes de la varianza (Tabla 5.7). De esta tabla obtenemos los cuadrados medios entre sujetos para cada uno de los factores y residual, así como sus grados de libertad. No se ha evaluado la significación de las interacciones entre los factores. Las pruebas-F en la tabla ANOVA permiten identificar los factores significativos. Para cada factor significativo, las Pruebas de Rangos Múltiples informan de aquellas medias que son significativamente diferentes de otras. Los gráficos de medias ayudarán a interpretar los efectos significativos.

Tabla 5.7. Análisis de Varianza para PTOTAL

Fuente	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Efectos principales					
Curso	7,82429	2	3,91214	1,35	0,2598
Especialidad	5,91128	3	1,97043	0,68	0,5640
Género	68,9461	1	68,9461	23,83	**0,0000**
Residuos	1136,86	393	2,89277		
Total (corregido)	1305,38	399			

En la Tabla 5.7 (ANOVA) se descompone la variabilidad de PTOTAL en contribuciones debidas a los factores considerados. Los valores-P indican la probabilidad de obtener un valor F tan extremo o más que el observado para cada uno de los factores. En nuestro caso hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas en el factor género, como se muestra en la tabla. Puesto que el valor-P es menor que 0,05, este factor tiene un efecto estadísticamente significativo sobre PTOTAL con una significación del 0,05% (equivalentemente a 95,0% de nivel de confianza). Por tanto se puede rechazar la hipótesis de igualdad de puntuación media entre hombres y mujeres y admitimos que existen diferencias en cuanto al género a favor de los hombres.

La Tabla 5.8 muestra los resultados de la aplicación de la prueba de múltiples rangos para PTOTAL por Género. La mitad inferior de la tabla muestra las diferencias estimadas de la puntuación total para chicos y chicas, que es estadísticamente muy significativa. El método empleado para discriminar entre las medias es el procedimiento de diferencia mínima significativa (LSD) de Fisher. Se Observa una diferencia media de 1 punto con un intervalo de confianza del 95% de +/- 0, 43 puntos.

Tabla 5.8. Pruebas de Múltiple Rangos para PTOTAL por Género.

Método: 95,0 porcentaje LSD

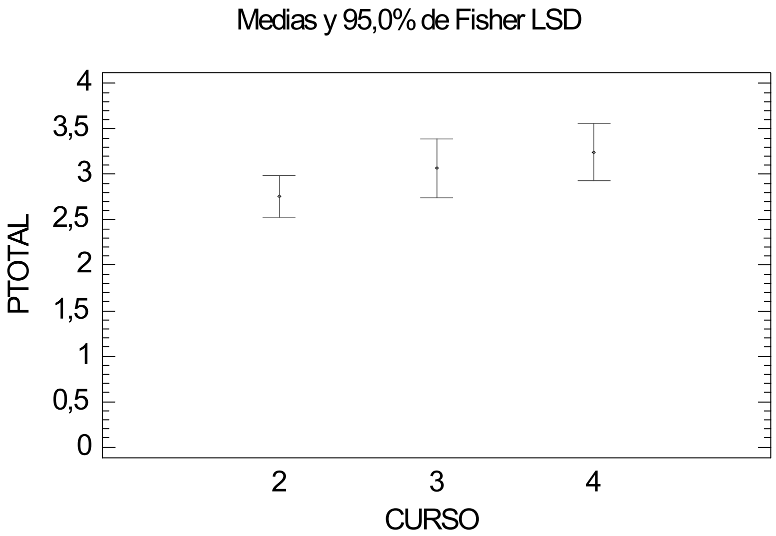
Género	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
Mujeres	310	2,4908	0,123311	X
Hombres	90	3,55409	0,212529	X

Contraste	Significación	Diferencia	+/- Límites
Hombres-Mujeres	*	**1,06329**	0,428195

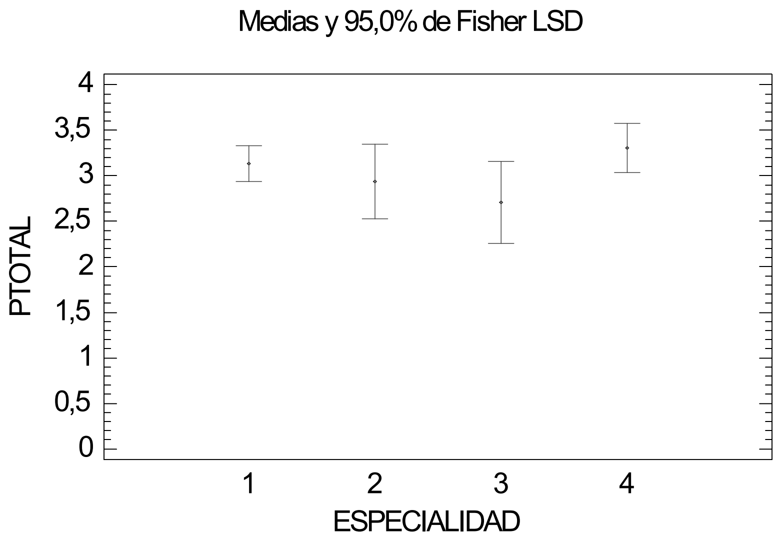
* indica una diferencia significativa.

Las gráficas siguientes (Gráficas 5.1, 5.2 y 5.3) permiten ver las medias e intervalos de confianza en la puntuación total para cada uno de los factores donde se confirman las conclusiones anteriores. En resumen, los chicos parecen tener más capacidad de visualización y razonamiento geométrico que las chicas y no se observan diferencias por curso o especialidad.

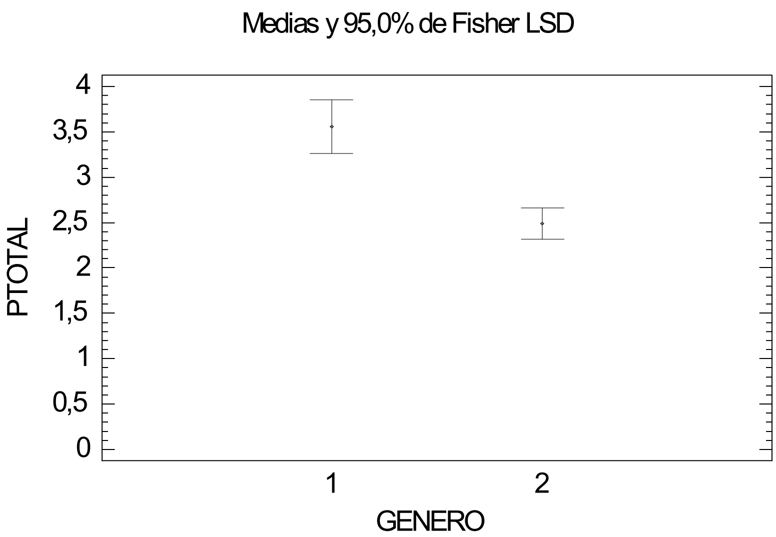
Gráfica 5.1. Medias de la puntuación total según curso académico



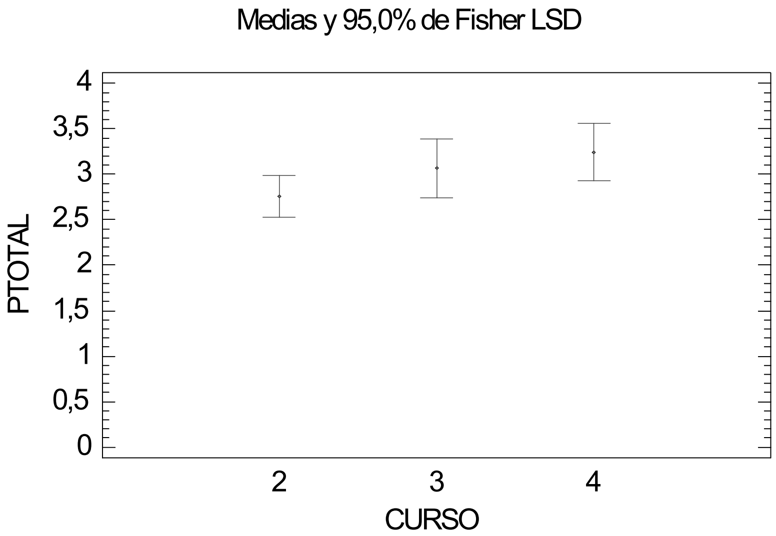
Gráfica 5.2. Medias de la puntuación total según especialidad



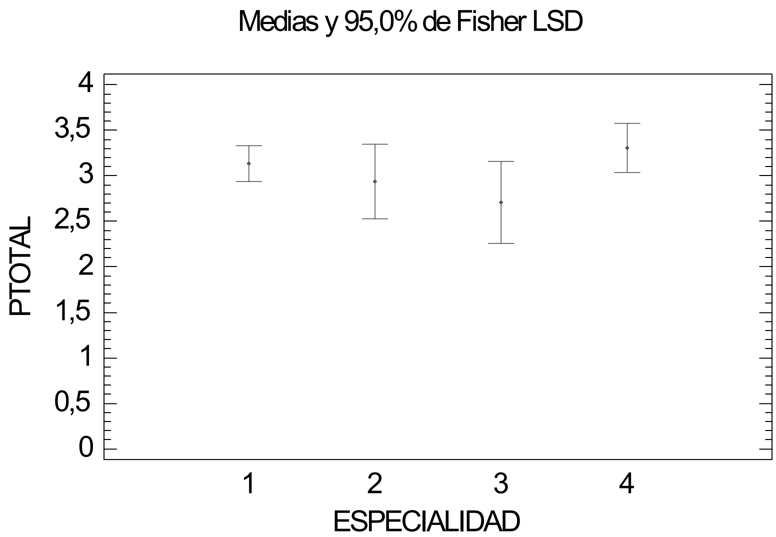
Gráfica 5.3. Medias de la puntuación total según género



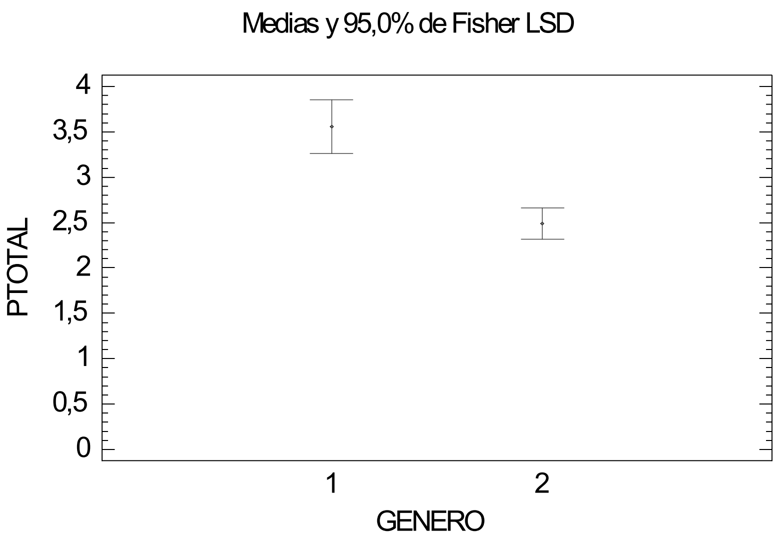
Gráfica 5.1. Medias de la puntuación total según curso académico



Gráfica 5.2. Medias de la puntuación total según especialidad



Gráfica 5.3. Medias de la puntuación total según género



5.3. RESULTADOS POR ÍTEMS Y ANÁLISIS DE RESPUESTAS

Antes de comenzar con el análisis propiamente dicho, es necesario describir los códigos que se han empleado en la pauta de corrección de los ítems.

Para cada uno de los ítems, en las tablas sobre frecuencias y porcentajes de respuestas se utilizará Ns/Nc (No sabe/No contesta) para indicar el número de sujetos que dejaron en blanco el ítem.

La Tabla 5.9 muestra la codificación de las familias de errores. En el análisis de cada uno de los ítems, la codificación nos proporcionará una descripción explícita del error a través de dos caracteres, el primero, alfabético, indicará el tipo (S, C, P, V) y el segundo, numérico, tendrá la función de numerar los errores de cada familia asociados a ese ítem.

Tabla 5.9. Codificación de las familias de errores

Código	Tipo de error	Descripción
S	Situacional	Errores relacionados con la expresión/contenido de la tarea; el lenguaje en el que está formulada la tarea, los diagramas, figuras, datos, etc.
C	Conceptual	Errores debidos al uso o formulación de incorrecta de una definición-regla, concepto, propiedad (no a su aplicación)
P	Procedimental	Aquellos errores que se producen al aplicar incorrectamente un procedimiento o una propiedad.
V	Combinados	Cuando se combinan dos o más errores de los anteriores

En las tablas que recogen los datos sobre los tipos de errores también aparecerán los códigos 0, EB y EBC. El código 0 se utilizará para indicar “sin error”, es decir, que la respuesta al ítem es correcta y está bien argumentada. El código EB indicará que el ítem no se ha contestado correctamente y carece de argumentación (nótese que se incluyen en este apartado las respuestas incorrectas sin argumentación y los ítems no contestados). EBC indicará que se elegido la opción de respuesta correcta pero que no aparecen argumentaciones que la justifiquen; lo que no nos permite concluir que se haya obtenido la solución correcta, puesto que se pudo llegar a la misma mediante un razonamiento o procedimiento incorrecto o por azar.

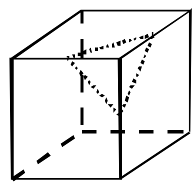
En las siguientes secciones, con el fin de tener una categorización de las respuestas de los estudiantes a cada una de las siete tareas, se describirán los elementos primarios (el lenguaje utilizado, los conceptos implicados, las propiedades sobre las que se apoyan, los procedimientos empleados y los argumentos en qué se apoyan dichos procedimientos) puestos en juego en la resolución de cada una en términos de configuraciones cognitivas. El número de configuraciones cognitivas asociadas a cada uno de los ítems dependerán de las características del mismo y de las respuestas de los alumnos. El análisis de los errores detectados en el desarrollo de los argumentos nos llevará a conectar cada uno de ellos con una o varias de dichas configuraciones cognitivas (Fernández, Godino y Cajaraville, 2012).

En cada ítem se presentará una notación de cara a facilitar la descripción de las configuraciones. En algunos casos será necesario incluir alguna notación adicional, específica del tipo de configuración.

5.3.1. ÍTEM 1: CUBO TRUNCADO

Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm. de lado como se indica en la figura, a distancia de 1cm. sobre cada arista. ¿Cuántos vértices tiene el sólido así obtenido?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24



5.3.1.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 1

En la Tabla 5.10 podemos observar que la respuesta correcta, que corresponde al valor 12, es elegida por el 24,25% de la muestra de 400 sujetos. La frecuencia más alta corresponde al valor 24 que supera en un 14,25% al antes citado.

Tabla 5.10. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 1

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
6	21	5,25
8	70	17,50

12	**97**	**24,25**
18	8	2,00
24	154	38,50
Ns/Nc	50	12,50
Total	400	100,00

5.3.1.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 1

Antes de describir las distintas configuraciones asociadas al ítem1, haremos una serie de consideraciones notacionales con el objetivo facilitar la posterior descripción de las mismas (Figura 5.1).

Las caras se indicarán por C_i, y se situarán de forma que cada C_i sea la cara frontal (opuesta) de C_{i+1} ($C_i \leftrightarrow C_{i+1}$; $i = 1{,}3{,}5$).

Las aristas se denotarán por:

$A_i = C_5 \cap C_i$; $i = 1{,}4$

$A_{4+i} = C_6 \cap C_i$; $i = 1{,}4$

$j = 1{,}2$; $A_{7+j+i} = C_j \cap C_{2+i}$; $i = 1{,}2$;

Los vértices:

$V_1 = C_5 \cap C_1 \cap C_4;\ V_2 = C_5 \cap C_1 \cap C_3;\ V_3 = C_5 \cap C_4 \cap C_3;\ V_4 = C_5 \cap C_4 \cap C_6$

$V_5 = C_6 \cap C_1 \cap C_4;\ V_6 = C_6 \cap C_1 \cap C_3;\ V_7 = C_6 \cap C_2 \cap C_3;\ V_1 = C_5 \cap C_2 \cap C_4$

$N(A_C)$: Número de aristas del cubo.

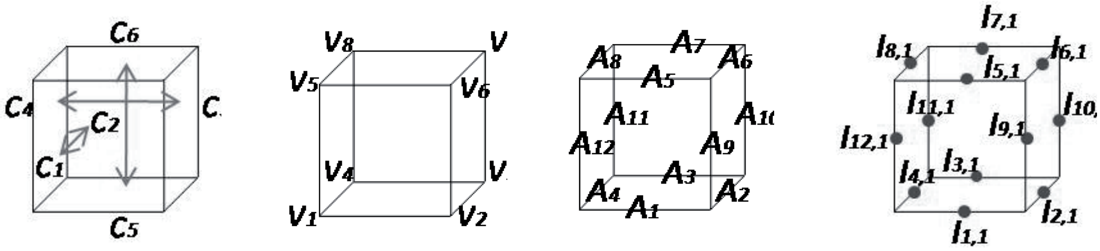
P_{V_i}: Plano que corta el vértice V_i .

$\mathrm{Np}(\mathrm{A_k})$: Número de vértices del nuevo sólido que quedan sobre la arista $\mathrm{A_k}$ del cubo inicial. Si $\mathrm{Np}(\mathrm{A_k}) = \mathrm{Np}(\mathrm{A_{k+1}}),\ \forall\, \mathrm{k} = 1, \mathrm{N}(\mathrm{A_C})$; denotaremos $\mathrm{Np}(\mathrm{A_k})$ por $\mathrm{Np}(\mathrm{A})$.

Los puntos $\mathrm{I_{k,j}}$ representarán los puntos de intersección de los planos $\mathrm{P_{V_i}}$ sobre la arista $\mathrm{A_k}$ con $\mathrm{j} = 1, \mathrm{Np}(\mathrm{A_k}); \mathrm{k} = 1, \mathrm{N}(\mathrm{A_C})$.

$\mathrm{N}(\mathrm{V_{c_t}})$: Número de vértices del cubo truncado.

Figura 5.1. Notación para caras, vértices y aristas

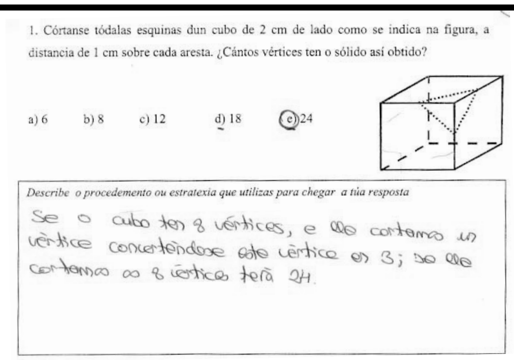


El análisis de este primer ítem nos ha permitido establecer ocho configuraciones cognitivas que se describirán a continuación.

Configuración cognitiva 1 (CC1). *Asignar los vértices de una cara triangular del cuerpo resultante a cada uno de los ocho vértices del cubo*.

- Lenguaje: vértice, corte, arista, "cada vértice se convierte en tres", "cada corte da tres vértices". Notación: $N(V_C) \times 3$, 24.
- Conceptos: cubo, arista, vértice.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta las tres aristas que parten del vértice V_i a igual distancia del mismo; b) cada plano P_{V_i} corta cada una de las tres aristas que parten del vértice V_i en un único punto; c) un cubo tiene $N(V_C)$ vértices; d) propiedad emergente: el cubo truncado tiene tantos vértices como vértices tiene un cubo multiplicado por tres.
- Procedimiento: a) Realizar el truncamiento en un vértice del cubo; b) observar que dicha acción produce tres vértices del nuevo cuerpo; c) considerar el número de vértices del cubo inicial; d) multiplicar el número de vértices del cubo por tres.
- Argumentación: La intersección de cada plano P_{V_i} con las caras que forman el correspondiente vértice V_i da lugar a una forma triangular $T_i\,(i = 1, N(V_C))$ (triángulos equiláteros si el corte se hace a igual distancia tal y como se dice en el enunciado). Este triángulo constituye una cara del nuevo cuerpo y contiene tres vértices del mismo. Por lo tanto, el cubo truncado tendrá tantos vértices como vértices tiene el cubo inicial multiplicado por 3 ($N(V_{C_t}) = N(V_C) \times 3$).

Ejemplo de respuesta 5.1. Configuración cognitiva CC1 del ítem 1


1. Córtanse tódalas esquinas dun cubo de 2 cm de lado como se indica na figura, a distancia de 1 cm sobre cada aresta. ¿Cántos vértices ten o sólido así obtido?

a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e)24

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

Se o cubo ten 8 vértices, e lle cortamos un vértice convertendose este vértice en 3; se lle cortamos os 8 vértices terá 24.

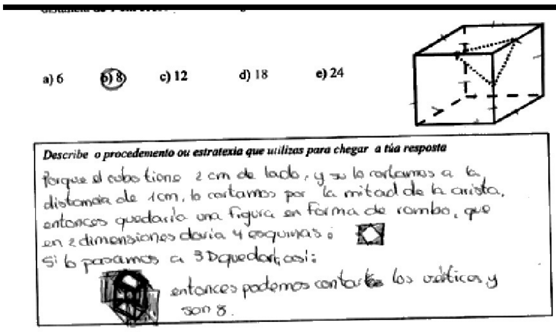
Transcripción:

Si el cubo tiene 8 vértices, y le cortamos un vértice convirtiéndose ese vértice en 3; si le cortamos los ocho vértices tendrá 24.

Configuración cognitiva 2 (CC2). *Identificar el cuerpo resultante con un cubo/ortoedro*. Cortar los cuatro vértices de una cara mediante cuatro planos perpendiculares a la misma que pasan por el punto medio de dos aristas con vértice común. Cada uno de los cuatro planos corta las aristas del cubo inicial en cuatro puntos (dos en aristas adyacentes de una cara y otros dos en las aristas homólogas de la cara opuesta). El centro de atención está puesto en la visión ortogonal del cubo desde una de las caras, sin coordinar las demás vistas.

- Lenguaje: “cortar a mitad de arista”, ocho, “cubo con la mitad del tamaño”, 1cm, “cubo más pequeño”. Icónico: representación gráfica de un ortoedro dentro del cubo dado en el enunciado de la tarea.
- Conceptos: cubo, arista, vértice, cara, rombo.
- Propiedades: a) un cubo es un prisma recto regular; b) los planos cortan a las aristas por su punto medio; c) cada vértice tiene tres planos que lo cortan, cada uno de ellos es perpendicular a una de las caras que conforman dicho vértice (se denotarán por P_{V_i,C_j}); d) la figura que se forma al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado es otro cuadrado/rombo; e) Propiedad emergente: el número de vértices es ocho.
- Procedimiento: a) “cortar” los cuatro vértices de una de las caras por un plano perpendicular a dicha cara que pase por los puntos medios de dos aristas que comparten un vértice; b) observar que también se cortan los vértices de la cara opuesta c) contar el número de vértices obtenido después de haber realizado los cuatro cortes.
- Argumento: Elegida una cara C_j, al cortar los cuatro vértices de C_j por planos perpendiculares a dicha cara (P_{V_i,C_j}), pasando por los puntos medios de dos aristas con un vértice en común se cortan también los cuatro vértices de la cara opuesta (por ser caras paralelas y el cubo ser un prisma recto). En cada una de las caras C_j y C_{j+1} se obtienen cuatro vértices del nuevo cuerpo. Por tanto, el número de vértices en total es ocho. Además, la vista ortogonal desde arriba del cubo truncado es la misma que se tiene del cubo inicial (un cuadrado), aunque más pequeña y girada. Por lo tanto, esa imagen conduce a afirmar que el nuevo sólido obtenido será otro cubo/ortoedro pero más pequeño que el inicial.

Ejemplo de respuesta 5.2. Configuración cognitiva CC2 del ítem1



Transcripción:

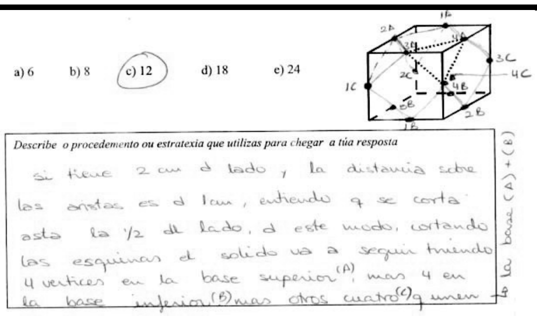
Porque el cubo tiene 2cm. de lado, y si lo cortamos por la mitad de la arista, entonces quedaría una figura en forma de rombo, que en dos dimensiones daría 4 esquinas.
Si lo pasamos a 3D quedaría así:
Entonces podemos contar los vértices y son ocho.

Configuración cognitiva 3 (CC3). *Comprobación exhaustiva de casos en número finito*. Se apoya en la representación gráfica de los puntos medios de las aristas, marcando sobre cada arista del cubo los nuevos vértices y contando el número total de los mismos. Este proceder implica que, en la mayoría de los casos, se acompañe con una representación gráfica (esbozo) del nuevo cuerpo.

- Lenguaje: caras opuestas, "vértices de la cara superior", "vértices de la cara inferior" compartir, caras adyacentes, contar, enumerar, aristas, contorno, esquina, lado [por arista] , desarrollo plano, "mitad del lado [arista]", marcar, distancia. Icónico: representación gráfica marcando los vértices del nuevo cuerpo sobre la ilustración del cubo dada en la tarea.
- Conceptos: vértices, caras opuestas, arista, cara superior, lado, esquina.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta las tres aristas que parten del vértice V_i a la misma distancia del mismo; b) todas las caras y vértices de un cubo son iguales; c) cada plano P_{V_i} corta a cada una de las tres aristas que parten del vértice V_i en un único punto; d) dos caras opuestas no comparten vértices; e) $\mathrm{Np}(\mathrm{A_k}) = \mathrm{Np}(\mathrm{A_{k+1}})$; $\mathrm{k} = 1,\ \mathrm{N}(\mathrm{A_C})$; f) propiedad emergente: el cubo truncado tiene $(\sum_{k=1}^{12} Np(A_k))$ vértices.
- Procedimiento: a) realizar en todos los vértices, de forma ostensiva, un corte similar al que aparece representado en el enunciado de la tarea; b) enumerar los nuevos puntos obtenidos.
- Argumento: Los planos $\mathrm{P_{V_i}}$ $(\mathrm{i} = 5, 8)$ cortan a cada una de las cuatro aristas que forman la cara C_6 del cubo inicial en un punto y los planos P_{V_i} $(i = 1, 4)$ cortan a

las aristas de la cara C_5 en otro punto cada uno. Por otra parte, los planos P_{V_i} $(i = 1, 8)$ también cortan a las aristas laterales $(A_k; k = 9, 12)$ en un punto cada uno. Como estos puntos de intersección se corresponden con los vértices del cubo truncado éste tendrá $4 \times Np(A_k)$ $(k = 5, 8) + 4 \times Np(A_k)$ $(k = 1, 4) + 4 \times Np(A_k)$ $(k = 9, 12)$ vértices en total $(\sum_{k=1}^{12} Np(A_k))$.

Ejemplo de respuesta 5.3. Configuración cognitiva CC3 del ítem 1



Transcripción:

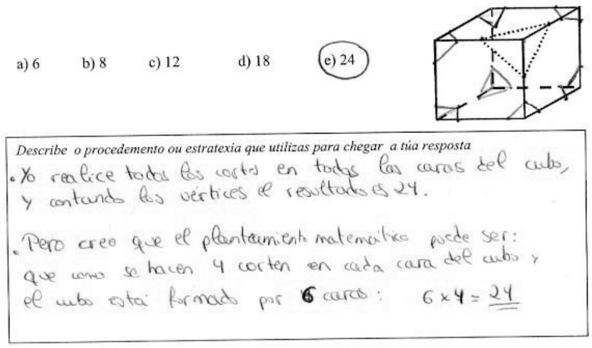
Si tiene 2 cm de lado, la distancia sobre la arista es de 1cm, entiendo que se corta hasta la ½ del lado, de este modo, cortando las esquinas el sólido va a seguir teniendo 4 vértices en la base superior (A), más 4 en la base inferior (B) más otros cuatro (C) que unen lo la base (A)+(B).

Configuración cognitiva 4 (CC4). *Asignar el nº de vértices de una cara cuadrangular del cuerpo resultante a cada una de las seis caras del cubo.* Estos elementos se consideran independientes unos de otros lo que conduce a que no se tenga en cuenta que cada dos caras cuadrangulares comparten un vértice.

- Lenguaje: vértice, corte, arista, "cuatro cortes en cada cara", "en cada cara aparecen cuatro vértices". Notación: 24, $N(C_C) \times 4$.
- Conceptos: cubo, arista, vértice.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta a dos aristas con vértice común V_i de una cara C_j a la misma distancia del mismo y en un único punto; b) todas las caras de un cubo son iguales; c) un cubo tiene $N(C_C)$ caras; d) propiedad emergente: el cubo truncado tiene tantos vértices como los del polígono que se forma en cada cara del cubo multiplicado por el número de caras del cubo.
- Procedimiento: a) suprimir en una cara del cubo los cortes hechos en cada uno de sus cuatro vértices; b) contar los vértices de la figura poligonal que aparece al realizar la operación anterior; c) multiplicar ese número de vértices obtenido por el número de caras del cubo.
- Argumentación: Al suprimir en una de las caras del cubo inicial C_j los cuatro vértices V_i "cortados" por los planos P_{V_i} correspondientes, resulta una forma poligonal D_j con k vértices (k= 4 ó 8) que constituye una cara del nuevo sólido

formado (cubo truncado). Por lo tanto, si el cubo tiene $N(C_C)$ caras, el cubo truncado estará formado por $k \times N(C_C)$ vértices.

Ejemplo de respuesta 5.4. Configuración cognitiva CC4 del ítem1



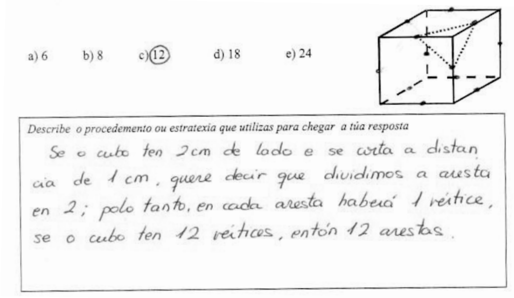
Transcripción:

- Yo realicé todos los cortes en todas las caras del cubo, y contando los vértices el resultado es 24.
- Pero creo que el planteamiento podría ser: que como se hacen 4 cortes en cada cara del cubo y el cubo está formado por 6 caras: 6×4=24

<u>Configuración cognitiva 5</u> (CC5). *Identificar los vértices del cuerpo resultante con puntos de las aristas del cubo*. Se centra la atención en las aristas del cubo inicial, aislando los demás elementos. Cada arista del cubo proporciona $Np(A)$ vértices del cubo truncado.

- Lenguaje: vértices, "$Np(A)$ puntos en cada arista", distancia, cortar, "dividimos la arista en dos". Notación: $N(A_C)$, $Np(A)$; $Np(A) \times N(A_c)$, 2cm, 1cm.
- Conceptos: cubo, arista, vértice.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta las tres aristas que parten del vértice V_i a la misma distancia del mismo; b) cada plano P_{V_i} corta a cada una de las tres aristas que parten del vértice V_i en un único punto; a) un cubo tiene $N(A_C)$ aristas; c) $Np(A_k) = Np(A_{k+1})$; $k = 1,\ N(A_C)$; d) Propiedad emergente: El número de vértices del cubo truncado es $N(V_{c_t}) = Np(A) \times N(A_c)$.
- Procedimiento: a) Observar que cada corte proporciona un punto sobre cada una de las tres aristas que conforman el vértice truncado; b) contar el número de aristas del cubo; c) identificar número de puntos de corte sobre las aristas del cubo inicial con número de vértices del cubo truncado.
- Argumentación: Como cada arista tiene por extremos dos vértices, al cortar esos dos vértices dan lugar a $Np(A)$ puntos sobre cada arista. Ya que un cubo tiene $N(A_c)$ aristas, el cubo truncado (C_t) tendrá tantos vértices como aristas tiene el cubo inicial multiplicado por el número de puntos de corte que hay sobre cada arista, es decir, $N(V_{c_t}) = Np(A) \times N(A_c)$.

Ejemplo de respuesta 5.5. Configuración cognitiva CC5 del ítem1



Transcripción:

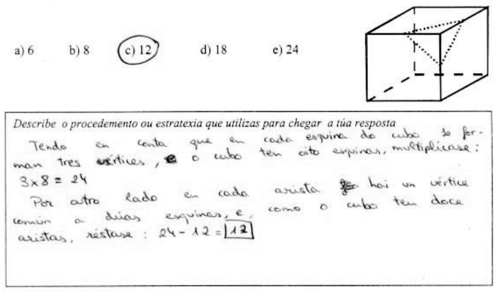
Si el cubo tiene 2cm de lado e se corta a distancia de 1cm, quiere decir que dividimos la arista en 2; por lo tanto, en cada arista habrá 1 vértice, si el cubo tiene 12 vértices, entonces 12 aristas.

Configuración cognitiva 6 (CC6). *Extrapolación de la acción sobre un vértice del cubo con integración*. Esta configuración se fundamenta en extrapolar lo que ocurre en uno de los vértices del cubo a todos los demás considerando después los puntos comunes a caras adyacentes.

- Lenguaje: vértices, “los vértices se repiten”, “un cubo tiene $N(V_C)$ vértices”, compartir. Notación: $N(V_C) \times 3$, 24, 12, 2cm., 1cm.
- Conceptos: cubo, vértices, lados.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta a las tres aristas que parten del vértice V_i a la misma distancia del vértice; b) todos los vértices son del mismo orden; c) cada plano P_{V_i} corta a cada una de las tres aristas que parten del vértice V_i en un único punto; d) propiedad emergente: El cubo truncado tiene $N(V_C) \times 3 - N(T_i \cap T_j)$ vértices con $i, j = 1,\ N(V_C);\ i \neq j;\ T_i \cap T_j = T_j \cap T_i$.
- Procedimiento**:** a) truncar uno de los vértices; b) observar que esa acción produce tres vértices del sólido truncado; c) multiplicar cada vértice del cubo inicial por tres; d) considerar el número de intersecciones entre las caras triangulares; e) restar ese resultado al número obtenido en el apartado c).
- Argumentación**:** Justificación deductiva basada en la identificación de los vértices del cuerpo resultante con los vértices del triángulo que forman las caras del nuevo cuerpo: La intersección del plano P_{V_i} con las caras que forman el correspondiente vértice V_i da lugar a una forma triangular T_i ($\forall\ i = 1, N(V_C)$) (triángulos equiláteros si el corte se hace a igual distancia tal y como se dice en el enunciado) que constituye una cara del nuevo cuerpo y proporciona tres vértices del mismo. Como el cubo tiene $N(V_C)$ vértices se multiplica $N(V_C) \times 3$ para obtener todos los posibles vértices. Ahora bien, teniendo en cuenta el

número de intersecciones entre las caras triangulares, se obtiene que $N(V_{C_t}) = N(V_C) \times 3 - N(T_i \cap T_j);\ i,j = 1,\ N(V_C);\ i \neq j;\ T_i \cap T_j = T_j \cap T_i$.

Ejemplo de respuesta 5.6. Configuración cognitiva CC6 del ítem 1



Transcripción:

Teniendo en cuenta que en cada esquina del cubo se forman tres vértices, y el cubo tiene ocho esquinas, se multiplica 3×8=24

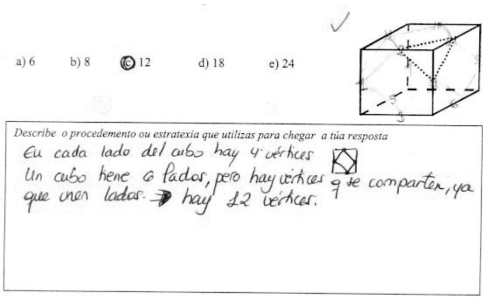
Por otro lado en cada arista hay un vértice común a dos esquinas y, como el cubo tiene doce aristas, se resta: 24−12=12

<u>Configuración cognitiva 7</u> (CC7). *Extrapolación de la acción sobre una cara del cubo con integración*. Esta configuración se basa en extrapolar lo que ocurre en una de las caras del cubo a todas las demás considerando después los puntos comunes a caras adyacentes.

- Lenguaje: vértices, lados [por caras], caras, "un cubo tiene seis lados", compartir. Notación: 24, $N(C_C) \times 4$, 12, 2 cm., 1cm. Icónico: representación gráfica de la figura poligonal que queda en una cara al cortar los cuatro vértices.
- Conceptos: cubo, vértices, lados, aristas, caras.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta a dos aristas con vértice común V_i de una cara C_j a la misma distancia del mismo y en un único punto; b) todas las caras de un cubo son iguales; c) un cubo tiene $N(C_C)$ caras; d) cada vértice nuevo es común a dos caras cuadrangulares; e) $Np(A_k) = Np(A_{k+1});\ k = 1,\ N(A_C)$, entonces se denotará $Np(A)$ por $Np(A_k)$; f) propiedad emergente: El cubo truncado tiene $k \times N(C_C) - \left(N(A_C) \times N_p(A)\right)$ vértices.
- Procedimiento: a) cortar los cuatro vértices en una de las caras; b) contar los vértices de la nueva forma poligonal que resulta en una de las caras al hacer los cortes; c) multiplicar por el número de caras del cubo inicial; d) considerar que cada vértice es compartido por cada dos caras con vértice común y restárselo al número anterior.
- Argumentación: Al suprimir en una de las caras C_j cubo inicial los cuatro vértices V_i "cortados" por los planos P_{V_i} correspondientes, resulta una forma poligonal

D_j con k vértices ($k = 4$ ó 8) que constituye una cara del nuevo sólido formado (cubo truncado). Por lo tanto, en cada arista del cubo inicial tendremos k vértices del cubo truncado y como cada vértice es compartido por dos caras cuadrangulares, el número total de vértices del cubo truncado será $k \times N(C_C) - \left(N(A_C) \times N_p(A)\right)$.

Ejemplo de respuesta 5.7. Configuración cognitiva CC7 del ítem 1



Transcripción:

En cada lado del cubo hay 4 vértices

Un cubo tiene 6 lados, pero hay vértices que se comparten, ya que unen dos lados →hay 12 vértices.

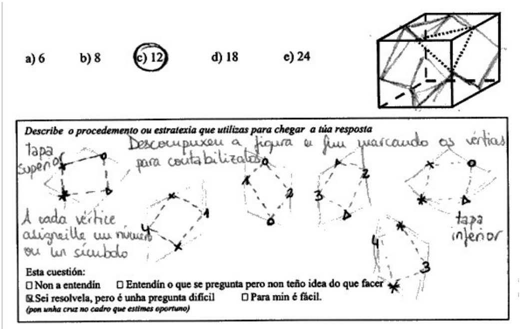
Configuración cognitiva 8 (CC8). *Comprobación exhaustiva de casos apoyada en un desarrollo plano del cubo.* Se realiza un desarrollo plano del cubo y se señala, sobre cada una de las caras de dicho desarrollo, la figura poligonal resultante de cortar los cuatro vértices de las mismas.

- Lenguaje: compartir, caras adyacentes, contar, enumerar, aristas, contorno, esquina, lado [arista], desarrollo plano, "tapa inferior", "tapa superior", "mitad del lado [arista]", marcar, distancia. Icónico: representación gráfica marcando los vértices del nuevo cuerpo sobre el desarrollo plano del cubo con los cortes realizados en todas las caras.
- Conceptos: vértices, arista, lado, esquina, desarrollo plano de un cubo.
- Propiedades: a) cada plano P_{V_i} corta a dos aristas con vértice común V_i a la misma distancia del mismo y en un único punto; b) todas las caras de un cubo son iguales; c) un cubo tiene, al menos, un desarrollo plano; d) $\mathrm{Np}(\mathrm{A_k}) = \mathrm{Np}(\mathrm{A_{k+1}})$; $\mathrm{k} = 1,\ \mathrm{N}(\mathrm{A_C})$; e) propiedad emergente: el cubo truncado tiene $(\sum_{k=1}^{12} Np(A_k))$ vértices.
- Procedimiento: a) señalar como quedaría una cara del cubo inicial después de hacer los cortes por los planos correspondientes a los vértices de dicha cara; a) representar el desarrollo plano del cubo; c) reproducir la imagen de la cara cortada en todas las demás caras del cubo inicial en el desarrollo plano; d) hacer

el recuento de vértices a través de ese desarrollo plano del cubo que dará lugar a la solución.

- Argumento: Al marcar en una de las caras cubo inicial los cuatro vértices V_i "cortados" por los planos P_{V_i} correspondientes, resulta una forma poligonal D_j con k vértices ($k = 4$ ó 8) que constituye una cara del nuevo sólido formado (cubo truncado). Se realiza el desarrollo plano del cubo y, como todas las caras del cubo son iguales y los cortes se realizan de igual manera en todos los vértices, se representa esa misma forma poligonal sobre cada una de las caras del desarrollo plano. Los vértices de estas formas poligonales se corresponderán con los vértices del cubo truncado. Entonces, se numeran los vértices que aparecen en el desarrollo plano teniendo en cuenta que los vértices son comunes a dos caras, lo que conduce a la obtención del valor solución de la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.8. Configuración cognitiva CC8 del ítem1



Transcripción:

Descompuse la figura y fui marcando los vértices para contabilizarlos. A cada vértice le asigné un número o un símbolo.

Tapa superior.

Tapa inferior.

5.3.1.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas

En la Tabla 5.11 se observa que la configuración más frecuente es la CC1, lo que representaría que la atención a la hora de resolver la tarea está centrada principalmente en los vértices del cubo inicial. Sin embargo, el argumento asociado a esa configuración no permite llegar a la solución correcta por contemplar que los vértices que surgen de los cortes no se comparten con las caras adyacentes, observación que sí consideran los sujetos que utilizan la configuración CC6. Este porcentaje tan alto puede deberse a que en el enunciado el énfasis (apoyado por el gráfico acompañante) está puesto precisamente en el corte de un vértice. La configuración CC2, que considera que al truncar un cubo de esa manera lo que se va a obtener es otro cubo (ortoedro) más pequeño, es la segunda configuración más frecuente (11,75%) a poca distancia de la configuración CC3. Es de destacar a su vez que el 24,50% de la muestra no haya apoyado su respuesta con ningún tipo de argumento.

Tabla 5.11. Frecuencia y porcentaje de las configuraciones asociadas al ítem 1

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Asignar los vértices de una cara triangular del cuerpo resultante a cada uno de los vértices del cubo inicial.	104	26,00
CC2	Identificar el cuerpo resultante con un cubo.	47	11,75
CC3	Comprobación exhaustiva de casos.	40	10,00
CC4	Asignar los vértices de una cara cuadrangular del cuerpo resultante a cada una de las caras del cubo inicial.	29	7,25
CC5	Identificar los vértices del cuerpo resultante con puntos de las aristas del cubo.	24	6,00
CC6	Extrapolación de la acción sobre un vértice del cubo con integración.	10	2,50
CC7	Extrapolación de la acción sobre una cara del cubo con integración.	7	1,75
CC8	Comprobación exhaustiva de casos apoyada en un desarrollo plano del cubo.	6	1,50
NC	No argumentan la opción elegida o bien dejan la respuesta en blanco.	98	24,50
NE	No entiende.	36	9,00
Total		400	100,00

Si se hace una distribución de estos datos atendiendo al tipo de elemento del cubo (vértices, caras, aristas) en el que se concentra la atención en el proceso de resolución de la tarea, se verá que las configuraciones CC1 y CC6 lo hacen sobre los vértices (28,5%), las configuraciones CC3 y CC5 se detienen en la acción sobre las aristas (16%) y, por último, las configuraciones CC2, CC4, CC7 y CC8 (22,25%) eligen las caras del cubo como elementos sobre los que apoyar su argumentación.

Un análisis de los distintos tipos de configuraciones atendiendo al procedimiento que utilizan nos lleva a agruparlas en dos subconjuntos. Por un lado tenemos las configuraciones CC1, CC2, CC4, CC5, CC6 y CC7 que actúan sobre un elemento del cubo (vértices, caras o aristas) y extrapolan dicha acción a los demás elementos del mismo tipo. Este grupo de configuraciones suponen un 55,25% de la muestra. El otro grupo está formado por las configuraciones CC3 y CC8 cuya base del procedimiento seguido es la comprobación exhaustiva de casos en número finito (11,50%).

El razonamiento seguido en las configuraciones CC1 y CC6 es similar al que conforman las configuraciones CC4 y CC7, sólo que en las primeras se trabaja sobre los vértices y otra sobre las caras del cubo. Sin embargo existe una diferencia a la hora de llevar a cabo el procedimiento puesto que en la CC1 y CC6 no es necesario hacer ninguna mención a lo que ocurre en las caras de los cubos mientras que en las otras dos, aunque el elemento elegido para el procedimiento sean las caras, se debe hacer uso de los vértices. Es decir, el procedimiento llevado a cabo sobre las caras requiere un paso indirecto a través de los vértices. Esto se observa también en el vocabulario utilizado ya que las configuraciones CC1 y CC6 no precisan la utilización del concepto cara ni elementos derivados de la acción sobre dicho concepto.

La configuración CC3 proporciona, a diferencia de las demás configuraciones, una imagen (esbozo) del nuevo sólido (cubo truncado), conseguida al señalar los cortes realizados sobre los ocho vértices del cubo. La configuración CC8, aunque también incluye una comprobación exhaustiva de todos los vértices, no conduce a una imagen completa del cubo truncado pues ofrece una visión de cada una de las caras, al trabajar sobre un desarrollo plano de la figura inicial. En este caso, el análisis de respuestas nos induce a concluir que la percepción que se tiene del cubo con los puntos marcados sobre las aristas en la representación en perspectiva paralela no está clara y necesita de otro apoyo gráfico que muestre claramente todas las caras y, por lo tanto, los nuevos vértices.

La configuración CC5 es una configuración sencilla, limpia (en el sentido de que no requiere utilizar muchos conceptos ni propiedades, lo cual reduce el número de errores que se puedan presentar) y bastante segura a nivel conceptual. Implica establecer una relación biunívoca entre el número de vértices del nuevo cuerpo y el número de aristas del cubo. Como se puede observar en la Tabla 5.11 no forma parte de las configuraciones de mayor frecuencia.

5.3.1.4. Análisis de errores

La lectura de la Tabla 5.12. Frecuencia y porcentaje del tipo de errores asociados al ítem 1 nos muestra que, en coherencia con la configuración mayoritaria, la frecuencia más alta corresponde al error 3C, relacionado con el procedimiento basado en el análisis de lo que ocurre en un vértice, sin tener en cuenta los comunes a dos caras. Sólo el 18,25% resuelve la tarea correctamente, lo que no deja de ser sorprendente dada la edad de los estudiantes evaluados y la aparente sencillez de la tarea.

Si se agrupan los errores atendiendo a si son conceptuales, situacionales o procedimentales, tendremos que un 34,25% corresponden a errores conceptuales, un 6,25% a situacionales y un 14,75% a errores procedimentales.

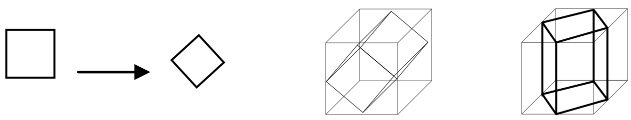
Tabla 5.12. Frecuencia y porcentaje del tipo de errores asociados al ítem 1

	Descripción	nº de alumnos	Porcentaje
0	Sin errores	73	18,25
EB	No contesta/ No argumenta	94	23,50
EBC	Sin argumento con opción correcta	12	3,00
1S	No interpretar el enunciado	17	4,25
2S	Los nuevos vértices no se identifican con los puntos medios de las aristas del cubo	8	2,00
1C	No recordar las características del cubo	10	2,50
2C	No tener en cuenta que cada vértice del cuboctaedro es común a dos caras cuadrangulares	30	7,50
3C	No tener en cuenta que cada vértice del cuboctaedro es común a dos caras triangulares	97	24,25
1P	Error al contar el número de vértices	13	3,25
2P	Considerar que el corte sólo afecta a dos aristas	46	11,50
Total		400	100,00

Los errores 2C y 3C se derivan de la estructura espacial del objeto que tienen los estudiantes con configuraciones cognitivas CC1, CC4 y CC8. En este caso, adaptando los resultados y consideraciones de Battista y Clements (1998, p. 504) a nuestra tarea, se podría afirmar que aquellos estudiantes que tienen una estructura espacial de figuras espaciales basadas en un conjunto de caras no coordinadas, van a realizar doble conteo sobre elementos (vértices o aristas) que forman parte de dos o más caras, como se puede comprobar en el análisis de las respuestas a la tarea del cubo truncado.

Al igual que Saads y Davis (1997), observamos que los alumnos utilizan un vocabulario geométrico incorrecto para nombrar las caras de las figuras tridimensionales, llamando “lados” a las mismas y, en algún caso, empleando el mismo término (lados) para referirse a las aristas del cubo.

La configuración CC2 lleva asociado el error 2P. En esta configuración, al centrar la atención sobre una cara y sólo sobre las aristas de la misma que son cortadas, se retira del campo visual lo cortado de forma que sólo se percibe un cuadrado (paralelogramo). Esta imagen de un cuadrado sobre una de las caras del cubo (de área la mitad y girado con respecto a la cara original) actúa como un distractor visual, conduciendo a los estudiantes a la identificación del nuevo cuerpo con un cubo (ortoedro) y, por tanto, con igual número de vértices que la figura inicial. Se extiende a tres dimensiones la imagen (cuadrado) obtenida en una de las caras del cubo inicial.



En el caso de la configuración CC2, la figura obtenida no es un cubo sino un ortoedro de dimensiones $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1$. Si se pidiera al estudiante que definiera el concepto de cubo, tal y como remarcan Tall y Vinner (1981), éste podría recitar de memoria la definición aprendida (definición de un concepto, Vinner y Hershkowitz, 1983) y, a pesar de ello, no son capaces de utilizarla en el momento de realizar la tarea. Estas discrepancias ponen de manifiesto la diferencia que hay para los estudiantes entre imagen y definición de un concepto, y los diferentes usos que hacen de ambas. Además, la argumentación asociada a la configuración CC2 está en consonancia con lo que llama Battista (2007, p. 309) “comparación visual holística de formas”, ya que los alumnos se centran en la apariencia de la forma completa, no en partes de las formas, lo que los induce a concluir que la figura resultante, como tiene forma de cubo, es un cubo.

En el caso de las configuraciones CC1 y CC7, cuando además son apoyadas por una representación ostensiva (dibujo del nuevo sólido creado a partir del cubo inicial), se puede observar que la habilidad de identificación visual, necesaria para reconocer una figura aislándola del contexto en el que está, no está muy desarrollada puesto que no se separa el sólido obtenido del cubo inicial.

Si se analizan de forma conjunta las configuraciones CC6 y CC7, vemos que el esquema que siguen las dos parte de extrapolar la acción realizada sobre un elemento (vértice o cara) a las demás, considerando que hay vértices que son compartidos por las diferentes caras. Cabría suponer que, como consecuencia de esta similitud, la efectividad debería ser muy pareja en ambos casos. Sin embargo, como se puede observar en la tabla 5.6, la configuración CC7 es más efectiva que la configuración CC6 (85,71% y 60%, respectivamente) debido a que en esta última la acción realizada sobre un vértice se extrapola a un número incorrecto de elementos (interferencia caras con vértices).

La configuración CC3 nos muestra una clara relación entre la estructura espacial que tiene un alumno de un objeto con la enumeración que sigue. La enumeración llevada a cabo por los estudiantes que tienen esta configuración es organizada y correcta (primero cuentan los vértices de las bases y después los vértices laterales). Al igual que observaron Battista y Clements (1996, p. 288) en estudiantes de segundo curso de primaria, nuestros estudiantes organizan espacialmente los elementos de la configuración en tres conjuntos espaciales: las dos bases y el conjunto de las cuatro aristas laterales que permiten conectar las dos bases. En el caso de la CC8, los estudiantes organizan la nueva figura como un conjunto de seis compuestos espaciales que se corresponden con la acción realizada sobre las seis caras del cubo. En cuanto a efectividad (Tabla 5. 13), la configuración CC3 alcanza un valor bastante superior a la CC8, obteniéndose un 82,5% para la primera frente a un 50% de la segunda.

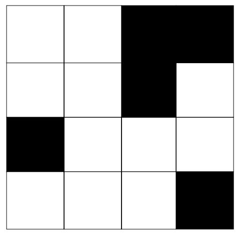
Tabla 5. 13. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 1

Tipo de configuración	Efectividad	Porcentaje
CC3	33	82,50
CC5	18	62,07
CC6	6	60,00
CC7	6	85,71
CC8	3	50,00

Todo lo visto en los párrafos anteriores pone de manifiesto que la estructura espacial de los objetos juega un papel esencial en situaciones espaciales cuantitativas, de forma que la estructura espacial que tienen los alumnos sobre un objeto proporciona la entrada y la organización para los procesos numéricos que usan para enumerar elementos del objeto. Dicho en otros términos "la estructura espacial precede a una enumeración significativa" (Battista y Clements, 1998, p. 504).

5.3.2. ÍTEM 2: SIMETRÍAS EN EL PLANO

¿Cuál es el menor número de cuadraditos que es necesario sombrear para que la figura resultante tenga por lo menos un eje de simetría? Indica en el dibujo cuáles serían esos cuadraditos.



a) 3 *b) 5* *c) 1* *d) 4* *e) 2*

5.3.2.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 2

La Tabla 5.14 muestra que la respuesta correcta es elegida por la cuarta parte de los sujetos, siendo superada por la opción *a)* en un 15%. El análisis de las respuestas permitirá observar que la elección de esta opción viene motivada por considerar que la figura resultante debe ser simétrica respecto a un eje horizontal.

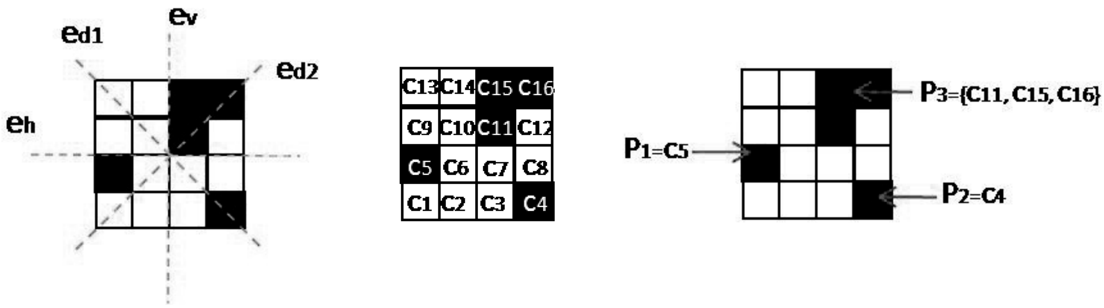
Tabla 5.14. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 2

	Frecuencia	Porcentaje
1	37	9,25
2	**102**	**25,50**
3	162	40,50
4	21	5,25
5	31	7,75
Ns/Nc	47	11,75
Total	400	100,00

5.3.2.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 2

Antes de proceder al análisis de las siete configuraciones cognitivas asociadas a este ítem, se describirá la notación en la que se apoyará el mismo con ayuda de la representación gráfica de la Figura 5.2.

Figura 5.2. Notación para el ítem 2



$N(e_v)$: Número de cuadraditos sombreados para que la figura tenga un eje de simetría vertical.

$N(e_h)$: Número de cuadraditos sombreados para que la figura tenga un eje de simetría horizontal.

$N(e_{d1})$: Número de cuadraditos sombreados para que la figura tenga un eje de simetría diagonal e_{d1}.

$N(e_{d2})$: Número de cuadraditos sombreados para que la figura tenga un eje de simetría diagonal e_{d2}.

N_e(C): Número de ejes de simetría de un cuadrado.

$N(P_i)$: Número de cuadraditos necesarios para formar una figura simétrica con la parte P_i con $i = 1, 2, 3$.

<u>Configuración cognitiva 1</u> (CC1). *Considerar únicamente como ejes de simetría el vertical* (e_h) *y/o el horizontal* (e_v) *del cuadrado exterior*. En esta configuración cognitiva vamos a diferenciar tres procedimientos con sus tres argumentaciones, según se haya considerado sólo el eje vertical, sólo el eje horizontal o los dos ejes.

- Lenguaje: "eje horizontal", "eje vertical", "mitad del dibujo", "divido la figura", "doblando la figura por la mitad coincide", completar, "menor número", "espejo". Notación: N_e(C), $N(e_v)$, $N(e_h)$.
- Conceptos: cuadrado, ejes de simetría, figura simétrica, número mínimo, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) los cuadraditos negros forman parte de una única figura, no son partes independientes; b) un cuadrado tiene al menos un eje de simetría, horizontal o vertical; c) una figura tiene un eje de simetría si al doblarla por dicho eje las dos partes en las que el eje divide a la figura coinciden; d) una línea

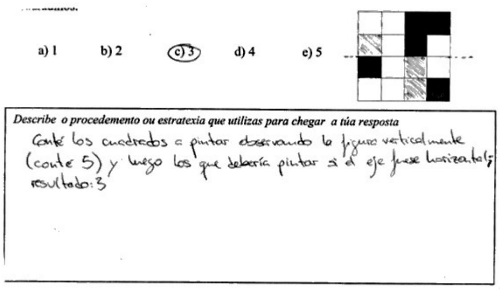
divide un plano en dos partes; e) el número de cuadraditos a ambos lados del eje ha de ser el mismo; f) la unidad de medida de superficie es un cuadradito.

- Procedimiento 1: considerar el eje de simetría horizontal del cuadrado exterior (e_h) sombrear el número mínimo de cuadraditos que hacen falta para que la figura tenga a e_h como eje de simetría.
- Argumento 1: se toma el eje de simetría horizontal del cuadrado exterior e_h. En la parte superior hay tres cuadraditos negros (c_{11}, c_{15}, c_{16}) por lo que habrá que sombrear por lo menos tres en la parte inferior del eje que se mantengan en las mismas columnas que estos y a igual distancia del eje respectivamente. Como ya hay uno negro (c_4) que está sobre la misma columna que c_{16} y a la misma distancia del eje (que coincide al doblar por el eje) se necesitaría sombrear como mínimo dos más, el c_7 y c_3. Por otra parte, como en la parte inferior del eje de simetría había un cuadradito negro (c_5) habrá que sombrear el c_9 también para que coincidan al doblar por el eje. Al final, sumando los que se sombrearon en la parte inferior del eje y los de la parte superior, la solución es $N(e_h)$ cuadraditos.
- Procedimiento 2: considerar el eje de simetría vertical del cuadrado exterior (e_v), sombrear el número mínimo de cuadraditos que hacen falta para que la figura tenga a e_v como eje de simetría.
- Argumento 2: se toma el eje de simetría vertical e_v del cuadrado exterior. Como a la derecha del eje hay cuatro cuadraditos negros (habrá que sombrear por lo menos cuatro en la parte izquierda del eje de modo que al doblar (mentalmente o físicamente) por dicho eje los cuadraditos negros coincidan ($c_1, c_{10}, c_{13}, c_{14}$). Además, como en la parte izquierda del eje había un cuadradito negro (c_5) que no coincide al doblar con ninguno de la parte derecha habrá que sombrear por lo menos otro más en esa parte (c_8) también. Como resultado final hay que sombrear en total ($N(e_v)$) cuadraditos.
- Procedimiento 3: se consideran los dos ejes de simetría del cuadrado exterior, el horizontal y el vertical. Se sombrean los cuadraditos correspondientes a uno de los ejes, se sombrean los cuadraditos correspondientes al otro eje. Se cuentan los cuadraditos sombreados con cada uno de los ejes. Se elige como resultado el menor de esos números.
- Argumento 3: como el cuadrado tiene dos ejes de simetría habrá que ver cuál de esos ejes proporciona una figura simétrica sombreando el menor número de

cuadraditos. Para ello se repiten los argumentos 1 y 2 de esta configuración. Uno detrás del otro. Del eje vertical obtengo $N(e_v)$ cuadraditos y del eje horizontal $N(e_h)$ cuadraditos. Por lo tanto, la solución será el $\min\{N(e_v), N(e_h)\}$.

En esta configuración el número mínimo está asociado al eje elegido, es decir, una vez elegido ese eje se pueden construir diferentes figuras simétricas con ese eje de simetría. De entre todas las anteriores se elige la que menos número de cuadraditos necesite para ser simétrica. Aquí también contemplamos aquellas respuestas que no eligen el número mínimo para esos ejes. Por otra parte, los que consideran sólo un eje (horizontal ó vertical) es posible que no comprendan el significado exacto de la expresión "al menos uno"; por lo que de forma que elijen uno de ellos arbitrariamente y construyen una figura simétrica con respecto a ese eje.

Ejemplo de respuesta 5.9. Configuración cognitiva CC1 del ítem2. Argumento 3



Transcripción:

Conté los cuadrados a pintar observando la figura verticalmente (conté 5) y luego los que debería pintar si el eje fuese horizontal, resultado: 3

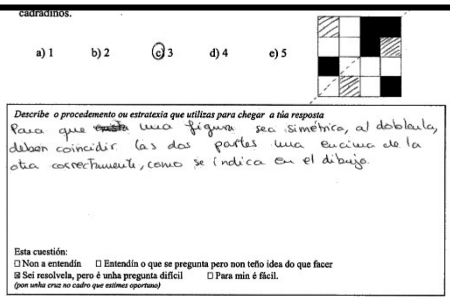
Configuración cognitiva 2 (CC2). *Considerar como ejes de simetría los ejes diagonales* (e_{d1}) *y/ó* (e_{d2}) *del cuadrado exterior.* Al igual que en el análisis de la anterior configuración, se considerarán tres procedimientos con sus argumentaciones correspondientes dependiendo del eje elegido para realizar la acción.

- Lenguaje: "dos triángulos simétricos", "se divide en dos triángulos", "el eje corta a algunos cuadraditos negros por la mitad"
- Conceptos: cuadrado, triángulo, ejes de simetría diagonales de un cuadrado, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) los cuadraditos negros forman parte de una única figura, no son partes independientes; b) un cuadrado tiene dos ejes de simetría diagonales; c) cada uno de estos ejes divide al cuadrado en dos triángulos; d) la unidad de medida de superficie es un cuadradito.

- Procedimiento 1: Considerar el eje diagonal e_{d1} del cuadrado exterior. Observar que ese eje es el eje de simetría diagonal del cuadradito c_4. Reproducir, al menos, la forma P_3 de la mitad del cuadrado que queda por encima del eje en la otra mitad del mismo.
- Argumento 1: Se toma el eje diagonal e_{d1} del cuadrado exterior. Este eje coincide con uno de los ejes diagonales de simetría del cuadradito c_4 dejando mitad de c_4 por encima y la otra mitad por debajo del eje. Por encima del eje quedan tres cuadraditos negros enteros lo que implica que haya que sombrear, por lo menos, dos cuadraditos en la parte que está por debajo del eje (triángulo inferior) de modo que al doblar (mentalmente o físicamente) por dicho eje los cuadraditos negros que están por encima coincidan con los que están por debajo del eje. Como resultado final hay que sombrear un total de $N(e_{d1})$ cuadraditos.
- Procedimiento 2: Considerar el eje diagonal e_{d2} del cuadrado exterior. Observar que ese eje es el eje de simetría diagonal de los cuadraditos c_{15} y c_{16}. Reproducir, al menos, aquellos cuadraditos que están sobre una de las mitades del cuadrado (triángulo) y que no tienen a e_{d2} como eje de simetría diagonal sobre la otra mitad del cuadrado.
- Argumento 2: como el cuadrado tiene dos ejes diagonales, se toma el eje diagonal e_{d2} del cuadrado exterior. Este eje coincide con el eje de simetría de los cuadraditos c_{11} y c_{16} dejando la mitad de cada uno de ellos por encima y la otra mitad por debajo del eje. Por encima del eje quedan dos cuadraditos negros enteros (c_5, c_{15}) lo que implica que haya que sombrear, como mínimo, dos cuadraditos en la parte que está por debajo del eje (triángulo inferior) de modo que al doblar (mentalmente o físicamente) por dicho eje los cuadraditos negros que están por encima coincidan con los que están por debajo del eje. Por otra parte, debajo del eje se tiene el cuadradito c_4 que implica que encima del eje haya que sombrear, por lo menos otro cuadradito más. Como resultado final hay que sombrear un total de $N(e_{d2})$ cuadraditos.
- Procedimiento 3: Considerar los dos ejes de simetría diagonal del cuadrado exterior. Involucra los procedimientos 1 y 2 descritos anteriormente para los dos ejes diagonales e_{d1} y e_{d2}, respectivamente. El resultado será el número más pequeño de los obtenidos al seguir esos dos procedimientos.

- Argumento 3: Como el cuadrado tiene dos ejes de simetría diagonales habrá que ver cuál de esos ejes proporciona una figura simétrica sombreando el menor número de cuadraditos. Para ello se repiten los argumentos 1 y 2 de esta configuración. Uno después del otro. Del eje diagonal e_{d1} obtengo $N(e_{d1})$ cuadraditos y del eje diagonal e_{d2} obtengo $N(e_{d2})$ cuadraditos. Por lo tanto la solución será el $min\{N(e_{d1}), N(e_{d2})\}$.

Ejemplo de respuesta 5.10. Configuración cognitiva CC3 del ítem 2. Argumento 2


cadradiños.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

Para que ~~esta~~ una figura sea simétrica, al doblarla, deben coincidir las dos partes una encima de la otra correctamente, como se indica en el dibujo.

Esta cuestión:
☐ Non a entendín ☐ Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer
☒ Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil ☐ Para min é fácil.
(pon unha cruz no cadro que estimes oportuno)

Transcripción:

Para que una figura sea simétrica, al doblarlas deben coincidir las dos partes una encima de la otra correctamente, como se indica en el dibujo.

Configuración cognitiva 3 (CC3). *Reproducción de la figura P_3 para formar una figura conexa.* Se considera P_3 como "la figura" que hay en la representación gráfica dada en el enunciado y se reproduce un determinado número *m* de veces.

En esta configuración llamaremos $N_c(P_i)$ al número de cuadraditos que componen la forma P_i con $i = 1, 2, 3$.

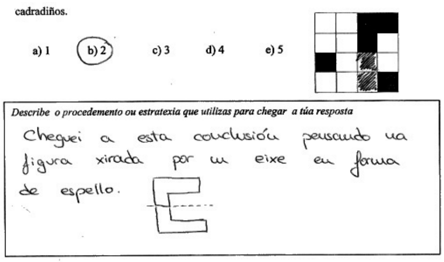
Se denota por *m* el número de veces que se reproduce P_3.

Se divide el cuadrado exterior en cuatro cuadrantes a través del eje de simetría horizontal e_h y el vertical e_v del cuadrado exterior. Se considera como primer cuadrante aquel en el que está la figura P_3 y se numeran los demás siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj.

- Lenguaje: "tener la figura *m* veces", "*m* figuras iguales", "girar", "unir las figuras", "repetir".
- Conceptos: cuadrado, figura, eje de simetría, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) un cuadrado se puede dividir en cuatro cuadrantes iguales a través de sus ejes de simetría horizontal y vertical; b) la unidad de medida de superficie es el cuadradito; c) un eje de simetría de una figura la divide en dos partes iguales; d) una figura ha de ser conexa; e) una figura ha de estar formada por más de un cuadradito.

- Procedimiento 1: establecer P_3 como la figura a repetir. Observar que en el tercer y cuarto cuadrante hay sólo un cuadradito. Considerar sólo el cuadradito que está en el cuarto cuadrante y sombrear cuadraditos para obtener la misma forma que P_3. La solución vendrá dada por el número de cuadraditos sombreados en ese cuadrante.
- Argumento 1: como la única figura que hay en el dibujo es P_3, al estar formada por más de un cuadradito, se considera como figura a reproducir P_3. Esta figura se encuentra en el primer cuadrante del cuadrado exterior. En el cuarto cuadrante ya hay un cuadradito sombreado lo que lleva a sombrear dos más para obtener la misma forma que tiene P_3. Como la tarea habla de que la figura tenga “al menos” un eje de simetría con la acción realizada antes se obtendría un eje de simetría que coincidiría con e_h. Por tanto, el menor número de cuadraditos que se necesitan será $N_c(P_3) - N_c(P_1)$.

Ejemplo de respuesta 5.11. Configuración cognitiva CC8 del ítem 2. Argumento 1

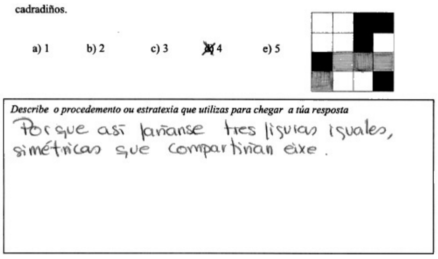


Transcripción:

Llegué a esa conclusión pensando en la figura girada por un eje en forma de espejo.

- Procedimiento 2: considerar P_3 como la figura a repetir. Observar que en el tercer y cuarto cuadrante hay sólo un cuadradito. Sombrear en cada cuadrante de los anteriores dos cuadraditos más para obtener la misma forma que P_3. Sumar todos los cuadraditos sombreados, que serán los que proporcionen la solución.
- Argumento 2: como la única figura que hay en el dibujo es P_3, al estar formada por más de un cuadradito, se considera como figura a reproducir. Esta figura se encuentra en el primer cuadrante del cuadrado exterior. En los cuadrantes 3 y 4 ya hay un cuadradito sombreado lo que lleva a sombrear dos más en cada uno reproduciendo la misma forma que tiene P_3. Como en el segundo cuadrante no hay ningún cuadradito sombreado no es necesario completar nada. Entonces, el menor número de cuadraditos que se necesitan será $2 \times (N_c(P_3) - N_c(P_1))$.

Ejemplo de respuesta 5.12. Configuración cognitiva CC5 del ítem2. Argumento 2



Transcripción:

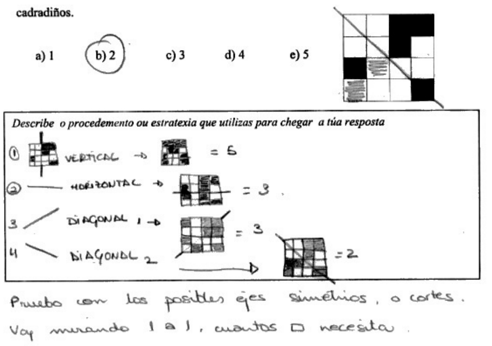
Porque así se harían tres figuras iguales, simétricas que compartirían eje.

<u>Configuración cognitiva 4</u> (CC4). *Comprobación exhaustiva de casos*. Se hace una comprobación con los cuatro ejes de simetría que tiene el cuadrado (e_h, e_v, e_{d1}, e_{d2}).

- Lenguaje: vertical, horizontal, diagonales, "N_e(C) posibles ejes de simetría" "sombrear", "uno a uno", "al menos", única figura, "menor número". Notación: N_e(C). Icónico: representación gráfica de cuatro cuadrículas, cada una con los cuadritos sombreados que se necesitan para conseguir una figura simétrica respecto de cada uno de los ejes de simetría del cuadrado exterior. Representación gráfica sobre la cuadrícula del enunciado de la tarea de la solución.
- Conceptos: cuadrado, ejes de simetría de un cuadrado, número mínimo de un conjunto de números, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) los cuadraditos negros forman parte de una única figura, no son partes independientes; b) un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría (uno horizontal otro vertical y los dos asociados a sus diagonales); c) una figura tiene un eje de simetría si al "doblar" por el eje ambas mitades coinciden (visión de eje de simetría como mediatriz); d) equidistancia al eje; e) invariancia de los puntos del eje; f) perpendicularidad respecto del eje; g) la unidad de medida de superficie es un cuadradito.
- Procedimiento: para cada uno de los cuatro ejes de simetría del cuadrado exterior, sombrear el número mínimo de cuadraditos que hacen falta para obtener una figura con un eje de simetría por lo menos. Contar el número sombreado para cada caso y elegir el número más pequeño de todos ellos.
- Argumento: como la figura está enmarcada en un cuadrado y un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, se utilizan dichos ejes para considerar las posibles opciones. Al marcar el eje e_v hay que sombrear $N(e_v)$ cuadritos para obtener

una figura simétrica, al hacerlo para el eje e_h se sombrean $N(e_h)$, con el eje e_{d2} se sombrean $N(e_{d2})$ y con el eje e_{d1} se sombrean $N(e_{d1})$ cuadraditos. Por lo tanto, el número mínimo de cuadraditos a sombrear es min $\{N(e_v), N(e_h), N(e_{d1}), N(e_{d2})\}$.

Ejemplo de respuesta 5.13. Configuración cognitiva CC4 del ítem 2



Transcripción:

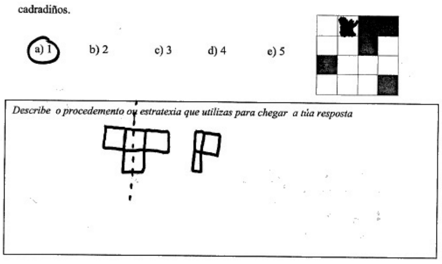
Pruebo con los posibles ejes simétricos, o cortes.

Voy mirando 1 a 1, cuantos cuadraditos necesita.

Configuración cognitiva 5 (CC5). *Simetrizar sólo una de las partes de la figura*. Se considera que la figura está formada por tres partes independientes (P_1, P_2, P_3) y se elige una de ellas para construir una figura simétrica.

- Lenguaje: "tres partes de la figura", "elegir una de las partes", cuadradito, "doblar", "dividir la figura por la mitad".
- Conceptos: ejes de simetría, cuadrado, ejes de simetría de un cuadrado, número mínimo de un conjunto de números, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) La figura está formada por tres partes diferenciadas e independientes; b) una figura tiene un eje de simetría si al "doblar" por el eje ambas partes de la figura coinciden (visión de eje de simetría como mediatriz); c) equidistancia al eje; d) invariancia de los puntos del eje; e) perpendicularidad respecto del eje; f) una figura ha de ser conexa; g) la unidad de medida de superficie puede ser más pequeña que un cuadradito (la mitad de un cuadradito).
- Procedimiento: elegir una de las tres partes que componen la figura, sombrear los cuadraditos necesarios para formar una figura simétrica con la parte elegida. Contar el número de cuadraditos sombreados que serán los que proporcionen la respuesta a la tarea.
- Argumentación: como cada parte es independiente se elige una de ellas P_i (i=1, 2, 3) y se completa sombreando cuadraditos para obtener una figura que tenga al menos un eje de simetría. El resultado vendrá dado por $N(P_i)$.

Ejemplo de respuesta 5.14. Configuración cognitiva CC5 del ítem 2

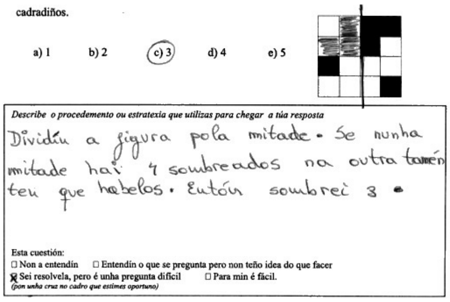


Configuración cognitiva 6 (CC6). *Idea de regularidad o estabilidad visual.* Asociada a la identificación de simetría con "regularidad" o "estabilidad" visual, basada en la concepción de eje de simetría como separación que deja a ambos lados la misma cantidad de magnitud (en este caso de superficie). Reproducción de lo que hay a un lado del eje al otro lado sin importar, en muchos casos, la equidistancia con respecto al eje de simetría. Se conserva la forma de la figura o, en su caso, la forma de cada una de las partes que forman la figura.

- Lenguaje: "mismo número de cuadraditos en las dos partes", "misma masa/volumen", "tenemos dos figuras iguales", "igual forma", "lo mismo pero con diferente sentido", "en dirección opuesta", "mitad del cuadrado", "sentido inverso".
- Conceptos: cuadrado, eje de simetría, forma (contorno) de una figura, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) un eje de simetría de una figura la divide en dos partes iguales; b) un cuadrado tiene al menos un eje de simetría; c) la unidad de medida de superficie es un cuadradito.
- Procedimiento: dividir el cuadrado en dos partes iguales. Sombrear en una de las partes el mismo número de cuadraditos sombreados que hay en la otra manteniendo la forma que tenían en esa parte. Hacer lo mismo con los cuadraditos que hay en la otra mitad del cuadrado. La solución será la suma de los cuadraditos que se sombrearon en cada mitad del cuadrado exterior.
- Argumento: se divide el cuadrado exterior en dos partes a través de alguno de sus ejes de simetría ($e_i,\ i = 1, 2$). Como lo que se pretende es reproducir la misma figura a ambos lados de los ejes, si se elige el eje e_i, se tiene en la parte de la derecha del eje a P_i y a P_{i+1}. Por tanto, debemos reproducir esas formas en

la parte izquierda del eje, sombreando tantos cuadraditos como necesitemos para ello. La solución será $N(P_i) + N(P_{i+1})$.

Ejemplo de respuesta 5.15. Configuración cognitiva CC6 del ítem 2


cadradiños.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

Dividín a figura pola mitade. Se nunha mitade hai 4 sombreados na outra tamén teu que habelos. Entón sombrei 3.

Esta cuestión:
☐ Non a entendín ☐ Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer
☒ Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil ☐ Para min é fácil.
(pon unha cruz no cadro que estimes oportuno)

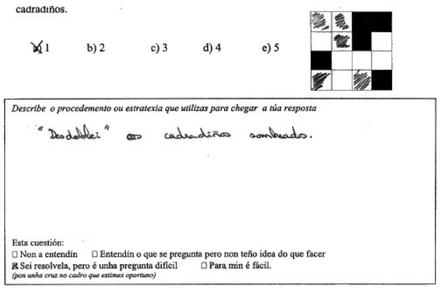
Transcripción:

Dividí la figura por la mitad. Si en una mitad hay 4 sombreados en la otra también tiene que haberlos. Entonces sombreé 3.

Configuración Cognitiva 7 (CC7). *Simetrizar cada una de las partes de la figura.* Se considera la figura formada por tres partes independientes pero se actúa sobre todas ellas, construyendo con cada una de las partes una figura simétrica.

- Lenguaje: “tres partes de la figura”, “esta parte sale con menos”, “cuadradito”, “doblar”.
- Conceptos: eje de simetría, número mínimo de un conjunto, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) la figura está formada por tres partes diferenciadas e independientes; b) una figura tiene un eje de simetría si al “doblar” por el eje ambas partes de la figura coinciden (visión de eje de simetría como mediatriz); c) equidistancia al eje; d) invariancia de los puntos del eje; e) perpendicularidad respecto del eje; f) la unidad de medida de superficie es un cuadradito.
- Procedimiento 1: sombrear cuadraditos para obtener en cada una de las tres partes una figura que tenga un eje de simetría. Contar cuantos cuadraditos se necesitaron en cada una de las tres figuras nuevas creadas. Considerar como solución el menor valor de los tres obtenidos en el conteo.
- Argumentación 1: como la figura está formada por tres partes independientes, se analiza cada una de las partes por separado. Se toma la parte P_1 y se completa una figura simétrica añadiéndole cuadraditos a esa parte. Se realiza lo mismo en las otras dos partes, obteniendo $N(P_2)$ y $N(P_3)$ cuadraditos para las partes P_2 y P_3, respectivamente. El resultado será el menor valor de los tres obtenidos, es decir min $\{N(P_1), N(P_2), N(P_3)\}$.

Ejemplo de respuesta 5.16. Configuración CC7 del ítem 2. Argumento 1

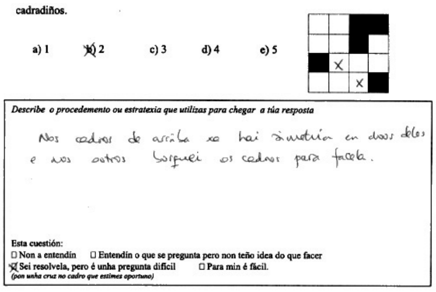


Transcripción:

“Desdoblé” los cuadraditos sombreados.

- Procedimiento 2: sombrear cuadraditos para obtener en cada una de las tres partes una figura que tenga un eje de simetría. Contar cuantos cuadraditos se necesitaron en cada una de las tres figuras nuevas creadas. El resultado será la suma de los tres valores que se obtuvieron en el paso anterior.
- Argumentación 2: como la figura está formada por tres partes independientes se analiza cada una de las partes por separado. Se toma la parte P_1 y se completa una figura simétrica añadiéndole $N(P_1)$ cuadraditos a esa parte. Se realiza lo mismo en las otras dos partes, obteniendo $N(P_2)$ y $N(P_3)$ cuadraditos para las partes P_2 y P_3, respectivamente. El resultado será la suma de los tres valores obtenidos: $N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)$.

Ejemplo de respuesta 5.17. Configuración CC7 del ítem 2. Argumento 2



Transcripción:

En los cuadrados de arriba ya hay simetría en dos de ellos y en los otros busqué los cuadrados para hacerla.

5.3.2.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas

En la Tabla 5.15 podemos observar que la configuración que más representación tiene con una gran diferencia respecto de las demás, es aquella que aplica los ejes horizontal y/ó vertical para realizar la simetría (configuración CC1). Así, tal y como Gutiérrez (1998a, p. 206) refleja en sus investigaciones, cuando se trabaja con geometría espacial (o con isometrías o polígonos) se comprueba que unos segmentos pueden actuar como distractores de otros y que determinadas direcciones de dibujo, como la vertical y la horizontal, resultan más fáciles de interiorizar y emplear que otras. Esta afirmación se corrobora al ver la suma de los porcentajes obtenidos en las configuraciones CC2 y CC4, que sí tienen en cuenta las direcciones diagonales, la cual se queda en un discreto 18,75%. Hay un alto porcentaje de sujetos que no entiende la tarea (15%), lo que llevará a profundizar sobre las posibles causas en el análisis de los errores encontrados.

Tabla 5.15. Frecuencia y porcentaje de los tipos de configuraciones asociadas al ítem 2

Tipo de configuración	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Aplicación eje horizontal y/ó vertical.	107	26,75
CC2	Aplicación ejes diagonales.	46	11,50
CC3	Reproducción de P_3 .	30	7,50
CC4	Comprobación exhaustiva de casos.	29	7,25
CC5	Simetrizar sólo una de las piezas.	22	5,50
CC6	Idea de estabilidad o regularidad visual.	22	5,50
CC7	Simetrizar cada una de las piezas.	8	2,00
NC	No argumenta la opción o deja la respuesta en blanco.	76	19,00
NE	No entiende	60	15,00
TOTAL		400	100

Atendiendo a los efectos o distractores visuales de este ítem, se observa que las configuraciones CC1, CC2 y CC4 consideran la figura como un todo, comprendiendo que es no conexa y que, a pesar de contar con partes sobre las que se puede actuar de forma independiente, todas ellas conforman un único conjunto. Sin embargo, las configuraciones CC5 y CC7 interpretan que cada parte negra del dibujo es independiente de las demás, cada una de ellas es una figura que no forma parte de un todo global, lo que conduce a que la posible acción sobre una de ellas no afecta a cada una de las demás partes. Esta consideración de las partes negras como independientes establece otra diferencia importante con las demás configuraciones (CC1, CC2, CC3, CC4 y CC6) al no contemplar la rejilla cuadrangular como un elemento fundamental para la búsqueda de posibles ejes de simetría de la nueva figura. En el caso de estas dos configuraciones CC5 y CC7, se consideran como ejes todos los posibles dentro de la cuadrícula (los que marcan las líneas horizontales y verticales de la cuadrícula, los diagonales pasando por puntos de la cuadrícula y también aquellos que pasan por la mitad de las cuadrículas). En las demás configuraciones, el cuadrado exterior es un elemento clave referencial que proporciona los posibles ejes de simetría, y no sólo eso sino que en muchos casos ese cuadrado es considerado como “la figura” que hay que simetrizar teniendo en cuenta el contenido interior (los cuadraditos negros). Constituye un referente visual importante en todas las configuraciones exceptuando las configuraciones CC5 y CC7.

En la configuración CC3 el centro de atención está puesto en P_3, considerando esa parte como la única figura que aparece en el dibujo lo que implica que es el elemento fundamental de la acción. La diferencia con las configuraciones CC5 y CC7 es que en estas las tres partes son consideradas como figuras por sí mismas, mientras que en la configuración CC3 esa característica sólo la cumple P_3.

La configuración CC6 considera, en todos aquellos casos en los que el estudiante explicita qué ejes utiliza, los ejes horizontal y vertical del cuadrado exterior. Esta circunstancia, unida a la idea de partir el cuadrado en dos partes iguales, hace que se sombreen siempre dos formas diferentes en cada uno de los lados en que se divide el cuadrado exterior a través de cada uno de esos ejes. Se podría pensar que la “figura” de esta configuración está formada por dos partes P_3 y P_2.

En todas las configuraciones se usa la visión de eje de simetría como mediatriz (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 76).

5.3.2.4. Análisis de errores

A continuación se presentan, en la Tabla 5.16, los tipos de errores encontrados en las respuestas a este ítem. Llama la atención el porcentaje tan bajo de respuestas correctas (8,5%), incluso teniendo en cuenta que las situaciones en las que el eje de simetría corta a la figura son más difíciles (Gutiérrez y Jaime, 1996). El error más frecuente es el error 2C (27,25 %), el cual está relacionado con el hecho de que los estudiantes no consideran o no reconocen todos los ejes de simetría del cuadrado exterior, en particular los diagonales, siendo uno de estos el que conduce a la solución correcta de la tarea. Otro error con un porcentaje bastante elevado es el error situacional 4S que está muy por encima de los demás del mismo tipo.

Tabla 5.16. Tipo de errores asociados al ítem 2

Tipos de error	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores	34	8,50
EB	No contesta/No argumenta	66	16,50
EBC	Sin argumento con opción correcta	11	2,75
1C	No recordar o aplicar incorrectamente las propiedades de la simetría axial	19	4,75
2C	No reconocer o no considerar todos los ejes de simetría del cuadrado exterior.	109	27,25
3C	Interpretación reducida o deformada de la simetría	29	7,25
4C	Prolongación de la figura P_3 en la dirección e_{d2}	11	2,75
1S	Afirmar verbalmente no comprender la tarea	12	3,00
2S	No respetar la restricción de "mínimo número de cuadritos"	17	4,25
3S	Añadir cuadraditos negros para obtener una figura conexa	9	2,25
4S	Considerar cada parte negra como una figura individual	68	17,00
5S	Desplazamiento de cuadraditos negros para formar una figura simétrica sin añadir nuevos cuadraditos	2	0,50
6S	Considerar como figura el "negativo de la dada"	2	0,50
1V	1C+2C	11	2,75
Total		400	100,00

En el error 1C se incluyen todas aquellas respuestas que expresan verbalmente que no recuerdan qué es un eje de simetría y también aquellos que no aplican correctamente alguna de las propiedades de la simetría axial (equidistancia al eje, perpendicularidad al eje, invariancia de los puntos del eje).

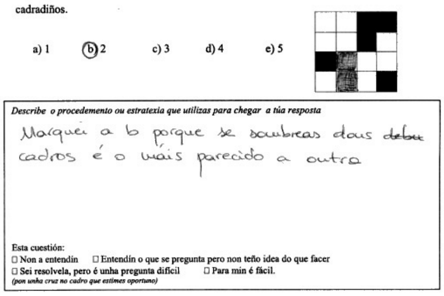
No reconocer o no considerar todos los ejes de simetría del cuadrado, en particular los ejes diagonales está recogido en el error 2C. Podemos detectar tres situaciones:

- En muchos casos se elije un eje y se sombrean cuadraditos para obtener una figura simétrica con respecto a dicho eje, sin tener en cuenta que podría existir otro con el que el número mínimo fuera menor. Es decir, como si el número de cuadraditos a sombrear no dependiera de la elección del eje. Puede ocurrir que sea consecuencia del enunciado del ítem: "...*al menos un* eje de simetría..." conflicto semiótico asociado a la faceta expresión/contenido (Godino, 2002), interpretando que con encontrar uno ya es suficiente.
- En muchos casos los estudiantes expresan, de forma verbal, que analizan varios ejes, pero sólo marcan uno en la respuesta por lo que es difícil saber si, realmente, el análisis ha incluido los cuatro posibles. Lo más probable es que consideren sólo el horizontal y el vertical. Por esta razón sólo se ha considerado para el análisis el número de ejes que marcan o que explicitan de forma verbal.

El alto porcentaje de este tipo de error está relacionado con el descrito por Gutiérrez y Jaime (1996) como segundo tipo de error. Concretamente su origen está en una interpretación reducida de la simetría, provocada por prototipos inducidos por una instrucción inadecuada, o bien, si no ha habido una enseñanza previa (que no es el caso), por una concepción inconsciente, derivada de la predominancia de ejes verticales y horizontales en la cultura que nos rodea.

El error 3C se basa en una interpretación reducida o deformada de la simetría. Esa idea implica que no se consideren propiedades de la simetría axial como, por ejemplo, la equidistancia al eje. Podría interpretarse, de acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1996, p. 62), que dichos errores surgen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual. Según estos autores, estas respuestas tienen su origen en una enseñanza pobre, al no presentárseles a los alumnos ejemplos con ejes de simetría distintos a los horizontales y verticales. También podría ajustarse a la idea de que los ejes de simetría son rectas que dividen a las figuras en dos partes iguales (idéntica superficie) (Birks, 1987, citado en Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 75) (Ejemplo de respuesta 5.18).

Ejemplo de respuesta 5.18. Error 3C en el ítem 2

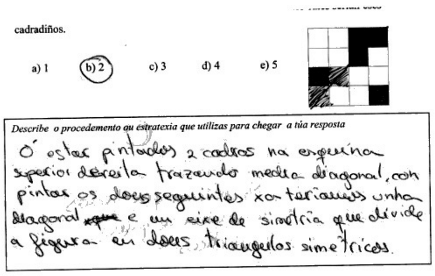


Transcripción:

Marqué la b) porque si sombreas dos cuadros es lo más parecido a la otra.

El error 4C (Ejemplo de respuesta 5.19) también está asociado a una interpretación deformada de la simetría considerando la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica. En concreto, la figura se prolonga a lo largo del eje diagonal e_{d2}, realizando una traslación en la dirección de dicho eje.

Ejemplo de respuesta 5.19. Error 4C en el ítem2



Transcripción:

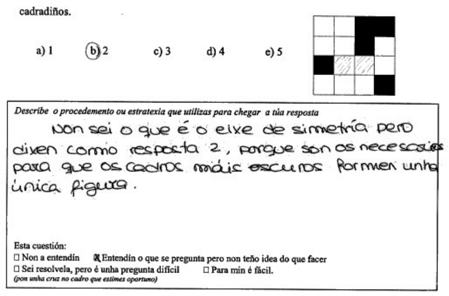
Al estar pintados 2 cuadraditos en la esquina superior derecha trazando media diagonal, con pintar los dos siguientes ya tendríamos una diagonal que es un eje de simetría que divide a la figura en dos triángulos simétricos.

Cometer conjuntamente el error 1C y el 2C se indica con la etiqueta 1V. En esta situación se cometen dos errores: uno por no recordar o no aplicar correctamente las propiedades de la simetría y otro por no reconocer todos los ejes de simetría de un cuadrado. Parece claro que ambos errores no son independientes, pues no recordar lo que es una simetría, ni un eje de simetría, implicaría no saber aplicar sus propiedades y como consecuencia difícilmente se podrían localizar los ejes de simetría de una figura.

En cuanto a errores situacionales, el error 2S se asigna al hecho de no respetar la restricción de que el número de cuadraditos a añadir debe ser mínimo. En la mayoría de los casos los estudiantes no perciben (no visualizan) que algunos de los cuadraditos que sombrean son innecesarios, ya que buscan todas las opciones y elijen la de menor número. Una interpretación es que la figura que se forme ha de tener tantos ejes de simetría como el cuadrado exterior, lo que lleva a sombrear más de los necesarios. En otros casos, es necesario aumentar el número de cuadraditos sombreados para lograr que todas las partes sean figuras convexas. Puede interpretarse a partir de lo que Hershkowitz (1990) denomina fenómenos prototipo y juicios prototípicos, que en su mayor parte son producto de procesos visuales, donde los atributos irrelevantes (concavidad) tienen fuertes características visuales que son percibidas en primer lugar, y actúan como distractores.

Como resultado de no considerar la figura ($P_1 \cup P_2 \cup P_3$) como un todo, por no ser conexa, nos encontramos con el error 3S (Ejemplo de respuesta 5.20), donde el objetivo principal es añadir cuadraditos negros para formar una figura conexa (estableciendo las uniones entre cuadraditos sólo a través de los lados). El análisis de este error nos muestra que, salvo un estudiante, todos los demás no consiguen formar figuras simétricas, lo cual conduce, además, a errores del tipo 1C.

Ejemplo de respuesta 5.20. Error 3S en el ítem 2

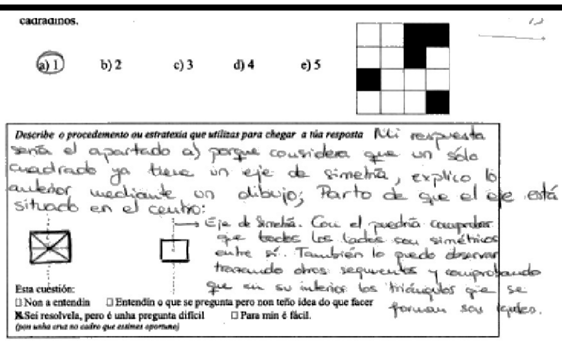


Transcripción:

No sé qué es un eje de simetría pero dije como respuesta 2, porque son los necesarios para que los cuadros más oscuros formen una única figura.

El error situacional 4S (Ejemplo de respuesta 5.21) implica la percepción de los cuadraditos negros como partes individuales e independientes. Este error podría explicarse a partir de la "ley de proximidad" por la cual nuestra percepción tiende a asociar los elementos que se encuentran cerca y a considerarlos como un grupo. De esta manera la imagen que se percibe está compuesta por tres grupos que se corresponden con P_1, P_2 y P_3.

Ejemplo de respuesta 5.21. Error 4S en el ítem 2



Transcripción:

Mi respuesta sería el apartado a) porque consideré que un solo cuadrado ya tiene un eje de simetría, explico lo anterior mediante un dibujo, parto de que el eje está situado en el centro. Con él podría comprobar que todos los lados son

	simétricos entre sí. También lo puedo observar trazando otros segmentos y comprobando que en su interior los triángulos que se forman son iguales.

El error 6S consiste en considerar como figura el “negativo” de la dada, es decir, los cuadrados negros son espacios vacíos con lo cual la figura a simetrizar es la que forman los cuadritos blancos.

Del análisis conjunto de configuraciones y errores podemos deducir una serie de conclusiones y relaciones que describimos seguidamente. El error 4S está asociado a las configuraciones CC5, CC7 y también a algunas respuestas NE, al considerar una parte cualquiera (P_1 , P_2 o P_3) y afirmar que es una figura simétrica por lo que no es necesario sombrear ninguno. Consecuencia de ese error es que dichas configuraciones CC5 y CC7 conducen a la respuesta de valor 1 ya que hay tener en cuenta que para conseguir una figura simétrica con cualquiera de las partes resulta bastante evidente que el número mínimo de cuadraditos a sombrear es uno.

En las configuraciones CC5, CC7, CC6 y en la configuración CC1 con argumentos 1 y 2 parece suficiente elegir uno de los ejes sin estudiar si hay o no más. Se elige uno y se ve cual es el menor número de cuadraditos hacen falta para obtener una figura con ese eje de simetría. Como ya se apuntó cuando se describió el error 2C, se interpreta la expresión “al menos uno” como “uno cualquiera, el que sea”, sin pararse a ver si cabría la posibilidad de otras opciones, lo que supone el 39,75 % de la muestra analizada.

Atendiendo a los errores derivados de la aplicación de las propiedades de la simetría, los resultados muestran que las configuraciones CC5 y CC7 no cometen esa clase de errores, como consecuencia de que las figuras que consideran son figuras familiares: a) un rectángulo formado al sombrear un cuadradito y añadírselo a P_1 o a P_2 ; b) un cuadrado formado por P_3 al que se le añade el cuadradito c_{12}. Los ejes que se utilizan como ejes de simetría son mayoritariamente horizontales y verticales, coincidiendo con los marcados por las líneas de las cuadrículas; pero no únicamente los derivados de la simetría del cuadrado exterior.

La configuración CC6 implica el error 3C que supone la interpretación del concepto de eje de simetría como la línea que divide la figura en dos partes iguales. Esa interpretación también se puede encontrar en las configuraciones CC1, CC2 y CC4; sin embargo, en la primera configuración se mantiene la cantidad de superficie a ambos lados del eje y se mantiene la forma de la figura a simetrizar aunque no la equidistancia al eje, mientras que en las configuraciones CC1 y CC4 sí se mantienen. En el caso de la configuración CC2 también se comete el error de falta de equidistancia, lo que podría explicarse porque los ejes de simetría oblicuos fomentan este tipo de error (Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 64).

Interpretando que las configuraciones CC1, CC2, CC4 y CC6 consideran el cuadrado exterior como la figura a simetrizar (51% de la muestra), se observa que los alumnos sí consideraron el interior de la figura y no sólo el perfil de la misma. Esto implicaría que, de darse esta situación, los estudiantes no habrían cometido uno de los errores asociados a tareas en las cuales se pide hallar ejes de simetría de las figuras y que consisten en fijarse en el contorno de la figura obviando lo que hay en su interior (Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 75).

El estudio de la efectividad (Tabla 5.17) de las configuraciones descarta todas aquellas que consideran las piezas negras como figuras independientes (CC3, CC5 y CC7). También se descartan las que sólo tienen en cuenta los ejes horizontal, vertical o ambos (CC1) y los que tienen argumento 1 en la configuración CC2 (aplicación del eje e_{d2}). Por lo tanto, este análisis tiene sentido en las configuraciones CC2 (salvo el argumento1), CC4 y en la CC6.

Tabla 5.17. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 2

Tipo de configuración	Efectividad	Porcentaje
CC2	13	28,26
CC4	20	68,97
CC6	0	0,00

Esta diferencia significativa en el porcentaje se puede deber a que en la configuración CC2, al no realizar ostensivamente las simetrías con los ejes horizontal y vertical, se pierde la perspectiva de la equidistancia al eje, provocando concepciones erróneas de tipo visual (errores 3C y 4C).

Al igual que se muestra en otras investigaciones relacionadas con este tema (Gutiérrez y Jaime, 1987; Gutiérrez y Jaime, 1996), cuando los estudiantes dibujan imágenes de objetos por medio de simetrías, surgen una serie de errores típicos como consecuencia de falsas concepciones. Según estos autores, estos errores son independientes de la edad, del contexto y del sistema educativo y se pueden dividir en dos tipos: a) errores cuyo origen está en la definición del concepto de simetría, los cuales surgen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura con su imagen (falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen, falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto con su imagen y combinaciones de los dos errores anteriores); y b) errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que aparecen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual: dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque esta no sea paralela al eje, desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de la figura esté inclinado, combinaciones de los dos errores anteriores y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica.

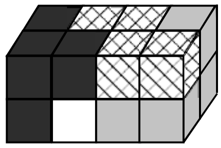
El estudio de Son (2006, p. 152) muestra que los maestros en formación tienen una comprensión limitada de la simetría axial y tienden a utilizar aspectos procedimentales de la simetría axial cuando usan estrategias de enseñanza. Al igual que en el estudio de este autor, se ha observado que muchos de estos maestros en formación confunden los conceptos de rotación y reflexión, empleándolos en las mismas situaciones.

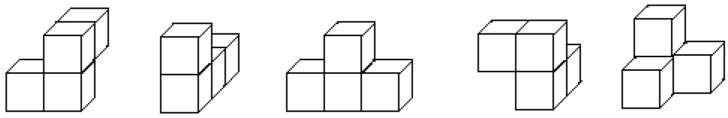
La elevada frecuencia del error 4S corrobora el hecho de que la complejidad de la figura que se debe simetrizar es una variable que hay que tener en cuenta, como ya apuntó Hart (1981). Si bien en investigaciones posteriores (Jaime y Gutiérrez, 1989, 1996; Orton, 1997) al analizar de manera más detallada la influencia de esta variable se deduce que la dificultad depende, básicamente, de la posición del eje. En nuestro caso, más que la complejidad de la figura, postulamos que ese alto porcentaje tiene su origen en prototipos inducidos por una instrucción poco idónea (Godino, Font y Wilhelmi, 2006), en la que la mayoría de los ejemplos son figuras conexas. la dificultad inherente a esta característica de la figura se ve acentuada por el hecho de que la solución al ítem pasa por utilizar un eje diagonal.

Otro aspecto a destacar, que también muestra la investigación de Schultz (1978), es que resulta más fácil el trabajo con figuras significativas que con figuras abstractas, lo cual sucede en nuestra tarea, pues la figura además de no ser conexa es no significativa. Todo ello puede explicar que el porcentaje de éxito no haya alcanzado ni un 10%, unido a que el 25,50% de la muestra lo hacen de forma mental, sin ninguna representación gráfica de los ejes utilizados (el 29,50 % de la muestra hace ostensible el/los ejes que se utilizan para resolver la tarea mientras que un 1,25% lo hace mediante doblado del papel físicamente).

5.3.3. ÍTEM 3: ORTOEDRO ENCAJABLE

Se forma un paralelepípedo rectángulo usando 4 piezas, cada una de ellas formada por 4 cubos (ver la figura de la derecha). Tres de las piezas se ven por completo; la blanca sólo parcialmente. ¿Cuál de las 5 piezas siguientes es la blanca?





(A) (B) (C) (D) (E)

5.3.3.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 3

En la Tabla 5.18 se observa que el 45,75 % de los estudiantes eligen como respuesta la opción correcta C. Destaca la frecuencia asociada a la opción E como segunda opción y el porcentaje de respuestas Ns/Nc, muy cercano a esta. Las demás opciones no tienen un impacto relevante.

Tabla 5.18. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 3

	Frecuencia	Porcentaje
A	14	3,50
B	22	5,50
C	**184**	**45,75**
D	22	5,50
E	80	20,00
Ns/Nc	79	19,75
Total	400	100,00

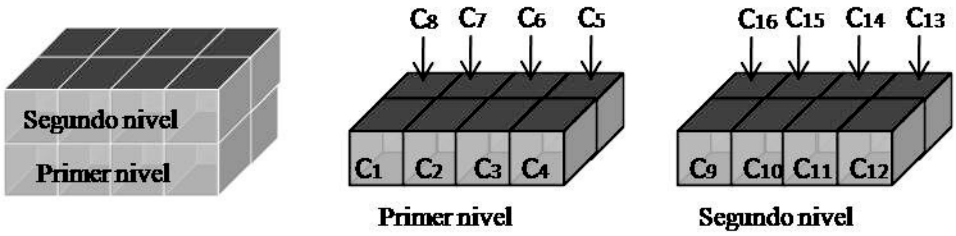
5.3.3.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 3

Se utilizará la siguiente notación (Figura 5.3) para facilitar la descripción de las diferentes configuraciones asociadas a este ítem:

P: paralelepípedo rectángulo.

$N(P)$: Número de cubitos unidad del paralelepípedo rectángulo.

Figura 5.3. Disposición de las celdas



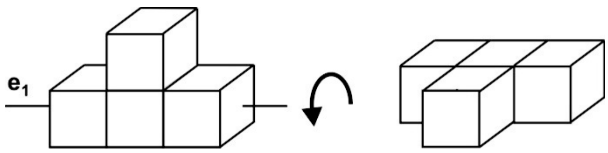
El análisis de respuestas lleva hacia ocho tipos de configuraciones asociadas a este ítem que se detallarán a continuación.

<u>Configuración cognitiva1</u> (CC1). *Justificación deductiva de la pieza blanca*. Deducción de la forma de la pieza blanca teniendo en cuenta los espacios ya ocupados por las otras y la comparación con las piezas dadas.

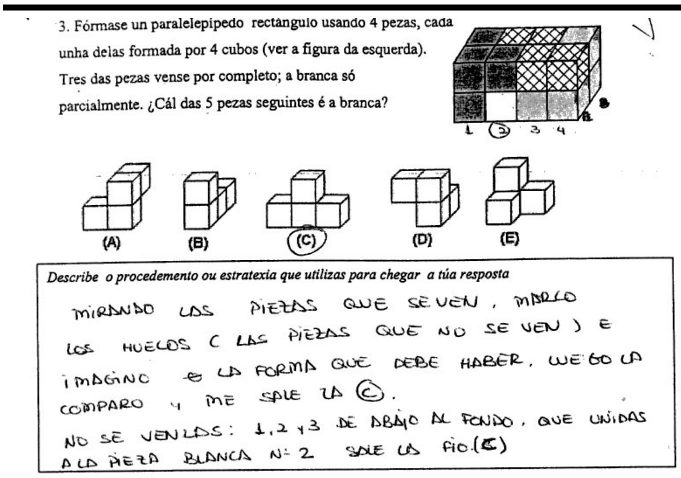
- Lenguaje: "buscar los huecos", "saber la forma de las otras figuras", "encajar", "colocada de otra manera", "tumbada hacia adelante", "espacios ocupados", "imaginar la forma que debe tener", "imaginar las lugares que quedan vacíos", "pensar en los huecos", "observar el espacio que queda".
- Conceptos: cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) propiedades de la perspectiva paralela (preserva importantes propiedades geométricas del objeto: paralelismo, relación de dos longitudes en la misma dirección, punto medio, "tamaño real" en un plano paralelo al plano de proyección); c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) El movimiento de rotación conserva las propiedades métricas de las figuras; e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio.
- Procedimiento: Tratar de imaginar mentalmente los lugares del paralelepípedo que ocupan las piezas que se ven. Observar que sólo se ve un cubito de la pieza blanca por tanto los demás cubitos de esa pieza tienen que estar en la parte no visible del paralelepípedo.

- Argumento: El paralelepípedo rectángulo está compuesto por 16 cubitos unidad con una disposición mostrada en la Figura 5.3. Con la notación anterior se puede ver que la pieza rayada (P_R) ocupa las celdas $C_{11}, C_{12}, C_{14}, C_{15}$ (son visibles al menos una de las caras de cada uno de cuatro cubitos que la forman); la pieza negra (P_N) ocupa las celdas C_1, C_9, C_{10}, C_{16}; La pieza gris (P_G) ocupa las celdas C_3, C_4, C_5, C_{13}. Las celdas C_6, C_7, C_8 están ocultas. Uno de los cubitos que forman la pieza blanca (P_B) está visible (una de sus caras) y ocupa la celda C_2. Teniendo en cuenta que se "ven" tres de las piezas que forman la figura, que cada una de las piezas está formada por cuatro cubitos unidad, que sólo se ve una de los cubitos blancos, entonces tres cubitos están ocultos en las posiciones C_6, C_7, C_8, y la pieza blanca ocupará los espacios C_2, C_6, C_7, C_8. Por tanto, comparando con todas las opciones dadas en la tarea, la pieza blanca tiene una forma que es idéntica a la pieza dada como opción C (O_C) pero a la que hay que aplicarle un giro de 90º a través del eje e_1 (considerando la base los tres cubitos alineados) $P_B = G_{90º}(O_C, e_1)$ (Figura 5.4).

Figura 5.4. Giro de la pieza blanca



Ejemplo de respuesta 5.22. Configuración cognitiva CC1 del ítem 3


3. Fórmase un paralelepípedo rectángulo usando 4 pezas, cada unha delas formada por 4 cubos (ver a figura da esquerda). Tres das pezas vense por completo; a branca só parcialmente. ¿Cál das 5 pezas seguintes é a branca?

1 2 3 4

(A) (B) (C) (D) (E)

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

MIRANDO LAS PIEZAS QUE SE VEN, MARCO LOS HUECOS (LAS PIEZAS QUE NO SE VEN) E IMAGINO LA FORMA QUE DEBE HABER. LUEGO LA COMPARO Y ME SALE LA (C). NO SE VEN LAS: 1, 2 Y 3 DE ABAJO AL FONDO, QUE UNIDAS A LA PIEZA BLANCA Nº 2 SALE LA PIEZA (C)

Transcripción:

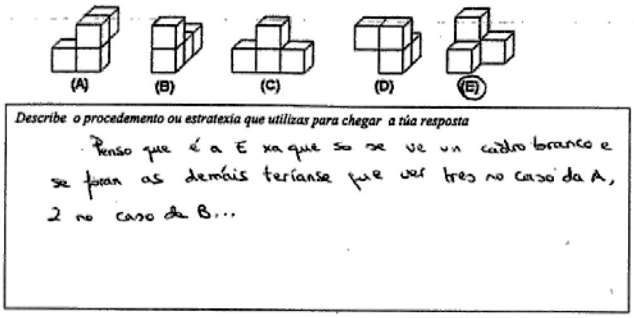
Mirando las piezas que se ven. Marco los huecos (las piezas que no se ven) e imagino la forma que debe haber. Luego la comparo y me sale la (C).

No se ven las: 1, 2 y 3 de abajo al fondo, que unidas a la pieza blanca nº 2 sale la (C).

Configuración cognitiva 2 (CC2). *Discriminación visual*. Se realiza un barrido visual que nos indica cómo está formado el paralelepípedo y cómo son las piezas, tras lo que se pueden descartar algunas de ellas como opción válida para ser la pieza blanca que se está buscando.

- Lenguaje: "el cubito de delante se ve solo parcialmente", "el cubo es el que observamos ya que los otros están tapados por los cubos de atrás de las piezas", "sólo se ve un lado y los demás están ocultos", "girar la figura cara adelante", "parte superior ocupada", "sólo se ve un lado y los demás están ocultos", "única pieza que no tiene cubos encima", "se ve un cuadradito blanco" ,"única con un cubo salido para afuera""sobresalir", "es la única que se ve parcialmente"
- Conceptos: lado, cara cuadrado, cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) el movimiento de traslación conserva las propiedades métricas de las figuras; e) dos objetos diferentes pueden ocupar el mismo espacio a la vez.
- Procedimiento: observar que en la parte frontal del paralelepípedo sólo se ve un cubito blanco. Identificar en las opciones dadas aquella pieza que sólo tenga una cubito en la parte de delante tal y como están situadas.
- Argumento: todas las celdas visibles están ocupadas por cubitos de las piezas P_N, P_R, P_G salvo una celda que correspondería a un cubito de la pieza blanca. En concreto, tanto encima como a los lados de la celda c_2 no hay ninguna otra cara de algún cubito blanco. Por lo tanto, la pieza blanca tiene un único cubito unidad en la cara frontal (se supone un plano paralelo al plano frontal que divide a la figura en dos partes: delantera y trasera) y esa condición sólo la cumple la opción E de todas las presentadas lo que conduce a que esa sea la opción elegida.

Ejemplo de respuesta 5.23. Configuración cognitiva CC2 del ítem 3

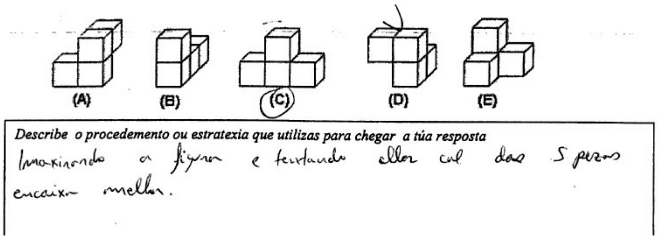


Transcripción:
Pienso que es la E ya que sólo se ve un cuadrado blanco y si fueran las demás tendría que verse tres en el caso de A, 2 en el caso de B…

Configuración cognitiva 3 (CC3). *Comprobación exhaustiva por encaje de las piezas*. Probar a encajar sucesivamente cada una de las piezas dadas como posibles soluciones de la tarea.

- Lenguaje: “la única que puede encajar sin que se vieran la demás piezas”, “debe encajar con el resto”, “girar hacia adelante”, “imaginado la figura e intentando ver cuál de las cinco piezas encaja mejor”, “ir probando”, “darle vueltas a las figuras mentalmente hasta encontrar la que cumpla las condiciones”.
- Conceptos: Cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras; e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo.
- Procedimiento: Elegir una de las piezas de las opciones e intentar encajarla de manera que los cuatro cuadraditos coincidan con celdas ya ocupadas.
- Argumento: Se elije una de las piezas $O_k,\ k \in \{A, B, C, D, E\}$ que se dan como opciones en la descripción de la tarea. Como sólo se ve un cubito de la pieza blanca (situado en la celda c_2) se va girando O_k mentalmente en el espacio hasta conseguir poner uno de sus cubitos en la posición de la celda c_2. Si los otros cubitos de la opción P_k coinciden con celdas ya ocupadas se descarta esa opción y se toma la siguiente y así sucesivamente hasta encontrar una O_k cuyos cuatro cubitos no coincidan con celdas ya ocupadas por cubitos unidad de las piezas visibles. En ese caso, la solución será O_k.

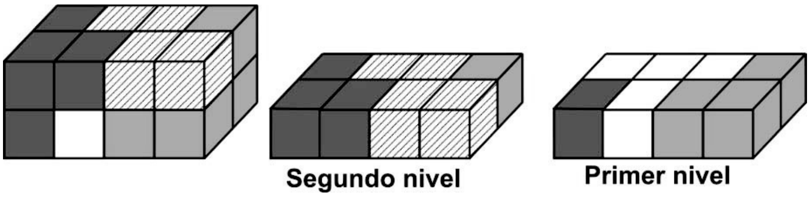
Ejemplo de respuesta 5.24. Configuración cognitiva CC3 del ítem 3



Transcripción:
Imaginando las figuras e intentando mirar cual de las cinco piezas encajan mejor.

Configuración cognitiva 4 (CC4). *Descomposición mediante cortes de nivel topográfico*. Se separa el ortoedro en dos plantas mediante un plano paralelo al plano horizontal a la altura del cubito unidad y se observan las posiciones que ocupan los cubitos en cada uno de los niveles. Consiste en suprimir la planta superior y visualizar o dibujar el resto de las piezas en la planta inferior como se muestra en la Figura 5.5.

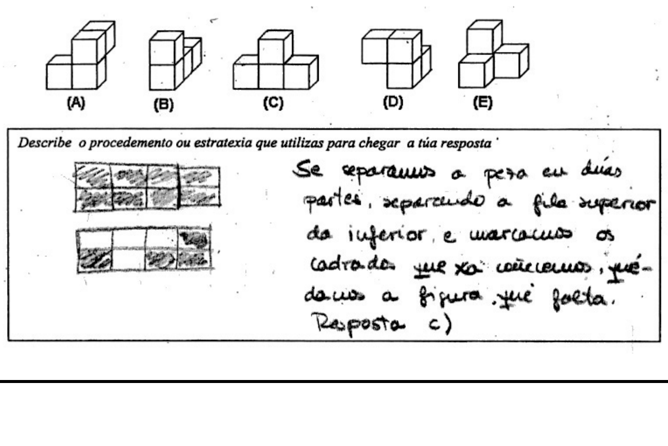
Figura 5.5. Descomposición por niveles



- Lenguaje: “dibujé la base del paralelepípedo”, “anular todos los cuadrados [cubos] de arriba”, “quitar toda la parte de arriba”, “visto desde abajo”, “la parte de arriba está cubierta”, “dividir el paralelepípedo en dos partes”, “piso inferior visto desde arriba/abajo”, “cortar en dos la altura”. Icónica: representar gráficamente los dos niveles o bien sólo el de abajo sombreando los ocupados y a partir de ello obtienen la figura correcta. Dibujo en perspectiva paralela de un ortoedro de dimensiones $4 \times 2 \times 1$.
- Conceptos: forma, cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, representación por niveles, perspectiva paralela.
- Propiedades: a) aditividad de la medida, b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) Las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras, e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo; f) propiedades de la representación por niveles; g) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales.

- Procedimiento: Observar que la segunda planta está totalmente ocupada por piezas ya conocidas. Eliminar dicha planta. Representar la primera planta a través de una cuadrícula de 4 cuadraditos de largo por 2 de ancho (ortoedro de 4 cubitos unidad de largo, 2 de ancho y uno de alto). Marcar cada cuadradito (cubito) del color de las piezas visibles que se corresponda con esos lugares. Observar que quedan tres espacios que no tienen asignado ningún color porque corresponden a cubos no visibles del paralelepípedo. Unir esos tres cuadraditos (cubitos) con el cuadradito (cubito) blanco visible para obtener la pieza blanca. Identificar esa forma con alguna de las opciones dadas en la tarea.
- Argumento: Como en la segunda planta (segundo nivel) no se ve ningún cubito blanco, ya que está toda ocupada por cubitos de las piezas P_R, P_N, P_G, se elimina. Se representa una cuadrícula de 4×2 cuadraditos (o se pinta en perspectiva paralela un ortoedro de dimensiones $4u \times 2u \times 1u$, siendo u el cubito unidad). Se sombrea de negro la celda (cuadrícula) C_1 ya que corresponde a un cubito de la pieza P_N. Las celdas (cuadrículas) C_3, C_4 y C_5 se sombrean de gris pues pertenecen a la pieza P_G. La celda C_2 se pinta de blanco. De este modo, en la primera planta quedarían sin pintar tres celdas que se corresponden con C_6, C_7 y C_8 que por las condiciones del enunciado (cuatro cubitos para cada pieza) pertenecerían a la pieza blanca. Finalmente, la pieza blanca estaría formada por cubitos que se encuentran en las posiciones C_2, C_6, C_7 y C_8. Ahora, se compara la forma de la pieza blanca P_B con las posibles opciones y se observa que coincide con la pieza C de modo que si giramos 90º la pieza P_C hacia adelante coincidiría perfectamente. De este modo la solución es la pieza dada por la opción C.

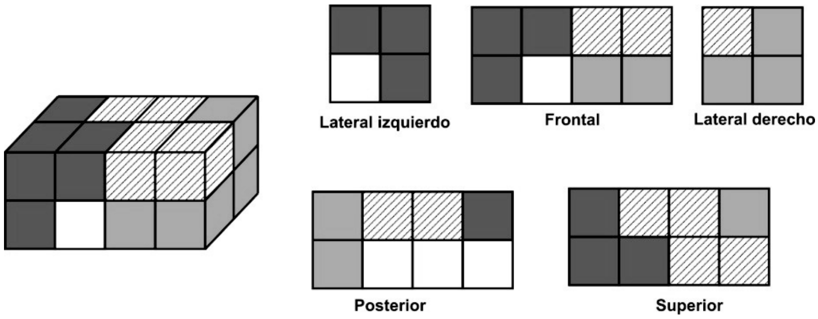
Ejemplo de respuesta 5.25. Configuración cognitiva CC4 del ítem 3



Transcripción:
Si separamos la pieza en dos partes, separando la fila superior de la inferior, y marcamos los cuadrados que ya conocemos, nos queda la figura que falta. Respuesta C).

<u>Configuración cognitiva 5</u> (CC5). *Representación a través de la proyección ortogonal.* Realizar las diferentes vistas (arriba, abajo, de frente, desde atrás, derecha e izquierda) del paralelepípedo a través de su proyección ortogonal en el plano (Figura 5.6).

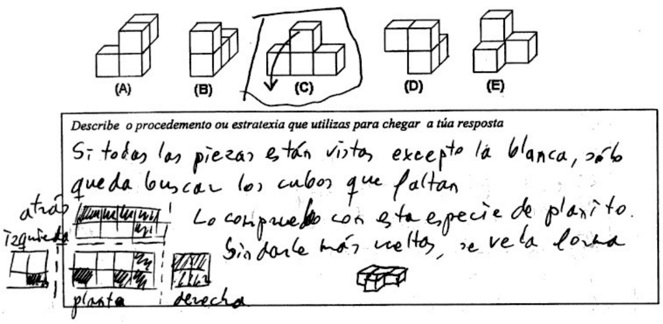
Figura 5.6. Descomposición por proyección ortogonal



- Lenguaje: "dar la vuelta a la figura", "planta, alzado, perfil", "arriba, abajo, de frente, de lado". Icónico: representación gráfica de las diferentes vistas ortogonales del paralelepípedo.
- Conceptos: cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela, proyección ortogonal.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras; e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo; f) propiedades de la proyección ortogonal; g) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales.
- Procedimiento: realizar la proyección ortogonal de las diferentes vistas del paralelepípedo sobre una serie de cuadrículas. Asignar a cada cuadradito de cada una de las cuadrículas el color de las piezas visibles. Observar que en la parte de atrás quedan tres cuadraditos sin asignar y en la cuadrícula de la vista izquierda una. Coordinar estas dos vistas con la vista frontal donde hay un cuadrito blanco para formar la pieza blanca. Identificar la forma de la pieza blanca con alguna de las opciones dadas.
- Argumento: se realiza una proyección ortogonal de la parte frontal del paralelepípedo y se sombrean en la cuadrícula de $8u \times 2u$ los ocho cuadrados correspondientes a las caras de los cubitos que forman las diversas piezas. De este modo se tiene que en la parte frontal sólo se ve un cubito blanco. La proyección ortogonal del lado derecho del paralelepípedo permite ver cuatro

caras de cuatro cubitos, tres pertenecen a la pieza P_G y una a la pieza P_R, por tanto, en esta cara no hay ningún cubito blanco. La proyección ortogonal del lado izquierdo del paralelepípedo permite ver tres caras de la pieza P_N y la otra no se ve. La vista desde arriba nos ofrece ocho caras, de las cuales tres corresponden a cubitos de la pieza P_N, cuatro a cubitos de la pieza P_R y una a un cubito de la pieza P_G. Por tanto en la vista desde arriba no hay caras de cubitos blancos. La información que da la vista desde atrás permite sombrear una cara del cubito de la pieza P_N, dos de la pieza P_R y dos de la pieza P_G. Por tanto quedan tres cuadrículas sin sombrear que han de pertenecer a caras de la pieza P_B. Coordinando las diferentes vistas de la proyección ortogonal del paralelepípedo se obtiene que la pieza P_B está formada por cuatro cubitos situados en las celdas C_2, C_6, C_7 y C_8. Al comparar la forma de la pieza P_B con la forma de las opciones dadas, la única que coincide, si se gira hacia adelante, es la opción C. Por tanto esa es la opción elegida.

Ejemplo de respuesta 5.26. Configuración cognitiva CC5 del ítem 3



Transcripción:

Si todas las piezas están vistas excepto la blanca, sólo queda buscar los cubos que falta.

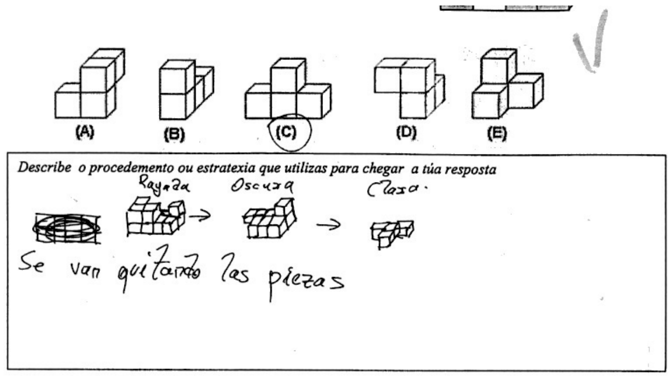
Lo compruebo con esta especie de planito: Atrás, izquierda, planta, derecha. Sin darle más vueltas, se ve la forma.

Configuración cognitiva 6 (CC6). *Supresión sucesiva de las piezas visibles en el cuerpo*. Se suprimen una a una todas las piezas visibles que forman el paralelepípedo, de forma que queden sólo los cubitos pertenecientes a la pieza blanca (Figura 5.7).

- Lenguaje: “descomponer el paralelepípedo en sus piezas”, “retirar”, “se van quitando las piezas”, “imaginar cada pieza por separado”, “desmontar el paralelepípedo”, “eliminando los huecos que ya están ocupados”, “quitar las piezas que se ven”, “separar la figura mentalmente”, “separar las piezas”.
- Notación: representación gráfica de los objetos que se van obteniendo a medida que se van quitando las distintas piezas.

- Conceptos: cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela.
- Propiedades: a) aditividad de la medida, b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras, e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo.
- Procedimiento: suprimir sucesivamente las tres piezas que se ven por completo en el paralelepípedo. Una vez suprimidas lo único que queda del paralelepípedo inicial son cuatro cubitos que son los que corresponden a la otra pieza que compone dicho cuerpo (pieza blanca). Identificar en las opciones dadas la pieza que se acaba de obtener. Observar que la opción elegida no está en la misma posición que la pieza blanca. Para componer el paralelepípedo habrá que girar la opción elegida 90º hacia adelante.
- Argumento: el paralelepípedo está formado por cuatro piezas de cuatro cubitos unidad cada una, lo que hace un total de 16 cubitos unidad situados como se indicó en la Figura 5.3. Si se suprime la pieza P_R desaparecen las celdas $C_{11}, C_{12}, C_{14}\ y\ C_{15}$. Al suprimir la pieza P_G desaparecen las celdas $C_3, C_4, C_5\ y$ C_{13} quedando una composición de 12 cubos. Por último, si se suprime la pieza P_N desaparecen las celdas $C_1, C_9, C_{10}\ y\ C_{16}$. Las únicas cuatro celdas que permanecen son $C_2, C_6, C_7\ y\ C_8$, que corresponden a la pieza que queda, que es la blanca. Comparando con las opciones que se dan, la única que coincide en la forma con la que se acaba de obtener es la pieza dada en la opción C, teniendo en cuenta que para colocarla en el paralelepípedo habría que girarla 90º hacia adelante.

Ejemplo de respuesta 5.27. Configuración cognitiva CC6 del ítem 3

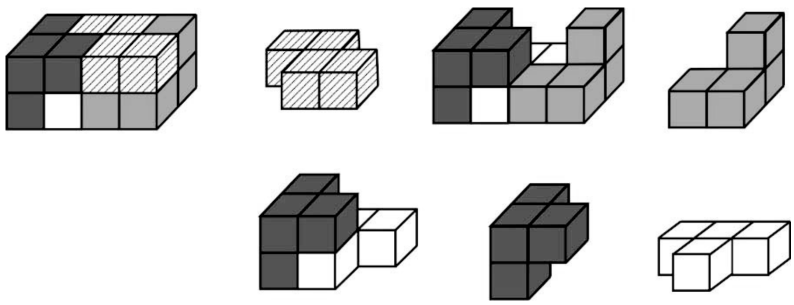


Transcripción:

Se van quitando las piezas:

Rayada-oscura-clara.

Figura 5.7. Descomposición por supresión de las piezas

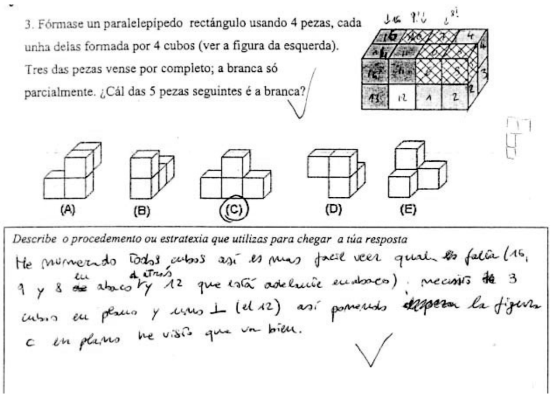


Configuración cognitiva 7 (CC7). *Asignación de números a cada uno de los cubos que forman el paralelepípedo*. Se le asigna un número del 1 al 16 a cada uno de los cubos del paralelepípedo para reconocer mejor los espacios ocupados por los cubitos no visibles de la pieza blanca.

- Lenguaje: "numerar todos los cubos", "faltan los cubos", "contar los cubos", "la pieza tiene 4 cubos de largo por dos de ancho". Notación: números del 1 al 16.
- Conceptos: forma, cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela, correspondencia biyectiva.
- Propiedades: a) aditividad de la medida, b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras, e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo; f) la correspondencia biyectiva es simétrica.
- Procedimiento: se numeran todos los cubitos unidad que forman el paralelepípedo. Se asignan cuatro números, respectivamente, a los cubitos de cada una de las piezas. También se le asocia un número al cubito blanco visible. Al final se mira qué números quedan sin asignar. Esos números serán los que corresponden a los tres cubitos que faltan para formar la pieza P_B.
- Argumento: como el paralelepípedo tiene 4 cubitos de largo, dos cubitos de ancho y dos de alto, en total tendrá 16 cubitos. Se numeran todos los cubitos del paralelepípedo del 1 al 16 y se asigna un número a cada uno de los cubitos que forman las piezas visibles del paralelepípedos, es decir a P_R, P_N y P_G. De este modo la pieza P_N estará formada por los cubitos números 1, 9, 10 y 16; la pieza P_R por los cubitos números 11, 12, 14 y 15; y la pieza P_G por los cubitos números 3, 4, 5 y 13. La pieza blanca sólo tiene un cubito visible que se

corresponde con el número 2. Al hacer el recuento de los cubitos asignados se observa que faltan tres, 6, 7 y 8 sin asignar. Puesto que cada pieza está compuesta de cuatro cubitos y todas están completas menos la pieza blanca que tiene sólo un cubito asignado, esos tres cubitos pertenecen a P_B, completándose así la figura que faltaba. Finalmente, de todas las opciones dadas se elige la opción C por ser una pieza idéntica a la pieza obtenida anteriormente y cuya posición coincide con P_B si se gira en el espacio 90º hacia adelante.

Ejemplo de respuesta 5.28. Configuración cognitiva CC7 del ítem 3



Transcripción:

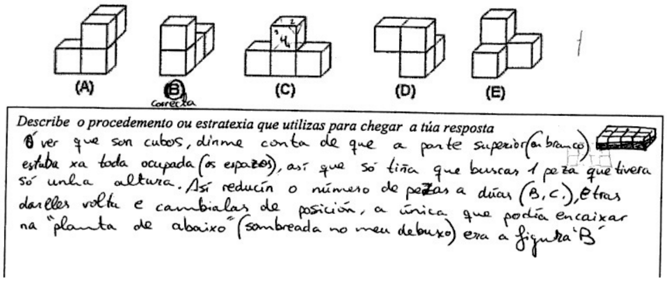
He numerado todos cubos así es más fácil ver cual falta (16, 9 y 8 en abajo de atrás y 12 que está adelante en abajo); necesito tres cubos en plano y uno (el 12) así poniendo la figura C en plano he visto que va bien.

Configuración cognitiva 8 (CC8). *Análisis deductivo sobre la forma de la pieza blanca*. Esta configuración se basa en la deducción de la posible forma de la pieza blanca teniendo en cuenta que la segunda planta del paralelepípedo está ocupada. Este hecho conduce a dos posibilidades, la opción B o la opción C.

- Lenguaje: “las únicas opciones son B ó C”, “la parte de arriba está ocupada”, “la única que no se vería en la parte superior” “la segunda altura está ocupada”, “las restantes tienen dos dimensiones”, “tener los 4 cubos en el mismo plano”, “tiene que estar en el piso de abajo”, “no puede tener dos alturas”, “eliminamos las opciones A, D y E”.
- Conceptos: forma, cubo, paralelepípedo rectángulo, unidad de medida de volumen, perspectiva paralela, altura.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) propiedades de la perspectiva paralela; c) los cubitos unidad se unen por caras enteras; d) las isometrías conservan las propiedades métricas de las figuras; e) dos objetos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo.

- Procedimiento: observar que la segunda planta está totalmente ocupada lo que lleva a que todos los cubitos de la pieza buscada deben estar todos sobre un mismo plano (entendiendo plano como nivel topográfico en este caso). Advertir que de las opciones presentadas sólo dos piezas cumplen esa condición. Intentar encajar alguna de ellas en la celda ocupada por el cubito blanco teniendo en cuenta los espacios ocupados por las demás piezas.
- Argumento: como la segunda planta está ocupada totalmente por cubitos de las piezas P_N, P_R y P_G y ninguno de P_B se concluye que todos los cubitos de esa pieza estarán en la primera planta. Por tanto se ha de buscar, de entre las opciones, una pieza que se pueda situar sobre un plano (todos los cubitos sobre el mismo plano o nivel topográfico). Tal condición la cumplen dos de las opciones, la B y la C. Si giramos la pieza B sobre su base 90º y después le aplicamos un giro de 90º hacia adelante, el cubito 1 de la pieza B sería el cubito blanco que estaría en la C_2 el cubito 2 iría para la posición de la celda C_7, el cubito 3 va para la celda C_6 y el cubito 4 tendría que ir para la celda C_5 pero como dicha celda está ocupada por un cubito de la pieza P_G la opción B no es la correcta. La opción C se gira 90º hacia adelante, de esta manera el cubito 1 de la pieza C sería el cubito blanco que está a la vista (celda C_2), el cubito 2 iría para la posición de la celda C_8, el cubito 3 va para la celda C_7 y el cubito 4 se sitúa en la celda C_6 que no están ocupadas por ningún otro cubito. Como conclusión, la opción elegida es la C.

Ejemplo de respuesta 5.29. Configuración cognitiva CC8 del ítem 3



Transcripción:

Al ver que son cubos me di cuenta de que la parte superior (en blanco en el dibujo que hace) estaba ya toda ocupada (los espacios), así que sólo tenía que buscar 1pieza que tuviera sólo una altura. Así que reduje el número de piezas a dos (B y C), e tras darles la vuelta y cambiarlas de posición, la única que podía encajar en la "planta de

			abajo" (sombreada en mi dibujo) era la figura `B´.

5.3.3.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones asociadas al ítem 3

En la Tabla 5.19 podemos constatar que hay dos configuraciones con un porcentaje similar que corresponden a las configuraciones más frecuentes. También se observa que el porcentaje de los que no contestan o bien marcan una de las opciones sin argumentarla supone más de la tercera parte de la muestra (34,75%).

Tabla 5.19. Frecuencia y porcentaje de las configuraciones cognitivas del ítem 3

Tipo de configuraciones	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Justificación deductiva de la pieza blanca.	64	16
CC2	Discriminación visual.	65	16,25
CC3	Comprobación exhaustiva por encaje de las piezas.	30	7,5
CC4	Descomposición mediante cortes de nivel topográfico.	21	5,25
CC5	Representación mediante proyección ortogonal.	13	3,25
CC6	Supresión sucesiva de las piezas visibles en el cuerpo.	11	2,75
CC7	Asignación de números a cada uno de los cubos que forman el paralelepípedo.	11	2,75
CC8	Análisis deductivo sobre la forma de la pieza blanca.	17	4,25
NC	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco.	139	34,75
NE	No entiende.	29	7,25
Total		400	100,00

Las configuraciones CC1 y CC3 están basadas en procedimientos realizados mentalmente tal y como expresan las argumentaciones verbales de los estudiantes.

Las configuraciones CC1, CC2 y CC8 deducen la forma de la pieza antes de identificarla entre las opciones. Sin embargo en las configuraciones CC4, CC5, CC6 y CC7 la forma de la pieza blanca surge del proceso llevado a cabo, "aparece de repente". En el primer grupo se juega con la idea de que la pieza, "a priori", debería ser de una determinada forma a partir de las deducciones realizadas y se busca entre las opciones una con una forma similar; mientras que en el segundo grupo la pieza blanca es "exactamente así" como resultado de una serie de acciones y se "tiene" que encontrar en las opciones una pieza que sea idéntica a ella. La configuración CC3 es la única que se corresponde con un proceso de ensayo-error.

En cuanto a conocimientos aplicados relacionados directamente con la representación de objetos tridimensionales, las configuraciones CC4 y CC5 requieren el conocimiento de conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales, lo que se traduce en que sólo un 8,50% de los estudiantes aplicaron dichos conocimientos.

Aunque las configuraciones CC8 y la CC4 centran sus argumentaciones en la eliminación de la segunda planta del paralelepípedo, hay una diferencia clara entre ellas relacionada con la deducción de la pieza blanca. Como se comentó en un párrafo anterior en la configuración CC8 hay un proceso de deducción "a priori" mientras que en la CC4 no ocurre.

En las investigaciones sobre la instrucción de representaciones planas de cuerpos tridimensionales, se obtiene que la representación a través de niveles es una de las opciones adecuadas tanto para construir como para dibujar (Gutiérrez, 1998a, p. 209). En este caso, la representación plana a través de niveles es un instrumento que utilizan algunos de los estudiantes para obtener la solución del ítem pero no tiene una frecuencia tan elevada como cabría esperar (5,25%). Gutiérrez (1998a) apunta también que la construcción de objetos tridimensionales a partir de la representación ortogonal resulta más difícil que la representación por niveles. Aunque en nuestro estudio no se realizan tareas de construcción a partir de una representación ortogonal o por niveles, lo que se observó es que el porcentaje de los que siguen la configuración CC5, cuyo procedimiento sigue una representación ortogonal para llegar a la solución, es más bajo (3,25%) que los que se ayudan de una representación por niveles.

Un aspecto importante a tener en cuenta en las distintas configuraciones es el que hace referencia al uso de elementos ostensivos para apoyar o llegar a la solución. En cuanto a las representaciones en papel de sólidos, diferentes investigadores (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989; Gutiérrez, 1998a) identifican tres tipos básicos: representaciones verbales, gráficas y mixtas. La investigación de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989), muestra que en el test previo, el porcentaje de los tres tipos de representaciones era prácticamente igual (entorno al 33%) mientras que después de la instrucción, el porcentaje de alumnos que utilizaron representaciones gráficas en lugar de las verbales para comunicar a sus compañeros cómo era el módulo que ellos veían, aumentó considerablemente. Atendiendo a ese aspecto, en el análisis de las configuraciones de este ítem se obtiene que únicamente el 11,25% de la muestra se apoya en métodos gráficos, lo que se correspondería con los tipos de configuraciones CC4, CC5 y CC6.

5.3.3.4. Análisis de errores

Los resultados obtenidos en el análisis de los errores (Tabla 5.20), muestran que el porcentaje de respuestas correctas disminuye discretamente con respecto a la Tabla 5.18, pasando de un 46%, que daban como opción correcta la pieza C, a un 38,50% que argumentan correctamente su respuesta. Si tenemos en cuenta el porcentaje de aquellos estudiantes que sólo marcan la opción correcta esa diferencia disminuiría. El error que más destaca por su frecuencia es el error situacional 2S, relacionado con una interpretación del enunciado que lleva a pensar que las opciones que se dan han de mantener la posición inicial, sin rotarlas, al encajarlas en el paralelepípedo.

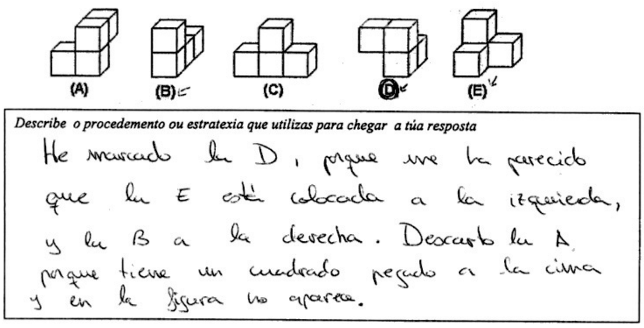
Tabla 5.20. Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores asociados al ítem 3

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores.	154	38,50
EB	No contesta/ No argumenta	115	28,75
EBC	Sin argumento con opción correcta.	25	6,25
1S	Considerar que el ortoedro está formado por cuatro de las piezas dadas como opciones de respuesta.	11	2,75
2S	Las piezas dadas como opciones han de mantener su posición en el espacio.	61	15,25
3S	Intentar reconocer una de las opciones dadas, tal y como está representada, en el ortoedro.	3	0,75
1P	No discriminar entre las piezas B y C.	10	2,50
2P	Considerar sólo la parte frontal de la pieza blanca.	6	1,50

3P	No ser capaz de visualizar la pieza que falta.	15	3,75
Total		400	100,00

El error 1S hace pensar que entre las opciones dadas (A, B, C, D, E) están todas piezas que forman el paralelepípedo (la pieza negra, la pieza rayada, la pieza gris y la pieza blanca). Como consecuencia se trata de reconocerlas en dicha figura. Este error se ve sustentado en el hecho de que las piezas D y E se corresponden con la pieza P_G y la pieza P_N respectivamente (Ejemplo de respuesta 5.30).

Ejemplo de respuesta 5.30. Error 1S del ítem 3



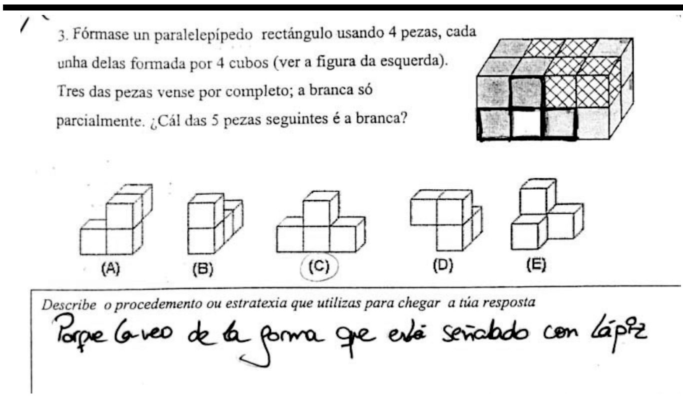
Transcripción:

He marcado la D, porque me ha parecido que la E está colocada a la izquierda, y la B a la derecha. Descarto la A porque tiene un cuadrado pegado a la cima y en la figura no aparece.

El error 2S está provocado por la imposición de una restricción consistente en que las opciones de respuesta tienen que mantener la posición que tienen en el espacio. Los estudiantes que no han considerado el movimiento de las piezas dadas en las diferentes opciones y aún así han dado una respuesta, no piensan en la figura como un todo global ya que encajan la pieza sin tener en cuenta los espacios ocupados por las restantes piezas del paralelepípedo.

Los que cometen el error 3S (Ejemplo de respuesta 5.31) intentan reconocer una de las opciones dadas en el paralelepípedo, fijándose en que mantenga el cubito blanco en la posición dada.

Ejemplo de respuesta 5.31. Error 3S del ítem 3



Transcripción:

Porque la veo de la forma que está señalado con lápiz.

Un estudio de los errores procedimentales nos lleva a destacar discretamente el error 3P por su mayor frecuencia con respecto a los otros dos errores de esta misma clase. Los errores 1P y 3P están relacionados a través de la acción mental realizada, sin embargo se diferencian básicamente en que el 1P supone realizar una discriminación de las piezas y el 3P no.

La distinción entre el error 2P y 2S se basa principalmente en que en el caso del primero, el estudiante sí considera que se pueden girar las figuras mientras que, en el caso del error 2S, se interpreta que no está permitido girar las figuras, al tener que mantener la posición dada en la tarea, lo que conduce a la elección de la opción E. En este caso tampoco se tiene en cuenta que el nivel superior del paralelepípedo esté totalmente ocupado por las piezas coloreadas.

En este análisis no encontramos casos de errores conceptuales relacionados con la tarea, salvo aquel derivado de la definición de paralelepípedo u ortoedro.

En la asociación de las configuraciones con los errores destaca el error 2S, que está asociado directamente con la configuración CC2. La habilidad de *discriminación visual* permite comparar varios objetos identificando semejanzas y diferencias visuales. En este caso la semejanza visual lleva hacia la opción E. Si no se tienen en cuenta otras habilidades, como la de "rotación mental" necesarias para la resolución del ítem (conservación de la percepción y reconocimiento de las posiciones en el espacio) será difícil llegar a la solución correcta. No se concibe el paralelepípedo como un todo, al separar y hacer independientes las acciones sobre la cara frontal y las acciones sobre la cara posterior.

Por otra parte, el error 3P está estrechamente relacionado con aquellas configuraciones que dan como argumentación la realización mental de la acción (CC1, CC3).

El error 1P está vinculado a la configuración CC8 aunque también se asocia a aquellos que marcan la opción B pero que no argumentan nada sobre el procedimiento seguido para optar por esta solución.

En cuanto al análisis de la efectividad de las configuraciones, en la Tabla 5.21 se puede observar que todas las configuraciones asociadas a este ítem tienen asignado un porcentaje que, salvo en el caso de la configuración CC2, supera el 70%. La configuración CC1 está basada en procedimientos realizados mentalmente (como se ha visto anteriormente) y a ello se debe que no tenga una mayor efectividad.

Tabla 5.21. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem3

Tipo de configuración	Efectividad	Porcentaje
CC1	54	84,38
CC2	6	9,23
CC3	24	80,00
CC4	21	100,00
CC5	11	84,62
CC6	10	90,91
CC7	11	100,00
CC8	12	70,59

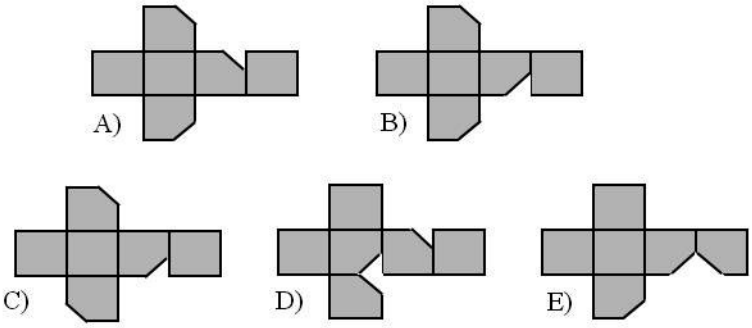
Se presenta en la anterior tabla una efectividad del 100% para aquellas configuraciones basadas en conversión de representaciones de objetos tridimensionales. La otra configuración con soporte gráfico, la configuración CC6, también alcanza un porcentaje de efectividad importante.

Destaca por su baja efectividad la configuración CC2 puesto que en el 86,15% de los casos lleva hacia el error 2S.

En general, se podría concluir que todas las configuraciones asociadas a este ítem pueden conducir, con una probabilidad muy alta, hacia la respuesta correcta (salvo la CC2).

5.3.4. ÍTEM 4: DESARROLLO DEL CUBO SIN VÉRTICE

Cortamos el vértice de un cubo. ¿Cuál de los desarrollos planos que se muestran corresponde al cuerpo resultante?



5.3.4.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 4

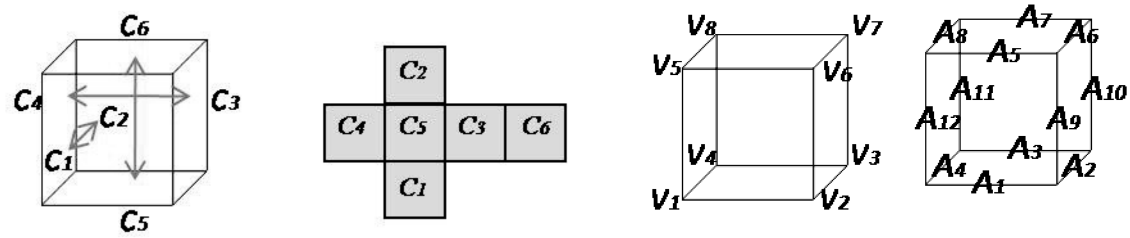
Tabla 5.22. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 4

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
A	18	4,50
B	19	4,75
C	2	0,50
D	8	2,00
E	**316**	**79,00**
Ns/Nc	37	9,25
Total	400	100,00

5.3.4.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 4

Todas las opciones que se presentan en la tarea tienen como base el mismo tipo de desarrollo plano del cubo "en forma de cruz" (Mesquita, 1992). Seguidamente se presenta la notación utilizada para caras, vértices y aristas del cubo así como su desarrollo plano. Además, también se utilizará para la descripción de las distintas configuraciones, una representación en perspectiva del cubo con un vértice cortado, la notación para los diversos elementos y para su desarrollo plano, como se puede ver en la Figura 5.8 y la Figura 5.9.

Figura 5.8. Notación para los diferentes elementos del cubo y su desarrollo plano

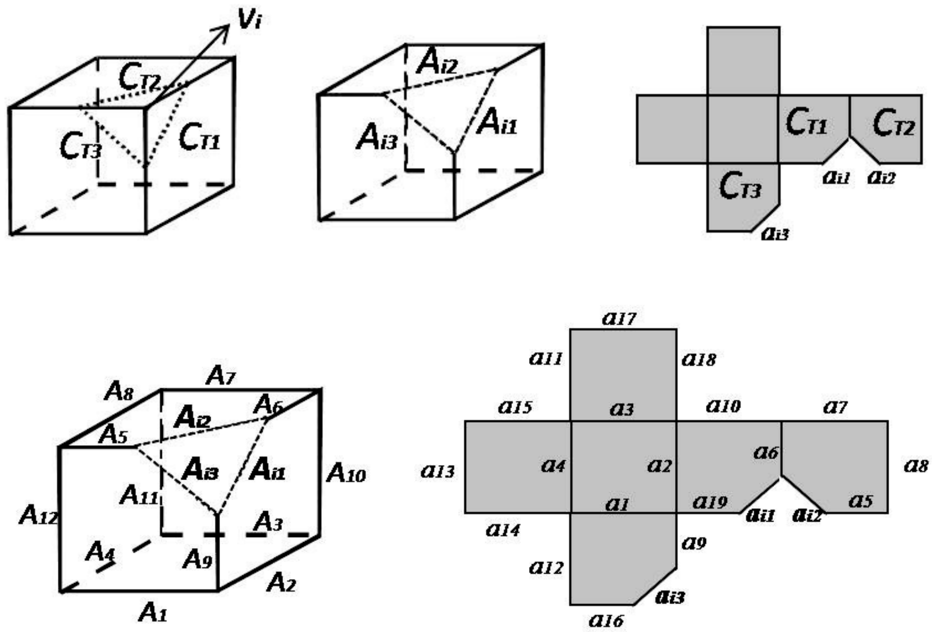


Los vértices:

$V_1 = C_5 \cap C_1 \cap C_4$; $V_2 = C_5 \cap C_1 \cap C_3$; $V_3 = C_5 \cap C_2 \cap C_3$; $V_4 = C_5 \cap C_4 \cap C_2$

$V_5 = C_6 \cap C_1 \cap C_4$; $V_6 = C_6 \cap C_1 \cap C_3$; $V_7 = C_6 \cap C_2 \cap C_3$; $V_8 = C_6 \cap C_2 \cap C_4$

Figura 5.9. Cubo con un vértice *i* truncado y su desarrollo



C_{Tj}: Caras truncadas, $j = 1{,}3$

A_{ij}: Aristas nuevas que aparecen al truncar el vértice *i* del cubo; $j = 1{,}3$

a_{ij}: Aristas del desarrollo plano del cubo truncado que se corresponden con las $A_{ij,}$ $j = 1, 3$.

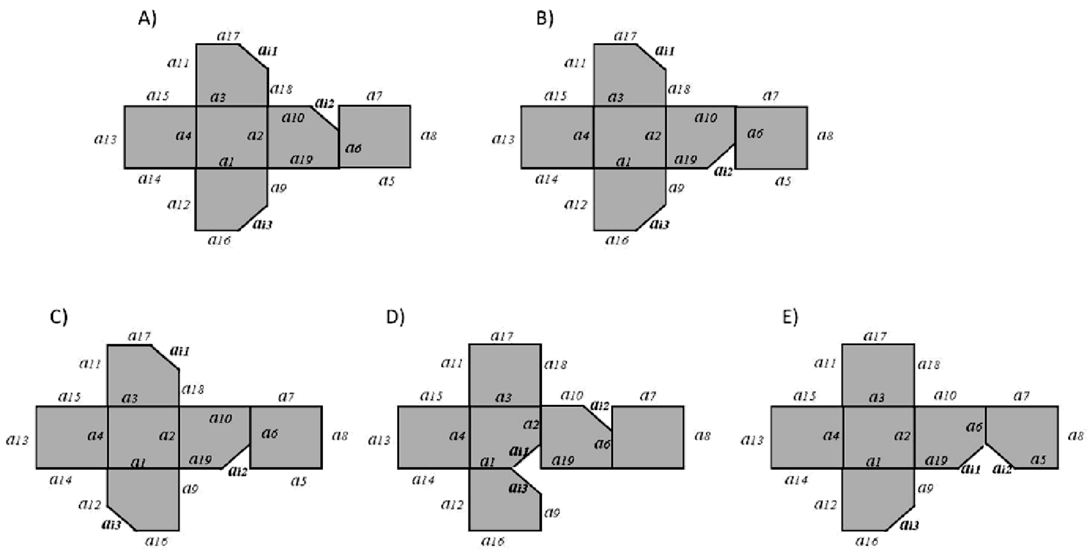
Teniendo en cuenta el desdoblamiento de elementos que se produce al realizar el desarrollo plano de un cubo, en la Tabla 5.23 se muestra la correspondencia entre aristas del desarrollo plano y el cubo con vértice *i* truncado.

Tabla 5.23. Correspondencia entre aristas del desarrollo plano y el cubo con vértice i truncado

a_{12} y a_{14}	$\longrightarrow$	A_{12}
a_9 y a_{19}	$\longrightarrow$	A_9
a_5 y a_{16}	$\longrightarrow$	A_5
a_{10} y a_{18}	$\longrightarrow$	A_{10}
a_7 y a_{17}	$\longrightarrow$	A_7
a_{11} y a_{15}	$\longrightarrow$	A_{11}
a_8 y a_{13}	$\longrightarrow$	A_8
a_1	$\longrightarrow$	A_1
a_2	$\longrightarrow$	A_2
a_3	$\longrightarrow$	A_3
a_4	$\longrightarrow$	A_4
a_6	$\longrightarrow$	A_6
a_{i1}	$\longrightarrow$	A_{i1}
a_{i2}	$\longrightarrow$	A_{i2}
a_{i3}	$\longrightarrow$	A_{i3}

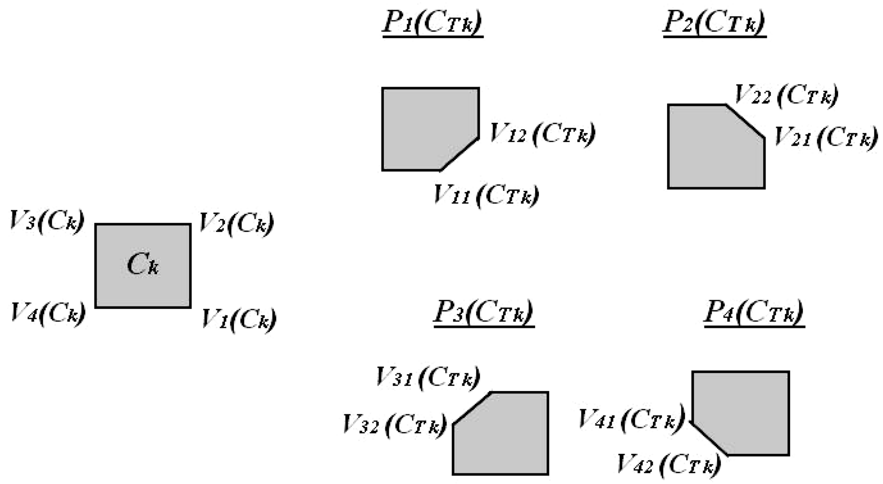
En los desarrollos dados en las opciones se mantendrá la misma equivalencia variando los lugares de los a_{ij} en función de donde se haya hecho el corte en cada desarrollo (Figura 5.10).

Figura 5.10. Correspondencia de aristas en los desarrollos planos



Los desarrollos planos presentados como posibles opciones de respuesta están formados por tres caras cuadradas iguales y tres caras pentagonales iguales (que son las caras que surgen hipotéticamente tras el corte). En la Figura 5.11 se muestran las posibles posiciones de las caras truncadas.

Figura 5.11. Posibles posiciones para cada una de las caras truncadas



En el análisis de las respuestas a este ítem se han encontrado cinco tipos de configuraciones que se describirán a continuación.

Configuración cognitiva 1 (CC1). *Composición exhaustiva del cubo cortado.* Comprobación exhaustiva de casos, plegando las caras del desarrollo plano para recomponer el cubo con un vértice cortado. Es una comprobación mental. En algunas respuestas se puede encontrar el cubo plegado con un corte en uno de los vértices, que es utilizado como referente a medida que se van formando mentalmente cada una de las opciones.

- Lenguaje: "al colocarlos en la figura inicial coinciden", "intentar recomponer mentalmente la imagen", "al formar el cubo mentalmente ese es el vértice que queda totalmente abierto", "mentalmente fui formando con cada figura el cuadrado que se formaría ", "unir en la imaginación el cubo", "cerrando el cubo", "intentar juntar toda la figura para que el vértice quede del mismo lado", " imagino cómo quedaría montando cada uno", "levantando cada cubo", "imaginar el cubo hecho", "plegar cada posibilidad", "tener juntos los lados que comparten ese vértice", "montar cada cubo mentalmente y ver qué figura es la correcta", "probando varias opciones", "comparar con las figuras disponibles"

- Conceptos: cubo, vértice, cara, lado, desarrollo plano de un sólido, desarrollo plano de un sólido tridmensional, sólido truncado.
- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) en cada vértice del cubo confluyen tres caras; c) el desarrollo de un sólido es una representación externa que mantiene la forma y magnitud de las caras y lados y las relaciones métricas en dos dimensiones; d) a algunos puntos del cubo le corresponden dos del desarrollo plano (fenómeno de división en dos ("splitting") de este tipo de representación; e) al cortar mediante un plano un cubo a m unidades de uno de sus vértices, se cortan las tres caras que confluyen en dicho vértice de manera que aparecen tres nuevas aristas A_{ij} y tres nuevos vértices V_{ij} que cumplen: $A_{i1} \cap A_{i3} = V_{i1}; A_{i1} \cap A_{i2} = V_{i2}$; $A_{i3} \cap A_{i2} = V_{i3}$.
- Procedimiento: componer mentalmente cada uno de los desarrollos planos dados. Observar que al componerlos las tres nuevas aristas deben confluir de forma que cada dos compartan un vértice.
- Argumento: para pasar del desarrollo plano de un sólido tridimensional se pliegan las caras intentando juntarlas por las aristas para crear un cuerpo cerrado. Si el cubo tiene un corte en un vértice, al plegarlo se tiene que formar la imagen de un cubo al que le falta uno de sus vértices. Se elige uno de los desarrollos dados como opciones $F \in \{A, B, C, D, E\}$ y se realiza la acción de plegar mentalmente las caras para componer el cubo con el vértice truncado.

  En todas las opciones se va a mantener la correspondencia de las aristas indicada en la tabla 19.

  En la opción A) las aristas a_{ij} tienen sus correspondientes A_{ij} $(j = 1{,}3)$ con $A_{i2} \cap A_{i1} = V_{i2}$ pero $A_{i2} \cap A_{i3} = \emptyset$ y $A_{i1} \cap A_{i3} = \emptyset$ lo que no produce una imagen de un cubo con un vértice cortado.

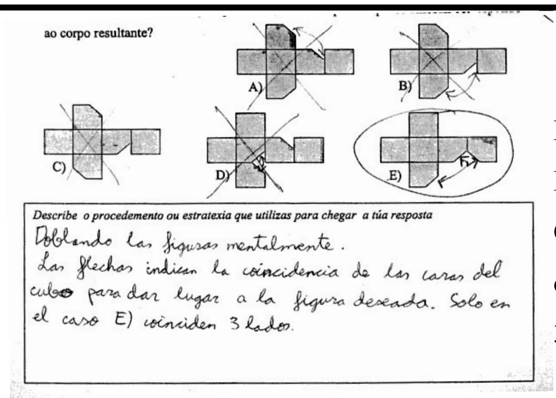
  En la opción B), las caras cortadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3} están en las posiciones $P_1(C_{T1})$, $P_2(C_{T2})$ y $P_2(C_{T3})$ con lo cual al plegar el desarrollo las aristas A_{i2} y A_{i3} cumplen que $A_{i2} \cap A_{i3} = V_{i3}$, sin embargo, $A_{i1} \cap A_{i3} = \emptyset$ y $A_{i1} \cap A_{i2} = \emptyset$.

  En el caso de la opción C) cada una de las caras cortadas (C_{T1}, C_{T2} y C_{T3}) tienen sus nuevas aristas a_{ij} situadas de forma que no existen intersecciones comunes entre sus correspondientes A_{ij} $(j = 1,3)$: $A_{i2} \cap A_{i1} = \emptyset$; $A_{i2} \cap A_{i3} = \emptyset$ y $A_{i1} \cap A_{i3} = \emptyset$.

Las aristas a_{ij} de la opción D) se corresponden con las aristas A_{ij} de modo que $A_{i2} \cap A_{i1} = \emptyset$; $A_{i2} \cap A_{i3} = \emptyset$ y $A_{i1} \cap A_{i3} = V_{i1}$.

Para la opción E) se tiene que las caras cortadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3} situadas en las posiciones $P_1(C_{T3})$, $P_1(C_{T1})$ y $P_4(C_{T2})$ se pliegan de forma que al hacer el levantamiento las caras A_{ij} cumplen que $A_{i1} \cap A_{i3} = V_{i1}$; $A_{i1} \cap A_{i2} = V_{i2}$; $A_{i3} \cap A_{i2} = V_{i3}$ lo que conduce a la solución de la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.32. Configuración cognitiva CC1 del ítem4



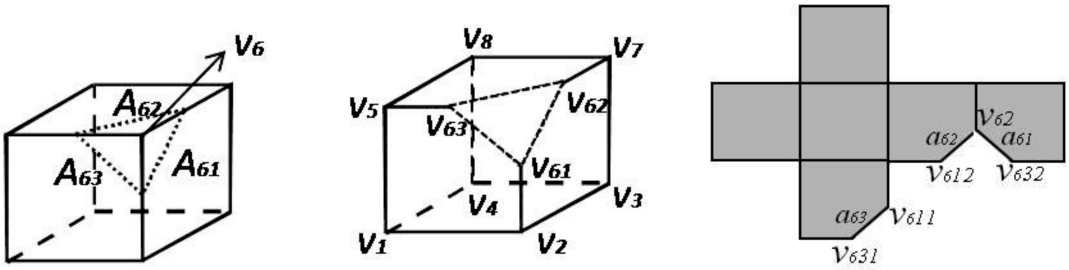
Transcripción:

Doblando las figuras mentalmente.
Las flechas indican la coincidencia de las Caras del cubo para dar lugar a la figura deseada. Sólo en el caso E) coinciden los 3 lados.

<u>Configuración cognitiva 2</u> (CC2). *Dibujar un cubo con la esquina cortada y desarrollarlo en el plano*. Suele aparecer como esquina cortada la esquina frontal derecha superior, esto puede ser debido a que, al haber recordado el ítem1, se ayudan de la imagen que aparece allí (como indican algunos alumnos). En otras ocasiones se ayudan de una explicación verbal pero toda la acción es realizada mentalmente.

Esta configuración se centra en la correspondencia entre aristas del cubo con un vértice truncado y aristas del desarrollo plano. Se mantiene la misma notación del cubo para aristas y vértices, incorporando la notación para las tres nuevas aristas y los tres nuevos vértices que aparecen al truncar el vértice *i* (Figura 5.12).

Figura 5.12. Corte en el vértice 6 del cubo y desarrollo plano del nuevo cuerpo ($D(C_T)$)



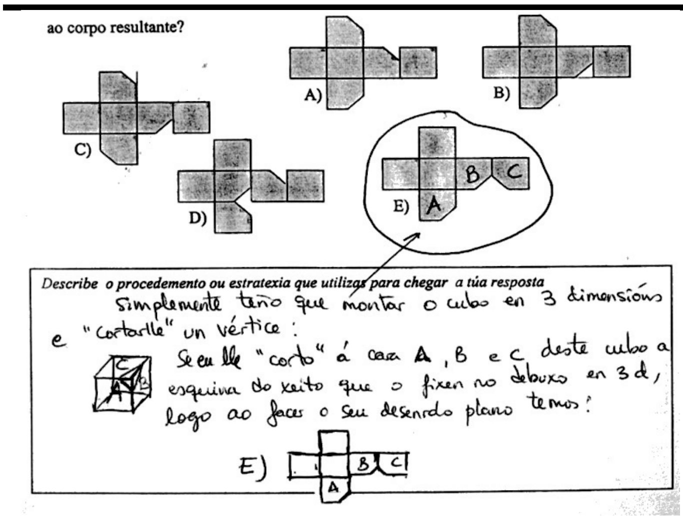
En algunos casos este es un argumento que refuerza la estrategia de componer los cubos mentalmente.

- Lenguaje:"imaginar un cubo sin un vértice y luego estirarlo, desenvolverlo (nº 6)", "comparar lo que me salía con alguno de los planos de arriba", "coincide con el E", "he dibujado un diseño y luego buscar tres lados cercanos", "Porque al cortar el vértice el que más semejanza tiene es…", "ejemplo para ubicarme en el corte de los vértices", "fui mirando cómo quedaría la figura al cortarle el vértice", "dibujar el cubo cortado por el vértice", "dibujé como sería el plano [desarrollo] del cubo", "dibujar las vista del cubo con un vértice cortado", "hacer un boceto", "pegar los cortes y desplegar", "cuando desenvuelves el cubo son tres los lados que quedan cortados", "hacer el cubo y descomponerlo pieza por pieza", "deshacer el cubo", "en uno salió una imagen igual a la opción E", "el corte afecta a tres cuadrados".
- Conceptos: cubo, vértice, cara, lado, desarrollo plano de un sólido, desarrollo plano de un sólido tridimensional, sólido truncado.
- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) en cada vértice del cubo confluyen tres caras; c) el desarrollo de un sólido es una representación externa que mantiene la forma y magnitud de las caras y lados y las relaciones métricas en dos dimensiones; d) a algunos puntos del cubo le corresponden dos del desarrollo plano (fenómeno de división en dos ("splitting") de este tipo de representación; e) al cortar mediante un plano un cubo a *m* unidades de uno de sus vértices, se cortan las tres caras que confluyen en dicho vértice.
- Procedimiento: dibujar un cubo en perspectiva paralela. Marcar sobre tres caras contiguas dos a dos segmentos que simulan el corte por un plano, a distancia *m* del vértice. Realizar el desarrollo plano del sólido así obtenido (cubo con un

vértice truncado). Identificar ese desarrollo obtenido en alguna de las opciones dadas.

- Argumento: se dibuja un cubo en perspectiva paralela, marcando sobre cada una de las tres caras un segmento (A_{i1}, A_{i2} y la A_{i3}) que corta a dos aristas consecutivas de las tres que confluyen en el vértice ("representación ostensiva de la acción "cortar el vértice"). Utilizando la propiedad de desdoblamiento de algunos vértices y aristas del nuevo sólido (cubo con un vértice truncado) se realiza el desarrollo plano de dicho sólido $D(C_T)$ (Figura 5.11): las caras cortadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3}, que se corresponden con las C_1, C_2 y C_6 del cubo, se encuentran en las posiciones $P_1(C_{T1})$, $P_1(C_{T2})$ y $P_4(C_{T3})$. Se compara dicho desarrollo plano con cada una de las opciones dadas, de manera que coincida exactamente la posición de cada una de las caras truncadas (porque las demás ya coinciden al ser todas las opciones el mismo tipo de desarrollo 1-4-1). Si alguna de las opciones coincide con dicho desarrollo, esa será la opción elegida.
- Así, las caras truncadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3} en el desarrollo A) son las correspondientes a C_1, C_2 y C_3 en las posiciones $P_1(C_{T1})$, $P_2(C_{T2})$ y $P_2(C_{T3})$ que no coinciden con las posiciones del desarrollo $D(C_T)$.
- En la opción B), las caras truncadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3} en el desarrollo A son las correspondientes a C_1, C_2 y C_3 en las posiciones $P_1(C_{T1})$, $P_1(C_{T2})$ y $P_2(C_{T3})$ que no coinciden con las posiciones del desarrollo $D(C_T)$.
- La opción C) tiene las caras truncadas (correspondientes a las C_1, C_2 y C_3) en las posiciones $P_4(C_{T1})$, $P_1(C_{T2})$ y $P_2(C_{T3})$ que tampoco coinciden con el desarrollo $D(C_T)$.
- Las caras truncadas en el desarrollo marcado por la opción D), que se corresponden con las caras C_1, C_5 y C_2, se encuentran en las posiciones $P_2(C_{T1})$, $P_1(C_{T2})$ y $P_2(C_{T3})$. Por lo tanto se descarta esta opción también.
- Las caras truncadas en el desarrollo de la opción E) coinciden exactamente (número de cara y posición) con el desarrollo $D(C_T)$ lo que conduce a que esta sea la solución a la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.33. Configuración cognitiva CC2 del ítem 4



Transcripción:

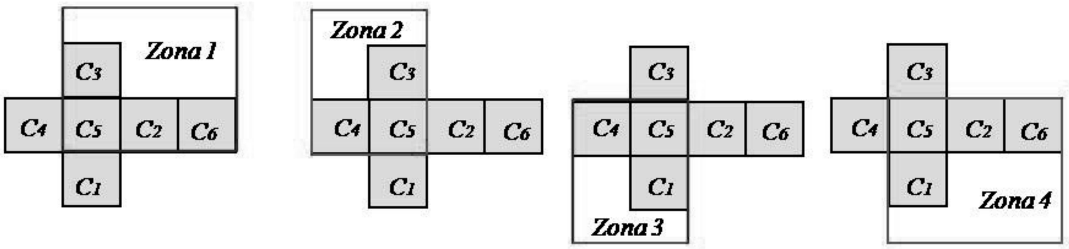
Simplemente tengo que montar el cubo en tres dimensiones y cortarle un vértice.

Si yo le corto a las caras A, B y C de este cubo la esquina de la forma que lo hice en el dibujo en 3D, luego si haces el desarrollo plano tenemos E)

Configuración cognitiva 3 (CC3). *Pertenencia de las caras cortadas a la misma "zona"*. En este caso el alumno tiene en cuenta que las esquinas cortadas deben estar situadas "del mismo lado". Esto supone que esta condición se convierte en necesaria a la hora de plegar el desarrollo y formar el cubo con un vértice cortado. El problema en esta configuración es determinar qué se entiende por "el mismo lado" o "misma zona" ya que no está especificado claramente en ninguna de las respuestas.

En la Figura 5.13 se detallan las diferentes zonas $(Z_i, i = 1,4)$ que se tienen en cuenta en función de las respuestas de los alumnos. Este reparto de zonas implica que un desarrollo con las caras opuestas cortadas (opuesta teniendo en cuenta el desarrollo plano, no la situación de las caras en el espacio), como es el caso de los desarrollos C_1 y C_3 o bien C_4 y C_6, se descartarían.

Figura 5.13. Notación para las diferentes zonas del desarrollo plano

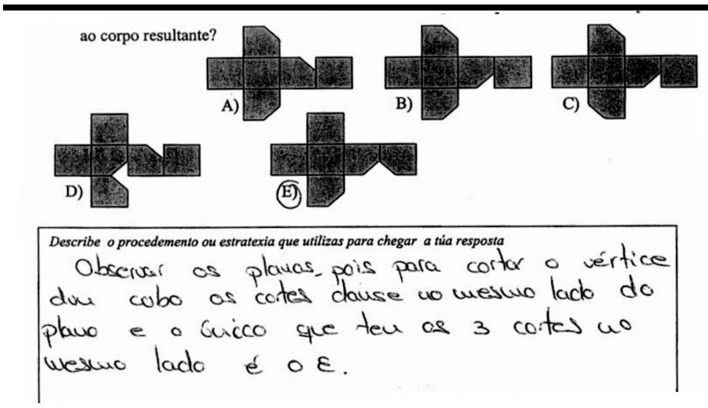


- Lenguaje: "los cortes han de estar próximos", "única figura en la que coinciden los cortes del mismo lado", "el corte tiene que verse reflejado en la misma parte", "los cortes en estos planos tienen que seguir un cierto orden", "cuando se corta un vértice se cortan tres aristas del mismo lado", "los cortes quedan todos en el mismo lado y los demás en dos lados", "las aristas cortadas deben quedar más o menos juntas", "los cuadrados recortados están juntos", "las caras cortadas han de estar contiguas", "todos los lados cortados pertenecen al mismo lado, por tanto al mismo vértice", "los tres lados que tienen el vértice cortado han de ser contiguos, tocarse entre sí", "no pueden estar en situación opuesta", "han de estar en la misma zona", "al cortar el vértice las partes tienen que estar seguidas",

- Conceptos: cubo, vértice, cara, lado, desarrollo plano de un sólido, desarrollo plano de un sólido tridimensional, sólido truncado.
- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) en cada vértice del cubo confluyen tres caras; c) el desarrollo de un sólido es una representación externa que mantiene la forma y magnitud de las caras y lados y las relaciones métricas en dos dimensiones; d) a algunos puntos del cubo le corresponden dos del desarrollo plano (fenómeno de división en dos ("splitting") de este tipo de representación; e) al cortar mediante un plano un cubo a m cm. de uno de sus vértices, se cortan las tres caras que confluyen en dicho vértice; f) las esquinas cortadas han de estar en la misma "zona" del desarrollo.
- Procedimiento: observar aquellos desarrollos que no tienen todas sus caras cortadas en la misma zona para descartarlos. Se realiza el plegamiento de los desarrollos que quedan para intentar formar el cubo sin vértice. Elegir el que forme un cubo con un vértice cortado.
- Argumento: se parte del desarrollo plano de un cubo, como un conjunto formado por seis elementos (caras: 3 cuadradas y 3 pentagonales) situados sobre un plano. Si se corta uno de los vértices quedan tres caras contiguas (dos a dos) cortadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3}. Por lo tanto, en el desarrollo plano de la nueva figura esas tres caras truncadas C_{T1}, C_{T2} y C_{T3} han de pertenecer todas a la misma zona Z_i ($i = 1$ ó 2 ó 3 ó 4). En la opción A, B y C se tiene que C_{T2} y $C_{T3} \in Z_1$ pero C_{T1} no (o bien C_{T2} y $C_{T1} \in Z_2$ pero C_{T3} no). En la opción D, C_{T1}, C_{T2} y $C_{T3} \in Z_1$ pero C_{T1} no (o bien C_{T2} y $C_{T1} \in Z_2$ pero C_{T3} no). Dicho de otro modo, las opciones A, B y C tienen cortadas caras opuestas (C_{T2} y C_{T3}) que se corresponden con la C_1 y la C_3 se eliminan por no estar en la misma zona,

quedando sólo las opciones D y E. Al plegar el desarrollo D, las aristas a_{i3} y a_{i2} se corresponden con la A_{i3} y la A_{i2} pero la a_{i1} no se corresponde con la arista del sólido A_{i1} por lo que se descarta esa opción también. La opción E lleva las aristas a_{ij} $(j = 1{,}3)$ a sus correspondientes A_{ij} $(j = 1{,}3)$ con lo cual esa será la solución a la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.34. Configuración cognitiva CC3 del ítem 4

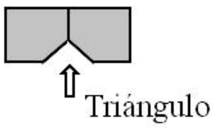


Transcripción:

Observar los planos, pues para cortar el vértice de un cubo los cortes se dan en el mismo lado del plano y él único que tiene 3 cortes en el mismo lado es el E).

Configuración cognitiva 4 (CC4). *Reconocimiento visual de un triángulo (imaginado).* Se basa en la eliminación de los desarrollos planos que no tengan representada la situación en la que dos caras cortadas (pentágonos) son contiguas en el desarrollo, compartiendo una de sus aristas cortadas (Figura 5.14) en alguna posición de su desarrollo. Esta situación se considera una condición necesaria para que la respuesta sea correcta. Después de elegir los que cumplen esa característica, en casi todas las respuestas de este tipo, se realiza el doblado mental a modo de comprobación.

Figura 5.14. Posición en el desarrollo plano de dos de las caras truncadas



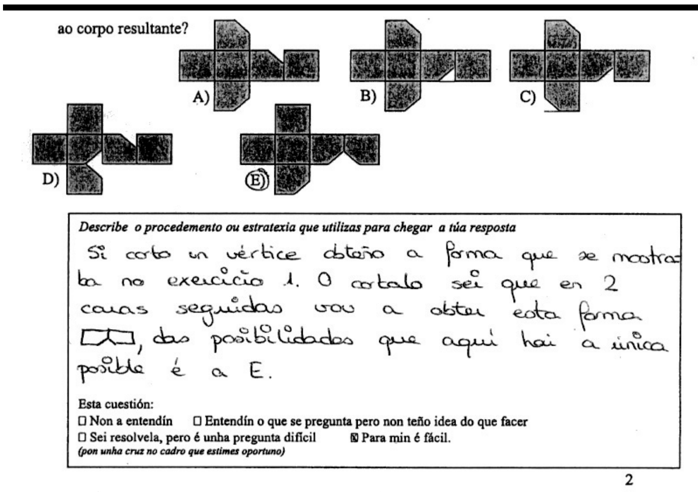
- Lenguaje: “al cortarle un vértice al cubo estaríamos haciendo un triángulo”, “aparece un triángulo”, “los cortes tienen que estar seguidos”, “se forma una pirámide”, “tiene que haber una forma así ^ ”, “en dos caras seguidas obtengo esta forma”, “cortamos dos caras de un cubo”, “al cortar hacemos un triángulo”, “dos caras siempre están juntas”, “cortas dos lados y una base”.
- Conceptos: Triángulo, cuadrado, cubo, vértice, cara, lado, desarrollo plano de un cuerpo tridimensional, plano, sólido truncado.

- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) en cada vértice del cubo confluyen tres caras; c) el desarrollo de un sólido es una representación externa que mantiene la forma y magnitud de las caras y lados y las relaciones métricas en dos dimensiones; d) a algunos puntos del cubo le corresponden dos del desarrollo plano (fenómeno de división en dos (“splitting”) de este tipo de representación; e) al cortar mediante un plano un cubo a m cm. de uno de sus vértices, se cortan las tres caras que confluyen en dicho vértice, f) al cortar un vértice de un cubo se forma un triángulo; g) al hacer el desarrollo plano de un cubo con un vértice cortado dos de las caras cortadas han de situarse juntas de forma que compartan uno de los vértice nuevos (alguno de los tres que resultan del corte del vértice del cubo inicial).
- Procedimiento: Observar que al cortar un vértice a un cubo aparece la imagen de un triángulo. Descartar aquellos desarrollos planos que no ofrezcan esa imagen. Identificar esa imagen en alguno de los desarrollos planos y comprobar que al plegar las caras se construye un cubo con un vértice cortado. Seleccionar esa opción como solución.
- Argumento: al cortar un vértice V_i (i=1,6) por un plano P_i a una distancia *m* del mismo, se cortan las tres caras cuya intersección es dicho vértice, de modo que aparece una nueva arista y un nuevo vértice en cada una de ellas. De este modo, al cortar el vértice V_i aparecen en su lugar tres nuevas aristas A_{i1}, A_{i2} y A_{i3} y tres nuevos vértices V_{i1}, V_{i2} y V_{i3} lo que conduce hacia la imagen semejante a un triángulo (si el cubo inicial fuera sólido aparecería una nueva cara triangular). Por lo tanto, al hacer el desarrollo plano del nuevo cuerpo tridimensional tendría que aparecer una imagen de un triángulo de la siguiente manera: dos de las aristas a_{ij} y a_{ij+1} (j=1, 2, 3; $a_{i4} = a_{i1}$) estarían compartiendo vértice en el desarrollo, formando una imagen incompleta de un triángulo (ya que faltaría un lado para cerrar, de forma ostensiva, un triángulo en el desarrollo); la otra arista que queda cerraría el triángulo una vez plegado el desarrollo. De esta manera se eliminan aquellas opciones dadas que visualmente no integren esa “imagen incompleta” de triángulo (que está en otro plano de percepción) que serían las opciones A, B y C. La opción D no se ajusta a esa imagen de triángulo ya que

tiene marcada media arista como tercer lado. En cambio la opción E mantiene esa imagen en el desarrollo por lo tanto es la opción elegida.

En esta configuración se utiliza la habilidad de discriminación visual al separar ese triángulo del desarrollo del cubo sin vértice. Se trata de un efecto visual potente.

Ejemplo de respuesta 5.35. Configuración cognitiva CC4 del ítem 4


ao corpo resultante?

A) B) C) D) E)

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

Si corto un vértice obteño a forma que se mostraba no exercicio 1. O cortalo sei que en 2 caras seguidas vou a obter esta forma, das posibilidades que aquí hai a única posible é a E.

Esta cuestión:

☐ Non a entendín ☐ Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer

☐ Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil ☒ Para min é fácil.

(pon unha cruz no cadro que estimes oportuno)

2

Transcripción:

Si corto un vértice obtengo la forma que se mostraba en el ejercicio 1. Al cortarlo sé que en dos caras seguidas voy a obtener esta forma. De las posibilidades que aquí hay la única que es posible es la E.

Configuración cognitiva 5 (CC5). *Fijar una de las bases del cubo como cara cortada*. Se discrimina atendiendo a si el cuadrado que hace de tapa superior (base superior) del cubo está cortada o no. Esta configuración supone considerar que el corte ha de estar hecho en una esquina superior. En este caso, la habilidad de *conservación de la percepción* no está del todo desarrollada, pues la forma se mantiene aunque se haya girado y el vértice cortado esté en otra posición.

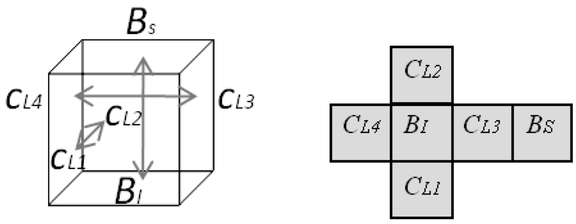
De acuerdo con el principio de esta configuración se utilizará la siguiente notación (Figura 5.15):

B_S: Base superior del cubo

B_I: Base inferior del cubo

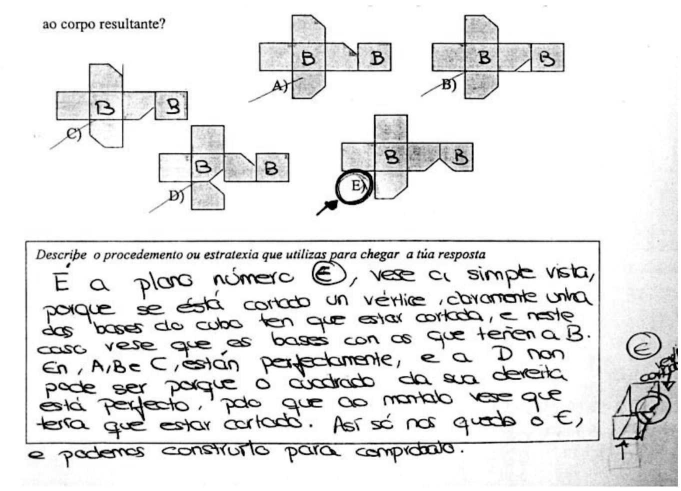
C_{Li}: Caras laterales del cubo, $i = 1, 2, 3, 4$

Figura 5.15. Caras del cubo y su desarrollo plano



- Lenguaje: "la parte de arriba tiene que estar cortada, por eso descartamos las demás", "también cortas un pedazo de base", "si se corta un vértice claramente una de las bases ha de estar cortada", "en los demás la tapa está entera".
- Conceptos: base, tapa, parte de arriba, orientación de un objeto, caras laterales, lado, cubo, vértice, cara, desarrollo plano de un cuerpo tridimensional, desarrollo plano de un sólido tridimensional, sólido truncado.
- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) en cada vértice del cubo confluyen tres caras y una de ellas siempre es una de las bases; c) el desarrollo de un sólido es una representación externa que mantiene la forma y magnitud de las caras y lados y las relaciones métricas en dos dimensiones; d) a algunos puntos del cubo le corresponden dos del desarrollo plano (fenómeno de división en dos ("splitting") de este tipo de representación; e) al cortar mediante un plano un cubo a m unidades de uno de sus vértice, se cortan las tres caras que confluyen en dicho vértice; f) un cubo tiene dos bases y cuatro caras laterales.
- Procedimiento: observar que al cortar un vértice del cubo se corta una de las bases y dos caras laterales contiguas. Considerar que el vértice cortado afecta a la base superior. Eliminar aquellas opciones que no tengan la base superior cortada. Sólo queda la opción E.
- Argumento: al cortar un vértice V_i de un cubo, se cortan dos caras laterales y una de las bases (B_I ó B_S) del cubo. Por tanto, aquellos desarrollos, dados como opciones, que no tengan o bien la base superior del cubo B_s o bien la base inferior B_i cortada no podrán corresponder a un desarrollo plano de un cubo con un vértice cortado. Las opciones A, B y C no tienen ninguna de las dos bases cortadas ya que las caras cortadas corresponden a $C_{L1}, C_{L2}\ y\ C_{L3}$ por lo que las únicas opciones posibles serían D y E. En el caso de la opción D, las caras cortadas son $C_{L1}, C_{L3}\ y\ B_I$ pero como se considera que el corte se hace de forma que afecte a la base superior, la opción D se descarta. La opción E es la única que cumple que una de sus caras truncadas coincide con la base superior del cubo (B_S), siendo esa la solución a la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.36. Configuración cognitiva CC5 del ítem 4



Transcripción:

Es el plano número E, se ve a simple vista, porque si está cortado un vértice, obviamente una de las dos bases del cubo tiene que estar cortada, y en este caso se ve que las bases son los que tienen la B. En A, B y C están perfectamente, y en la D no puede ser porque el cuadrado de su derecha está perfecto por lo que al montarlo tendría que estar cortado. Así sólo nos queda el E y podemos construirlo para comprobarlo.

5.3.4.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones asociadas al ítem 4

En la Tabla 5.24 se puede observar la distribución de los distintos tipos de configuraciones asociadas a este ítem con sus correspondientes frecuencias y porcentajes. La configuración CC1 es la que tiene una mayor frecuencia, a una distancia considerable de las demás configuraciones en cuanto a volumen de respuestas. El 23,75 % de los encuestados no argumenta su respuesta o deja el ítem en blanco lo que parece indicar, en el caso de la ausencia de argumentación, que tienen dificultades para expresar por escrito lo que hacen mentalmente.

Tabla 5.24. Frecuencia y porcentaje de las configuraciones cognitivas asociadas al ítem 4

Tipo de configuración	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Composición exhaustiva de todos los desarrollos.	210	52,50
CC2	Dibujar un cubo con la esquina cortada y realizar su desarrollo plano.	52	13,00
CC3	Pertenencia de las caras cortadas a la misma “zona”.	23	5,75
CC4	Reconocimiento visual de un triángulo.	11	2,75

CC5	Fijar una de las bases del cubo como cara cortada.	4	1
NC	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco.	94	23,50
NE	No entiende.	6	1,5
Total		400	100

En las configuraciones más frecuentes, CC1 y CC2, que suponen el 65,25% de la muestra, no se utiliza ningún tipo de propiedad (del cubo, de la representación plana, del cubo truncado) que permita discriminar entre las opciones de forma que se descarten algunas de ellas antes de recomponer el poliedro: o bien se montan todos los desarrollos (CC1) o bien se compara el desarrollo obtenido con todas las opciones (CC2). En el resto de las configuraciones, CC3, CC4 y CC5, se utilizan diversas propiedades (de forma más o menos acertada) que permiten descartar opciones al no cumplirlas. Sin embargo, tal y como muestran de forma verbal en su respuesta algunos estudiantes, estas tres últimas configuraciones requieren una recomposición del cubo como comprobación de la opción elegida.

Las configuraciones CC2 y CC5 están muy ligadas al concepto de orientación, estableciendo que el cubo y, por tanto, el cubo sin un vértice, han de tener una orientación y posición en el espacio que va a determinar las diferentes posiciones de las caras en el desarrollo plano. Supone considerar el cubo sin vértice como objeto orientado al discriminar, en el caso de la configuración CC5, las caras según su disposición en el espacio (base inferior como aquella cara en la que está apoyado el cubo, base superior como la opuesta a esta, etc.).

Las imágenes conceptuales de los estudiantes que siguen las configuraciones CC2 y CC5 son deficientes. Están formadas por pocos ejemplos prototípicos y con alguna característica visual peculiar. Se basan en la apariencia visual de esos prototipos, que comparan con los desarrollos presentados, rechazando aquellos que no coinciden con los prototipos de su imagen de concepto, convirtiéndose de este modo en la única referencia del estudiante para comparar con casos nuevos. Corresponde al primer tipo de comportamiento identificado por Vinner (citado por Hershkowitz, 1990). Siguiendo a Gutiérrez y Jaime (1996, p.5), la mejor manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes de un concepto y hacer hincapié en los ejemplos relacionados con esos errores.

En los argumentos dados en las configuraciones CC3 y CC4, el significado personal que tiene el estudiante indica que la formación de la imagen del concepto ha estado basada en pocos ejemplos pero incluyen propiedades matemáticas de las figuras. Esas propiedades las aplican a los desarrollos presentados, rechazando aquellos ejemplos que no las cumplan. Corresponde al segundo tipo de comportamiento de los estudiantes identificado por Vinner, dependiendo de la calidad de las imágenes conceptuales que tienen (Hershkowitz, 1990).

5.3.4.4. Análisis de errores

En la Tabla 5.25 se presentan la frecuencia y el porcentaje de cada uno de los tipos de error detectados en esta tarea. Los resultados muestran que es una tarea con un alto porcentaje de aciertos (76%), lo que reduce considerablemente la presencia de cualquier tipo de errores. No hay un porcentaje significativo de errores conceptuales, lo que puede ser debido al hecho de utilizar una figura y un desarrollo de la misma bastante habitual en el ámbito escolar y, por tanto, conocido por la mayoría de los estudiantes. Destaca también la ausencia de errores situacionales, consecuencia también de la cotidianeidad del tipo de tarea propuesta, incluso en la redacción de la misma. Por lo tanto, sólo cabe mención a los errores procedimentales de tipo 1P que proviene de la dificultad de componer mentalmente los diversos desarrollos.

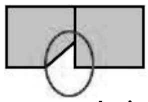
Tabla 5.25. Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores asociados al ítem 4

Tipo de errores	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores.	304	76
EB	No contesta / No argumenta.	43	10,75
EBC	Marcar la respuesta correcta sin argumentar.	13	3,25
1C	Definición de vértice.	2	0, 50
1S	Manifestar no comprender la tarea propuesta.	0	0,00
1P	Dificultad al imaginar la recomposición del cubo a partir de los desarrollos.	36	9,00
2P	Tener en cuenta sólo dos de las caras	2	0,50

	cortadas.		
Total		400	100,00

Una situación relacionada directamente con los errores procedimentales es que los estudiantes no consideran que una situación del tipo mostrado en la Figura 5.16, que aparece en todos los desarrollos dados excepto en la opción E, establece una condición suficiente para que el desarrollo no forme un cubo al que se le corta un vértice.

Figura 5.16. Condición suficiente para que el desarrollo no corresponda al cubo sin vértice

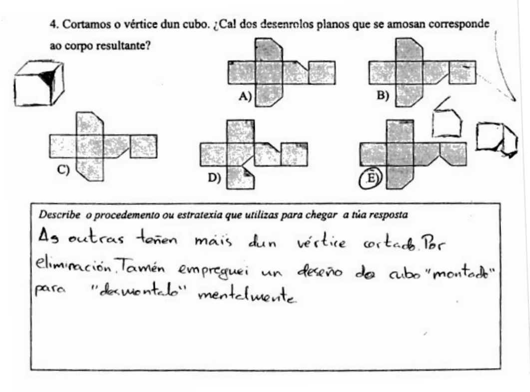


En el desarrollo plano del cubo con un vértice cortado, dos caras (cuadradas y/o pentagonales) no se pueden unir por aristas de distinta longitud. El reconocimiento de esta propiedad corresponde al tercer tipo de comportamiento identificado en el modelo de Vinner (Hershkowitz, 1990).

Según Piaget e Inhelder (1956) pasar de un sólido a un desarrollo plano supone realizar una acción mental y al mismo tiempo coordinar diferentes puntos de vista. Esta falta de habilidad para realizar esa serie de acciones puede originar el error 1P. Diezmann y Lowrie (2009, p. 422) hablan de un error que se produce al hacer una asociación errónea entre dos partes de una misma forma o entre una parte de la forma y la correspondiente parte de su desarrollo plano (asociación incorrecta) y que en nuestro caso correspondería al error 1P. Además consideran cuatro dificultades de las cuales dos son pertinentes para esta situación: la falta de experiencias anteriores (varios de nuestros estudiantes lo plasman en el papel) y memoria visual limitada. A pesar de ello, los resultados de la tarea propuesta por estos autores (aunque difiere de la presentada aquí) muestran que resultó ser una tarea bastante fácil, coincidiendo con los resultados obtenidos en este trabajo. Al igual que Diezmann y Lowrie (2009), la exploración sobre el pensamiento de los alumnos pone de manifiesto las dificultades que tienen para expresar su pensamiento mediante el lenguaje, en este caso, escrito.

Un aspecto situacional sobre el que se podría hacer una observación está relacionado con el significado que se atribuye a la palabra “cortar”. Parece que se considera “cortar” en un sentido que no requiere la necesidad de separar el vértice del resto (corte incompleto sin que exista separación de las dos partes), así también son considerados cortes los demás y por lo tanto implican a más de un vértice (Ejemplo de respuesta 5.37).

Ejemplo de respuesta 5.37. Significado dado a "cortar" en el ítem 4



Transcripción:

Los otros tienen más de un vértice cortado. Por eliminación. También empleé un diseño del cubo montado para desmontarlo mentalmente.

Se potencia en este ítem la habilidad de *discriminación visual,* en cualquiera de las configuraciones que han aparecido. Al montar mentalmente los diferentes desarrollos (configuración CC1) se compara con la imagen que se tiene de un cubo con un vértice cortado. En el caso de la configuración CC2, la comparación se hace desde el plano, comparando los desarrollos planos que presenta el ítem con el desarrollo plano que hace el estudiante. En las configuraciones CC3, CC4 y CC5, la comparación se realiza de forma local, al centrase el razonamiento en una posición concreta de las caras cortadas (CC4), en que caras están cortadas (CC5) o si pertenecen a una zona determinada (CC3).

El análisis de respuestas y el hecho de que haya un porcentaje bajo de alumnos que dejan el ítem sin responder (9,25%) pone de manifiesto que la configuración presentada para el desarrollo plano del cubo (Mesquita, 1992, pp. 25-26, Fischbein, 1993, p. 158) es la configuración más fácil de asociar con un cubo (configuración prototípica), debido a sus simetría y regularidad y también a que corresponde a un corte regular del cubo. Así mismo, aquellos estudiantes que siguieron la configuración CC2 (13%), al construir el desarrollo plano para compararlo con las opciones dadas, presentaron ese mismo tipo de desarrollo.

El trabajo de Cosío (1997, pp. 134-135) contiene resultados sobre un ítem semejante (la formulación es diferente pero la acción requerida es similar). Este autor encontró dos tipos de estrategias utilizadas por los estudiantes, la E1-2 y E1-1 que coinciden con las configuraciones CC1 y CC2, respectivamente.

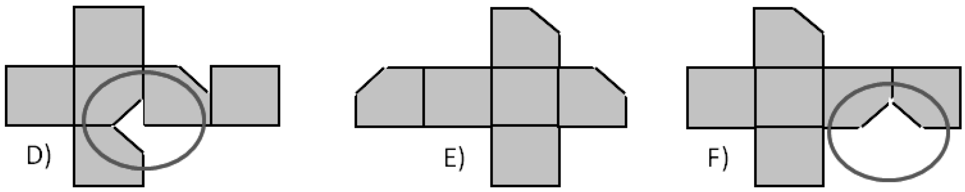
El estudio sobre la efectividad de las configuraciones conduce a los resultados que se pueden ver en la tabla siguiente:

Tabla 5.26. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 4

Tipo de configuración	Frecuencia	Porcentaje
CC1	187	89,05
CC2	45	88,24
CC3	23	100,00
CC4	11	100,00
CC5	4	100,00

Las configuraciones CC3, CC4 y CC5 tienen un 100% de efectividad, sin embargo hay que tener en cuenta que las propiedades utilizadas para hacer la discriminación se ven apoyadas por las opciones dadas, ya que por sí solas no son una condición ni necesaria ni suficiente para llegar a la solución de la tarea. Por ejemplo, en la configuración CC3, en dónde la discriminación se hace atendiendo a si están las caras cortadas en la misma zona, podría no funcionar si la respuesta no se apoya en algún criterio más (Figura 5.17).

Figura 5.17. Condición no suficiente en la CC3



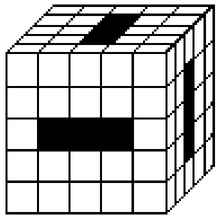
Por otra parte, la configuración CC5 pone de manifiesto el resultado de Guillén (2000, p. 47) que afirma que muchos estudiantes tienen la idea de que la base de los sólidos es la cara sobre la que se apoyan.

Tal y como detalla Fischbein (1993, p. 159), hay una serie de conocimiento tácito sobre el cubo (caras cuadradas, igualdad de lados, ángulos rectos, etc.), implícito en las operaciones mentales, sin el cual la operación en conjunto no tendría sentido.

5.3.5. ÍTEM 5: CUBO PERFORADO

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 *b) 80* *c) 70* *d) 96* *e) 85*



5.3.5.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 5

En la Tabla 5.27 se describen las frecuencias obtenidas en cada una de las opciones de respuesta existentes para este ítem. Con la etiqueta "otros valores" se identifican otros resultados propuestos por los alumnos en sus contestaciones que no coinciden con ninguna de las opciones presentadas.

Tabla 5.27. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 5

Opción	Frecuencia	Porcentaje
88	**136**	**34,00**
80	62	15,50
70	25	6,25
96	39	9,75
85	28	7,00
Otros valores	34	8,50
Ns/Nc	76	19,00
Total	400	100,00

Cerca de un 20 % de los estudiantes dejan sin responder este ítem, lo que nos indica que para ellos no se trata de una tarea sencilla. A pesar de que la opción correcta es la que obtiene el mayor porcentaje de respuestas, este dato no debe implicar una interpretación equivocadamente optimista si atendemos al hecho de que sólo el 21,25 %, es capaz (o al menos lo hace ostensivo) de justificar correctamente la validez de su respuesta. Si contabilizamos las respuestas argumentadas correctamente, la opción correcta sigue siendo la que presenta una mayor frecuencia, aunque el porcentaje inicial se reduce considerablemente y tan sólo habría una diferencia de 6 puntos porcentuales con la siguiente opción (80), en la que no se tiene en cuenta las intersecciones de los túneles. En "otros valores" debemos destacar la frecuencia del valor 132, que corresponde a la mitad de las respuestas contabilizadas dentro de ese apartado.

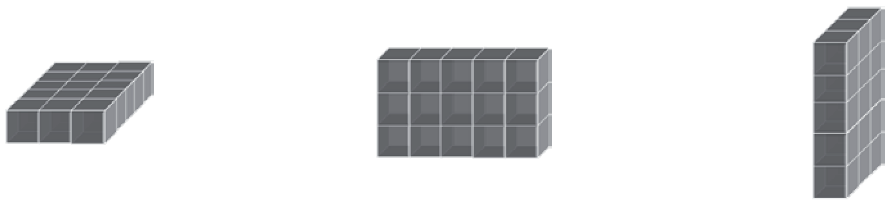
5.3.5.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 5

Siguiendo el esquema habitual, primeramente detallaremos las características de la notación empleada para describir las configuraciones asociadas a este ítem.

Si se considera la posición del cubo en el espacio como está representado en el enunciado de la tarea, la posición de los túneles en el espacio ($T1 = 3 \times 5 \times 1$; $T2 = 5 \times 1 \times 3$; $T3 = 1 \times 3 \times 5$) viene representada en la Figura 5.18.

Figura 5.18. Posición de los túneles en el espacio

Túnel 1 ($T1$) Túnel 2 ($T2$) Túnel 3 ($T3$)



Notación:

C: cubo completo ($5u \times 5u \times 5u$).

C_t: cubo tunelado

$med\ (C)$: medida del cubo sin perforar.

$med\ (C_t)$: medida del cubo tunelado/perforado.

$med(T1 \cup T2 \cup T3)$: medida de la unión de los tres túneles.

$med(T1 \cap T2 \cap T3)$: medida de la intersección de los tres túneles.

$med(T1 \cap T2) = med(T1 \cap T3) = med(T3 \cap T2)$: medida de la intersección de dos túneles cualesquiera.

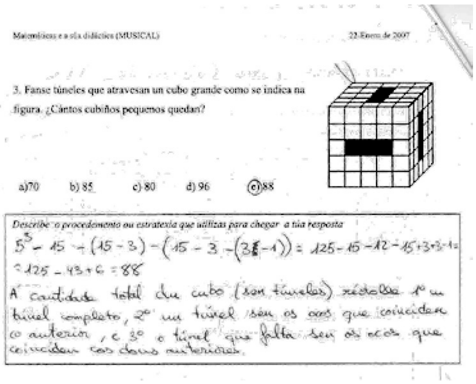
A continuación se describen las seis configuraciones cognitivas asociadas a esta tarea que se pueden encontrar en las respuestas de los individuos participantes en la actividad.

Configuración cognitiva 1 (CC1). *Uso de procedimientos extractivos*: Se basa en el uso de la fórmula tradicional para el cálculo del volumen como producto de tres dimensiones ($largo \times ancho \times alto$). Cálculo del volumen del cubo completo al que se le sustrae la medida del volumen de los túneles.

Esta configuración cognitiva coincide, básicamente, con la configuración epistémica de referencia descrita en el Capítulo 4, utilizando, de manera informal, la propiedad:

$med(C) = med(Ct\ ) + med(T1 \cup T2 \cup T3) - med(T1 \cap T2) -$
$med(T1 \cap T3) - med(T2 \cap T3)\ + med(T1 \cap T2 \cap T3)$

Ejemplo de respuesta 5.38. Configuración cognitiva CC1 del ítem 5



Transcripción:

$5^3 - 15 - (15 - 3) - (15 - 3 - (3 - 1)) = 88$

$= 125 - 15 - 12 - 10 = 88$

A la cantidad total de un cubo (sin túneles) le resto: 1º: un túnel completo; 2º: un túnel sin los huecos que coinciden con el anterior; y 3º: el túnel que falta sin los huecos que coinciden con los dos anteriores.

<u>Configuración cognitiva 2</u> (CC2). *Volumen como espacio vacío*. Se considera que el cubo está formado sólo por sus capas exteriores. En esta categoría los cálculos se realizan teniendo en cuenta sólo la parte exterior de la figura, es decir, las caras. La idea que subyace es la concepción del volumen como capacidad de un recipiente, como espacio vacío limitado por caras.

Para la descripción de esta configuración se considera N como el número de caras, $N = 3, 4$ ó 6. A continuación se describen los elementos primarios asociados a esta configuración:

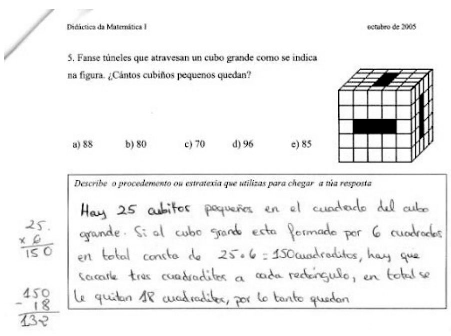
- Lenguaje: "lados", "cubitos", "cuadrado del cubo grande", "el cubo está formado por *N* cuadrados", "número de cuadrados de un lado" "cada cuadrado está formado por 25 cuadrados [cubitos]", "hay que sacarle tres cuadraditos a cada cuadrado". Notación: 5×5; $25 \times N$; $3 \times N$; $(25 \times N) - (3 \times N)$; $(25 - 3) \times N$.
- Conceptos: cubo, cuadrado, rectángulo, unidades de medida de superficie y volumen, sustracción ("sacar", "quitar"), sumar, multiplicar.
- Propiedades: a) Un cubo de arista $5u$, siendo u la unidad de medida de longitud del cubito unidad, está formado por *N* cuadrados (identificando cuadrado con cara); b) En cada cuadrado (cara) de un cubo de arista 5 cubitos, hay 25 cubitos;

c) un cubo de arista $5u$ consta de $25 \times N$ cuadraditos; d) En cada cara del cubo, 3 cuadraditos están ocupados por los túneles; e) aditividad de la medida; f) Propiedad emergente: en las condiciones del enunciado, la solución es $(25 \times N) - (3 \times N)$ cuadraditos o bien $22 \times N$ cuadraditos.

- Procedimiento 1: a) cálculo de la superficie lateral de un cubo de arista 5 unidades: $25 \times N$ unidades; b) cálculo (mental o escrito) del total de las unidades que hay que suprimir $3 \times N$; c) cálculo de las unidades de volumen que quedan $(25 \times N) - (3 \times N)$.
- Argumento 1: como cada cubo está formado por *N* cuadrados [caras] de 25 unidades [“cubitos”], en total hay $25 \times N$ “cuadraditos”. Hay que sacar 3 cuadraditos en cada cara que son los cuadraditos que ocupan los túneles, quitando en total $(3 \times N)$ cuadraditos, y, por lo tanto quedan $(25 \times N) - (3 \times N)$.
- Procedimiento 2: a) cálculo de la superficie lateral de una cara del cubo de arista $5u$ sin los tres cubitos del túnel $(22 = 25 - 3)$; b) cálculo de la superficie lateral de todo el cubo $22 \times N$ unidades.

Argumento 2: Como cada cubo está formado por *N* cuadrados [caras] de 22 unidades [“cubitos”], ya que se quitan 3 unidades que corresponden al túnel en cada cara, en total hay $22xN$ “cuadraditos”.

Ejemplo de respuesta 5.39. Configuración cognitiva CC2 del ítem 5


Didáctica da Matemática I octubro de 2005

5. Fanse túneles que atravesan un cubo grande como se indica na figura. ¿Cántos cubiños pequenos quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

Hay 25 cubitos pequeños en el cuadrado del cubo grande. Si el cubo grande esta formado por 6 cuadrados en total consta de 25.6 = 150 cuadraditos, hay que sacarle tres cuadraditos a cada rectángulo, en total se le quitan 18 cuadraditos, por lo tanto quedan

25. × 6 = 150

150 − 18 = 132

Transcripción:

Hay 25 cubitos pequeños en el cuadrado del cubo grande. Si el cubo grande está formado por 6 cuadrados, en total consta de 25.6=150 cuadraditos, hay que sacarle tres cuadraditos a cada rectángulo, en total se le quitan 18 cuadraditos, por lo tanto quedan:

25 x 6= 150; 150 −18 =132.

<u>Configuración cognitiva 3</u> (CC3). *Descomposición ortogonal por capas*. Se descompone el cubo perforado en 5 capas (cap1, cap2, cap3, cap4, cap5) siguiendo un esquema ortogonal (horizontal o vertical) por niveles, para a continuación contar las

unidades de volumen de cada capa y sumarlas. Esta técnica se basa implícitamente en una primera idea del concepto de "integral".

Notación empleada en esta configuración:

Cap_i: capa i en que se descompone el cubo Ct. Siguiendo el sentido de abajo hacia arriba, $i = 1, 5$.

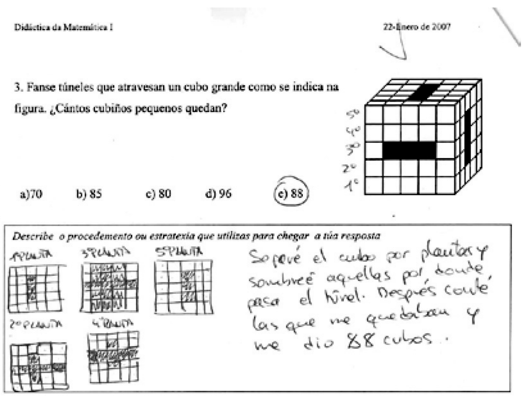
$med\ (Cap_i)$: Medida de Cap_i; $\quad i = 1, 5$.

Este procedimiento refleja la capacidad para la descomposición ortogonal de un objeto tridimensional y para visualizar las diferentes capas del cubo original, identificando las unidades de volumen ocupadas por los túneles en cada capa. Las diferentes posibilidades de la descomposición en capas dan lugar a distintas combinaciones de operaciones aritméticas, cualquiera de las cuales, si no se cometen errores, lleva a la respuesta correcta. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje: Se utilizan registros semióticos gráficos y textuales, con uso adecuado de términos como "separar", "planta", "sombrear", "contar", "cubo", "cubitos", "túnel", así como de representaciones gráficas de las cinco capas del cubo.
- Conceptos: cubo, ortoedro, túnel, planta, capa, corte, sección, nivel, volumen.
- Propiedades: a) un cubo de arista $5u$ (u entero), se puede descomponer en 5 ortoedros (capas) de dimensiones $5\times 5 \times 1$; b) aditividad de la medida; c) $med(Cap_1) = med\ (Cap_5)$ y $med\ (Cap_2) = med(Cap_4)$ por la simetría del cubo perforado; d) propiedad emergente: el número total de unidades de volumen que quedan es el resultado de sumar las unidades que quedan en cada uno de los 5 ortoedros resultantes, es decir, $\sum_{i=1}^{5} med(Cap_i)$.
- Procedimiento: a) imaginar y representar geométricamente la proyección plana de cada una de las capas del cubo; b) realizar el recuento de las unidades no ocupadas por los túneles en cada una de las capas; c) sumar los resultados.
- Argumento: de tipo gráfico y textual, justificando la descomposición en capas como procedimiento adecuado para alcanzar la solución a la tarea propuesta. Como el cubo se puede descomponer en cinco capas (horizontales o verticales), el número de cubitos unidad que quedan en cada capa es el resultado de descontar (restar) del número de unidades total de cada ortoedro $5\times 5 \times 1$ los cubitos correspondientes a los túneles en esa capa i ($med\ (Cap_i)$). Utilizando la propiedad de la aditividad de la medida sabemos que el número total de cubitos

unidad es la suma de los cubitos de cada una de las 5 capas en que se descompone el cubo grande por lo que el resultado es $\sum_{i=1}^{5} med\ (Cap_i)$.

Ejemplo de respuesta 5.40. Configuración cognitiva CC3 del ítem 5



Transcripción:

Separé el cubo por plantas y sombreé aquellas por donde pasa el túnel. Después conté las que me quedaban y me dio 88 cubos.

Nota: Los dibujos que muestra, conducen a la operación aritmética:

$$22 + 18 + 8 + 18 + 22 = 88$$

<u>Configuración cognitiva 4</u> (CC4). *Descomposición del cubo en secciones de afuera-adentro*. Se descompone la figura en secciones de afuera hacia dentro (o a la inversa) en forma de ortoedros $a \times b \times 1$, 3≤ *a, b* ≤5. En la Tabla 5.28 se muestran las distintas combinaciones que se pueden obtener siguiendo este procedimiento.

Tabla 5.28. Tipos de combinaciones de placas

Tipo de Ortoedros	Número de placas					
(placas) $a \times b \times 1$	5×5×1	4×5×1	3×5×1	4×4×1	3×4×1	3×3×1
$C1$	2		5			
$C2$	1	2	4			
$C3$	1	1		2	4	
$C4$	2		2			5

Notación:

Ci: Combinación i de placas $a \times b \times 1$; $i = 1, 4$

$med(Ci)$: suma de las medidas de cada placa de la combinación *i,* descontando los cubitos que corresponden a los túneles en cada una de dichas placas.

- Lenguaje: caras ocultas, caras visibles, cubitos, cubitos ocultos, túneles.
- Conceptos: secciones de un cubo, sumar, restar, ortoedros.
- Propiedades: a) un cubo de arista 5*u* se puede descomponer en ortoedros (placas) de la forma $au \times bu \times 1u$; $3 \leq a, b \leq 5$ con cuatro posibles combinaciones

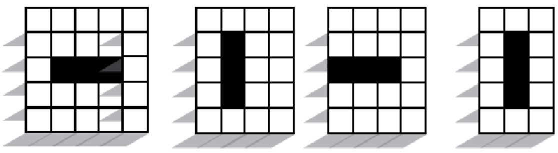
($C1, C2, C3, C4$) como se muestra en la Tabla 5.28; b) aditividad de la medida; c) propiedad emergente: la medida del cubo tunelado (Ct) es la suma de los cubitos que hay en cada una de las placas, independientemente de la combinación elegida ($med(Ct) = med(C1) = med(C2) = med(C3) = med(C4)$).

- Procedimiento: a) descomponer el cubo en placas, coherente con las propiedades anteriores; b) descontar directamente los cubitos correspondientes a los túneles en cada placa; c) sumar los cubitos unidad de todas las placas que conforman cada combinación específica.
- Argumento: como el cubo se puede descomponer en ortoedros disjuntos de la forma $a \times b \times 1$, se cuentan los cubitos que hay en cada ortoedro descontando los cubitos ocupados por los túneles, después se suman las cantidades de cubitos de cada sección y el resultado obtenido será la medida del cubo tunelado o perforado.

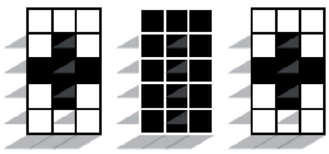
A continuación, en la Figura 5.19 se muestra gráficamente el proceso para la combinación $C2$: 1 ortoedro $5u \times 5u \times 1u$, 2 ortoedros de $4u \times 5u \times 1u$ y 3 de $3u \times 5u \times 1u$ (22+17+17+12+10+10=88).

Figura 5.19. Combinación C2 de la configuración CC4 del ítem 5

Capas exteriores siguiendo la dirección: de frente a la derecha (giro contrario a las agujas del reloj)

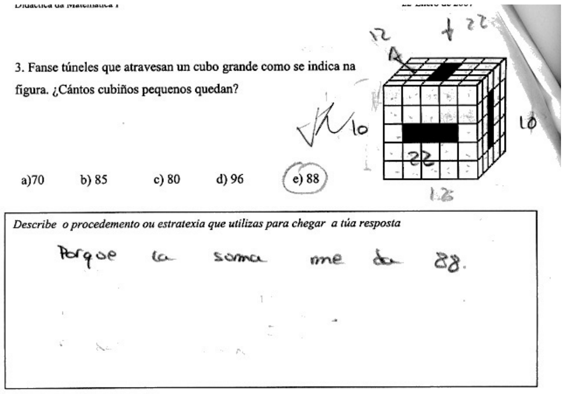


Capas interiores



En el ejemplo de respuesta 5.41 se muestra la configuración cognitiva 5 en la que se ha seguido la combinación C4.

Ejemplo de respuesta 5.41. Configuración cognitiva CC5 del ítem 5



Transcripción:

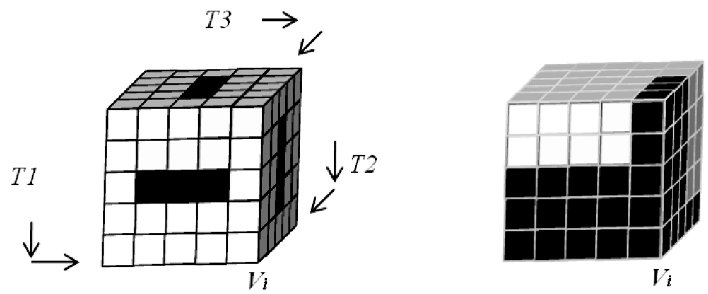
Además de los números que coloca sobre cada sección del cubo, escribe:

"porque la suma me da 88"

12, 22, 10,10, 22, 12

Configuración cognitiva 5 (CC5): *Traslación de túneles*. Se trasladan los túneles de manera que queden todos en torno a un vértice (Figura 5.20). Podría usarse un procedimiento justificándolo mediante un argumento que considera el volumen como un todo global (procedimiento sustractivo) o por partes (procedimiento sumativo).

Figura 5.20. Traslación de túneles al vértice V_i

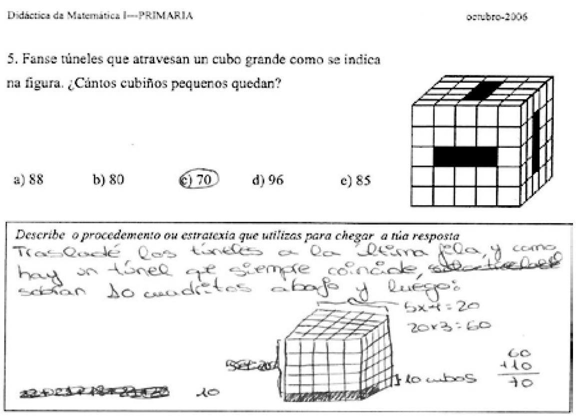


Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje: "traslación de túneles a la última fila", "coincidencia", "cuadritos", "sobrar". Gráfico: la representación gráfica del cubo con los túneles trasladados.
- Conceptos: ortoedro (túnel), traslación, fila (capa, corte, nivel), cuadrado ("cuadrito") sobrar (resto, residuo).
- Propiedades: a) la medida de una magnitud es invariante por traslaciones; b) aditividad de la medida; c) las unidades de medida sólo pueden contarse una vez.

- Procedimiento: a) imaginar y representar geométricamente la traslación de los tres túneles a la fila (capa) inferior del cubo original; b) realizar el recuento de las unidades de volumen ocupadas por los tres túneles una vez trasladados y restar ese número al número de cubitos del cubo sin perforar.
- Argumento: Elegido un vértice V_i del cubo (por ejemplo, se elije el vértice anterior-abajo a la derecha), como el volumen es invariante por traslaciones, se traslada el túnel $T3$ de coordenadas (x_3, y_3, z_3) a $(x_3 + 2, y_3 - 1, z_3)$; el túnel $T2$ de coordenadas (x_2, y_2, z_2) a $(x_2, y_2 - 2, z_2 - 1)$ y el túnel $T1$ de coordenadas (x_1, y_1, z_1) a $(x_1 + 1, y_1, z_2 - 2)$. De esa manera quedan todos los túneles en torno a dicho vértice V_i (Figura 5.20) y resulta más fácil contar los que se van a descontar del cubo completo ya que quedan casi todos los cubitos correspondientes a los túneles visibles. Así, la $med(C_t) = med\,(C) - \{med(T3) + \big(med(T2) - med(T3 \cap T2)\big) + (med(T3) - med(T3 \cap T1) - med(T2 \cap T1))\}$.

Ejemplo de respuesta 5.42. Configuración cognitiva CC5 del ítem 5



Transcripción:

Trasladé los túneles a la última fila y, como hay un túnel que siempre coincide, sobran 10 "cuadritos" abajo y luego:

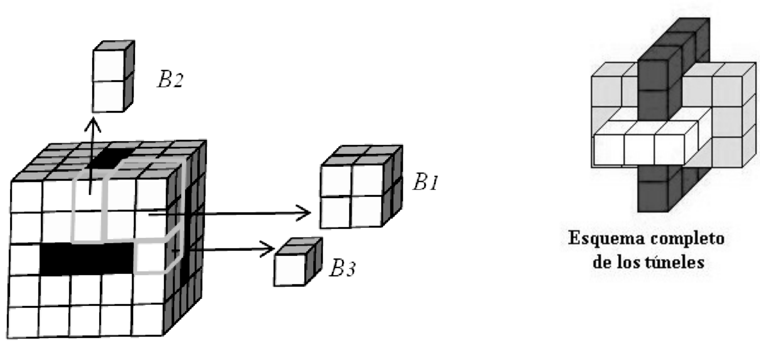
$5 \times 4 = 20;\ 20 \times 3 = 60;$

$60 + 10 = 70$

Esta argumentación necesita de la habilidad de *memoria visual* para recordar la posición que tenían al principio los túneles y el cambio de posición que sufren con esa reestructuración. Los elementos han sido cambiados de posición y las características visuales se han perdido con respecto a la situación de partida. Puede continuarse aplicando cualquiera de las otras configuraciones para realizar el recuento final. Se podría decir que es una estrategia para agrupar los cubos que forman los túneles y poder hacer el recuento más fácil. Aunque en un primer momento la idea pueda resultar interesante, a la hora de estudiar los inconvenientes de su empleo, es fácil intuir que se trata de una configuración que se complica en exceso si la aplicamos en casos de estructuras de mayor tamaño.

Configuración cognitiva 6 (CC6): *Extracción de las piezas complementarias a los túneles*. Se trata de un procedimiento sumativo sobre el complemento de los túneles lo que evita la complejidad del cálculo de la medida de los túneles y las intersecciones de los mismos (Figura 5.21). Se puede hacer el recuento de cada tipo de estructura o bien hacer uso de la simetría de la figura.

Figura 5.21. Explicación del procedimiento asociado a la configuración cognitiva 6



Notación empleada en esta configuración:

B_1: Ortoedro formado por $2u \times 2u \times 2u$ cubitos unidad.

B_2: Ortoedro formado por $u \times 2u \times u$ cubitos unidad.

B_3: Ortoedro formado por $u \times u \times 2u$ cubitos unidad. Es la imagen del ortoedro B_2 por una isometría .

B_4: Ortoedro formado por $u \times 2u \times u$ cubitos unidad. También se obtiene como imagen del ortoedro B_2 al aplicarle una isometría.

$med(B_1)$: medida de B_1.

$med(B_2)$: medida de B_2.

$med(B_2) = med(B_3) = med(B_4)$.

$N(B_1)$: número de ortoedros B_1.

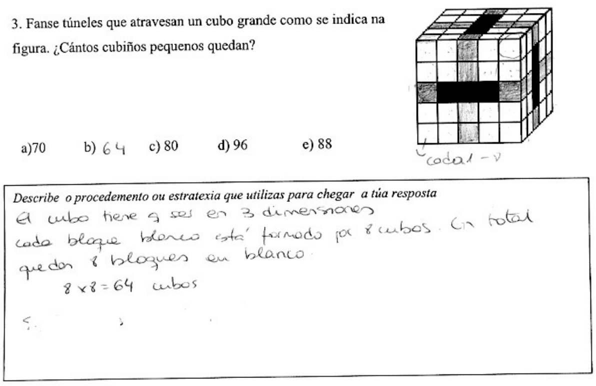
$N(B_2)$: número de ortoedros B_2.

Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje: “dimensiones”, “bloque” “cubos”. Gráficos: Señalización de los bloques en que se descompone el cubo perforado.

- Conceptos: cubo, dimensión, bloque (como sólido compacto tridimensional), unidad de volumen.
- Propiedades: a) el cubo perforado se puede descomponer en $N(B_1)$ ortoedros B_1, $N(B_2)$ ortoedros B_2 ; b) aditividad de la medida c) planos de simetría del cubo perforado; d) el volumen es invariante por giros o traslaciones.
- Procedimiento: a) extraer del cubo perforado los bloques B_1 y los B_2; b) contar el número de cubitos unidad que hay en cada uno de los dos tipos de bloques; c) multiplicar por el número de bloques de cada tipo que hay; d) sumar los dos resultados obtenidos.
- Argumento: como un cubo de 5u de lado se puede descomponer en los bloques anteriormente descritos, si se extraen de ese cubo los $N(B_1)$ bloques B_1 y los $N(B_2)$ bloques B_2 el número de cubitos unidad del cubo perforado será la suma de los cubitos unidad que compongan todos esos bloques, es decir, $N(B_1) \times med(B1) + N(B_2) \times med(B2)$.

Ejemplo de respuesta 5.43. Configuración cognitiva CC6 del ítem 5


3. Fanse túneles que atravesan un cubo grande como se indica na figura. ¿Cántos cubiños pequenos quedan?

a)70 b) 64 c) 80 d) 96 e) 88

codal - v

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

El cubo tiene q ser en 3 dimensiones cada bloque blanco está formado por 8 cubos. En total quedan 8 bloques en blanco.
8 x 8 = 64 cubos

Transcripción:

El cubo tiene que ser en 3 dimensiones, cada bloque blanco está formado por 8 cubos. En total quedan 8 bloques en blanco.

8 × 8=64 cubos

5.3.5.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas

El tipo de configuración cognitiva que presentan la mayoría de los estudiantes es la CC1 (Tabla 5.29), que hace referencia al volumen como un todo global. También resulta destacable el hecho de que casi la cuarta parte del alumnado (24,25%) responde a una configuración cognitiva CC2: realizar cálculos teniendo en cuenta sólo el exterior del cubo (curiosamente la mitad de estas respuestas dan como resultado el valor 88, valor correcto, pero con justificaciones no pertinentes). Como se puede observar en la Tabla 5.29, la sorprendente (por eficiente) configuración CC6, sólo fue percibida en la respuesta de un estudiante, siendo, sin embargo, el único razonamiento que no requiere el cálculo del valor de las intersecciones, lo que facilita en gran medida la resolución de la tarea.

En la misma tabla podemos observar que cada tipo de configuración tiene asociada una o varias unidades básicas que son las que se iteran. Estas unidades básicas están formadas por disposiciones bidimensionales de cubitos, salvo en el caso de la configuración CC1 en la que la unidad básica es el cubito unidad y en la configuración CC6 que incluye, además, disposiciones tridimensionales (Bloques). La diferencia entre "placas" y "capas" se establece debido a que en la distribución por capas se sigue una disposición de representación por niveles, manteniendo un orden y continuidad en colocación y posición de cada capa (abajo-arriba, arriba-abajo, izquierda-derecha o derecha-izquierda) y en las placas no.

Tabla 5.29. Frecuencia y porcentaje de los tipos de configuraciones asociadas al ítem 5

Tipo de configuración cognitiva	Descripción	Unidad básica	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Uso de procedimientos extractivos.	Cubito unidad $1 \times 1 \times 1$	169	42,25
CC2	Volumen como espacio creado (vacío).	Placas de $5 \times 5 \times 1$	97	24,25
CC3	Descomposición ortogonal por capas.	Capas de $5 \times 5 \times 1$	27	6,75
CC4	Descomposición del cubo en secciones de afuera-adentro.	Placas $5 \times 5 \times 1$; $4 \times 5 \times 1$; $3 \times 5 \times 1$; $4 \times 4 \times 1$; $3 \times 4 \times 1$; $3 \times 3 \times 1$	2	0,50
CC5	Traslación de túneles.		1	0,25
CC6	Extracción de las piezas complementarias a los túneles.	Bloques de $2 \times 2 \times 2$; $2 \times 1 \times 1$	1	0,25

NC	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco.	88	22,00
NE	No entiende	15	3,75
Total		400	100,00

Mientras en la configuración CC1 el centro de atención está puesto en la medida de los túneles para poder conocer el número de cubitos del cubo perforado, en la configuración CC6 la atención se centra directamente en la medida de las piezas que forman el cubo perforado, sin interesarse por la medida de los túneles, ni su estructura espacial interna, que en el caso de CC1 es fundamental para poder alcanzar la solución correcta. En la configuración CC1 se pone en juego la habilidad de identificación visual al ser necesario aislar el túnel de su contexto para poder cuantificar su volumen.

En la configuración CC2, los estudiantes, para realizar la enumeración de la disposición 3D, se centran en las disposiciones de cuadrados que aparecen en las caras exteriores de la disposición 3D pero no hay mantenimiento de las caras como concepción de composiciones (véase descripción del ítem 5 en el Capítulo 3). Aunque el núcleo de esta configuración está basado en la idea de un cubo hueco, la investigación de Battista y Clements (1996, p. 277) muestra un ejemplo de una entrevista en la que una estudiante utiliza este tipo de configuración pero no se pone de manifiesto que la alumna piense que en el interior no hay cubos. Simplemente, la alumna no intenta contar los cubos interiores porque cree que el método que ella emplea ya da cuenta de ello. Algunas respuestas a esta interpretación del volumen como espacio vacío (creado) se hacen más confusas al contemplar simultáneamente la perspectiva tridimensional de los túneles.

En la configuración CC3, es necesario tener desarrollada la habilidad de reconocimiento de las posiciones espaciales para ser capaz de situar en cada una de las capas la posición de los cubitos y los lugares correspondientes a los túneles, relacionando la situación de unos cubitos con los demás tanto en el plano horizontal como en el plano vertical.

Las configuraciones CC1, CC2, CC3, CC4 y CC5 se pueden agrupar en cuanto a su visión del nuevo cuerpo (cubo tunelado) como el resultado de aplicar una determinada acción sobre un cuerpo inicial (cubo). Sin embargo, la configuración CC6 ofrece una perspectiva diferente del objeto, se parte del propio cubo tunelado y no de un cubo completo en el que se le hacen túneles, no juega con una partición del objeto en dos partes: una y su complementaria.

5.3.5.4. Análisis de errores

En la Tabla 5.30, se han agrupado los siguiendo la clasificación ya empleada en los demás ítems: errores conceptuales (EC), errores procedimentales (EP) y errores situacionales (ES). Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los errores son de tipo conceptual ya que suponen el 30,50% del total.

Tabla 5.30. Frecuencia y porcentaje de errores por tipo asociados al ítem 5

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores	85	21,25
EB	Sin argumento con opción incorrecta	79	19,75
EBC	Sin argumento con opción correcta	9	2,25
ECP	Errores conceptuales	122	30,50
ES	Errores situacionales	51	14,25
EP	Errores procedimentales	48	12,00

Hay que hacer constar, además, que sólo el 21,25% de los sujetos resuelve la tarea y la valida correctamente, dato que contrasta con la cantidad de estudiantes que eligen la opción correcta 88 (34%). Esto pone de manifiesto carencias cognitivas, así como dificultades para hacer ostensivos razonamientos mentales (carencias argumentativas). El valor correcto (88) puede obtenerse como resultado de aplicar un argumento incorrecto, como por ejemplo en el caso de la configuración CC2 con $N = 4$ (argumentaciones 1 y 2).

En la Tabla 5.31 podemos ver una clasificación desglosada de los errores. Se puede observar que los errores conceptuales se concentran en los tipos 2C y 3C, que se derivan de argumentos basados en considerar sólo la parte exterior del cubo (configuración CC2). En el caso de los errores procedimentales sólo cabe destacar el tipo 2S en el que no se contempla ninguna de las intersecciones de los túneles. Los errores procedimentales se distribuyen de una manera más uniforme entre las distintas categorías, sobresaliendo ligeramente el tipo 1P que recoge errores de cálculo.

Tabla 5.31. Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores asociados al ítem 5

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores.	85	21,25
EB	No contesta/ No argumenta.	79	19,75
EBC	Sin argumento con opción correcta.	9	2,25
1C	No recordar características del cubo.	20	5,00
2C	Duplicar las caras del cubo que aparecen en el dibujo.	56	14,00
3C	Atribuir cuatro caras al cubo.	41	10,25
4C	Aplicación incorrecta de la multiplicación asociada al concepto de medida.	5	1,25
1S	Afirmar verbalmente no comprender la tarea propuesta.	15	3,75
2S	No considerar que los túneles se intersequen.	40	10,00
3S	Extensión de la dimensión de los túneles.	1	0,25
4S	Contar sólo las caras del cubo que aparecen en el dibujo.	1	0,25
1P	Cálculo incorrecto.	24	6,00
2P	Identificar sólo una intersección.	4	1,00
3P	Identificar sólo dos intersecciones.	11	2,75
4P	Identificar intersecciones dos a dos pero no la de los tres túneles.	9	2,25
Total		400	100,00

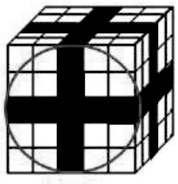
Coincidiendo con lo que nos habían mostrado los resultados obtenidos por Ben-Chaim et al. (1985), el error 2C, que corresponde a contar las caras de los cubos que se presentan en la ilustración de la tarea y duplicarlas, es el más habitual. El error 3C nos lleva hacia el doble conteo, otra vez, al contar las caras de los cubos que aparecen en el diagrama y añadir una cara más del cubo global.

Este fenómeno del doble conteo es debido a una falta de coordinación de las distintas vistas del objeto y tiene una presencia importante en los resultados obtenidos ya que se observa en el 24,50% (errores 2C, 3C y 4S) de los estudiantes (en las investigaciones de Battista y Clements (1996) y Ben-Chaim et al. (1985) se observa en el 39% de la muestra pero se debe tener en cuente que sus estudiantes son de primaria y secundaria).

Se distingue entre el error 3C, que está basado en el cálculo de las caras de los cubitos exteriores de la figura a la que se le atribuyen 4 caras, y el error 1C porque se trata de una asociación con el número de lados de un cuadrado, tal y como se recoge textualmente en algunas respuestas. El error 4C proviene del cálculo del volumen del cubo que se supone compuesto de 5 capas de 5×4. En esta categoría se identifica una aplicación incorrecta de la multiplicación como operación asociada al concepto de medida. A diferencia de los errores 2C y 3C, el 4C indica que el espacio se rellena por completo, a excepción del túnel que se arrastra en una tercera dimensión.

El cálculo del volumen sin tener en cuenta ninguna de las intersecciones de los túneles nos lleva al error 2S. Se considera la figura y los túneles de forma global pero no las intersecciones entre ellos. El error 3S hace referencia a una extensión de los cubitos que corresponden a los túneles (Figura 5.22) pasando a ser de dimensiones $5u \times 5u \times 1u$.

Figura 5.22. Extensión de los túneles



El error 4S se corresponde con uno de los cuatro errores que clasifica Ben-Chaim et al. (1985) como "contar las caras de los cubos que se muestran en el dibujo". El error de contar sólo las caras que se ven (tres) se debe a que los estudiantes consideran el dibujo como un objeto estrictamente bidimensional y al no realizar la duplicación de las caras que ven parece que no visualizan la parte oculta del objeto. Este error pone de manifiesto que el estudiante ha de considerar las representaciones externas de las figuras dentro de una interpretación geométrica, pero cuando no tienen suficientes conocimientos teóricos, los modelos de los sólidos o de sus elementos se interpretan a partir de una lectura perceptiva (Laborde, 1996; Guillén, 2000, p. 49).

En el caso del error 4P, aunque se reconocen las intersecciones de los túneles dos a dos ($T1 \cap T2$; $T1 \cap T3$; $T2 \cap T3$), falta considerar el cubito unidad que es común a los tres túneles ($T1 \cap T3 \cap T2$), mientras que en el 2P y el 3P muestran dificultades para coordinar vistas ortogonales del cubo perforado y así percibir las todas las intersecciones (Battista y Clements, 1996). De cualquier forma, hay una diferencia fundamental entre los errores 2P, 3P y 4P con el 2S puesto que los estudiantes que cometieron este último tienen una estructuración espacial del cubo perforado pobre e incompleta, al considerar los túneles como componentes separadas que no se interrelacionan entre sí. En este caso, la deficiente habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales no les permitirá identificar las posiciones de los tres túneles y por tanto las intersecciones entre los mismos. Los errores 2P, 3P, 4P y el 95% de los errores 2S están íntimamente ligados a la configuración CC1.

Las investigaciones de Ben-Chaim et al. (1985) y Battista y Clements (1996) constatan las dificultades de los estudiantes de primaria para calcular la cantidad de cubos unidad que hay en módulos multicubo con forma de prismas rectangulares representados en proyección paralela e isométrica. En nuestro caso se añade una dificultad a la tarea al incorporar túneles a la estructura, aunque se trata de estudiantes universitarios y no de alumnos de primaria. Los autores anteriormente citados encontraron estrategias ineficaces debido a errores en la interpretación de las representaciones planas, análogas a las que se encontraron en este trabajo en la configuración CC2. Ricco, Vergnaug y Rouchier (1983), observaron que, como consecuencia de esa dificultad, los estudiantes no comprenden la multilinealidad del volumen, lo que los lleva una aplicación incorrecta de las fórmulas de cálculo del mismo (error 2C). Hirstein (1981) atribuye muchos de estos problemas a la confusión área-volumen.

La descripción de las 4 estrategias que Battista y Clements (1996, p. 263) hallaron en su estudio sobre la comprensión del recuento de disposiciones tridimensionales de cubos en niños, presenta algunas coincidencias con los procedimientos vistos en las configuraciones anteriores: su estrategia A (organización por capas) hace referencia a la CC3; la estrategia B (el estudiante conceptualiza el conjunto de cubos como espacio rellenado pero no en capas) está directamente relacionada con la CC4; la estrategia C (el estudiante conceptualiza el conjunto de cubos en términos de sus caras) se correspondería con la CC2; la estrategia D (uso de la fórmula $largo \times ancho \times alto$) con la CC1.

Según Battista y Clemens (1996, p. 290), los alumnos perciben el cuerpo tridimensional como un espacio a rellenar y se esfuerzan por estructurarlo de esa forma. Así, los que completan una estructura global de la disposición usan estrategias A (CC3). Aquellos que están en transición usan estrategias B (CC4), su reestructuración es local, pieza por pieza, no han formado una concepción integrada del conjunto entero que globalmente coordine sus dimensiones. Los que consideran la disposición de cubos como un conjunto no coordinado de caras utilizan las estrategias C (CC2). Según estos autores, los estudiantes pasan de ver la estructura como un conjunto no coordinado de capas a terminar viéndolo en términos de capas. Esto no concuerda exactamente con nuestros resultados ya que hay otras configuraciones, además de la CC3, que proporcionan una correcta estructuración espacial global del cubo perforado como son la configuración CC1 y la CC6. La conclusión es que muchos alumnos no son capaces de enumerar bien la matriz porque no tienen una correcta estructuración espacial de la misma.

A diferencia de los resultados mostrados en las investigaciones de Ben-Chaim et al. (1985) y Battista y Clements (1996), en nuestro estudio la configuración CC1 es la que más alumnos presentan. Según estos autores sólo aquellos alumnos que utilizan la estructuración por capas estarían capacitados a hacer un uso significativo de la fórmula del volumen. Hemos podido constatar (coincidiendo con los resultados de estos dos autores) que la mayoría de los estudiantes que utilizaron la fórmula construyeron su procedimiento mediante dos pasos: primero determinan el número de cubos en una capa (utilizando la multiplicación o la adición de unidades) y segundo, cuentan el número de capas (mediante multiplicación, adición o saltar contando). No se puso de manifiesto que en el proceso tengan en cuenta un producto tridimensional y que éste describa su procedimiento para contar los cubos en una disposición tridimensional, siendo simplemente la aplicación de una fórmula aprendida.

En cuanto a la efectividad de las configuraciones (Tabla 5.32), se obtiene un 62,96 % para la configuración CC3 y un 39,64% para la configuración CC1. Estos resultados corroboran los de Battista y Clements (1996) en cuyo estudio se muestra que la estrategia más efectiva fue la A y la menos efectiva la C, que se corresponden con la configuración CC3 y CC1 respectivamente.

Las configuraciones CC5 y CC6 tuvieron un 0% de efectividad aunque hay que tener en cuenta el bajo porcentaje asociado a cada una de ellas. En el caso de las configuraciones CC4 y CC5, se requiere un conocimiento y control más elevado de la estructuración espacial del objeto y de las relaciones espaciales para obtener buenos resultados.

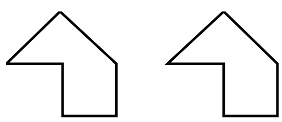
Tabla 5.32. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 5

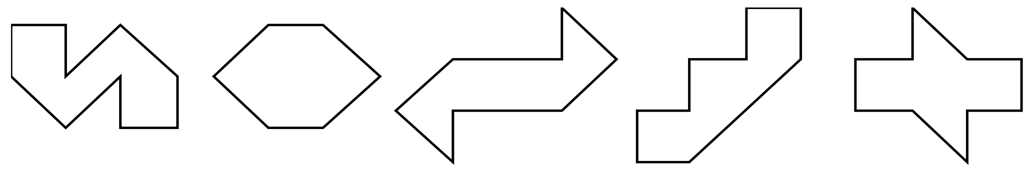
Tipo de configuración	Frecuencia	Porcentaje
CC1	168	39,64
CC3	27	62,96
CC4	1	50,00
CC5	0	0,00
CC6	0	0,00

Battista (2007, pp. 897-898) establece siete niveles de sofisticación en la estructuración y enumeración en configuraciones matriciales 3D de los estudiantes. Esta clasificación, teniendo en cuenta sus particularidades, se puede aplicar a nuestra investigación relacionando las distintas configuraciones y los errores analizados. Así, la configuración CC2, con los errores asociados 2C, 3C y 4S nos llevan a pensar en el nivel 2 (*Inicio de la utilización de los procesos de localización de unidades y organización de combinaciones)* para expresar el nivel alcanzado por los estudiantes. Las configuraciones CC4 y CC5 se apoyan en una argumentación que podemos clasificar dentro del nivel 5 de sofisticación (*Utilización del proceso de localización de unidades suficiente para localizar correctamente todas las unidades, pero empleando combinaciones inferiores a las máximas).* El tipo de argumentación aportado en la configuración CC3 se encuentra en el nivel 6, que Battista describe como *Desarrollo y coordinación completos de los procesos de localización de unidades y organización de combinaciones.* Por último, la configuración CC6, donde la habilidad de *identificación visual* está desarrollada de una forma excelente, se correspondería con el nivel 7 (junto con la CC1) que señala Battista como *Procedimientos numéricos conectados con la estructuración espacial, Generalización.*

5.3.6. ÍTEM 6: COMPONER FORMAS CON DOS PIEZAS IGUALES

Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa. ¿Qué figura NO podremos formar con estas dos piezas?





5.3.6.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 6

En la Tabla 5.33 se muestran los resultados obtenido para este ítem. Además de las opciones que se daban (A, B, C, D, E) se han incluido otras opciones aportadas por los estudiantes que recogen dos elecciones de las opciones dada (D y E, C y E, B y D) y la etiqueta T para indicar que es posible formar todas las figuras presentadas como opciones de respuesta.

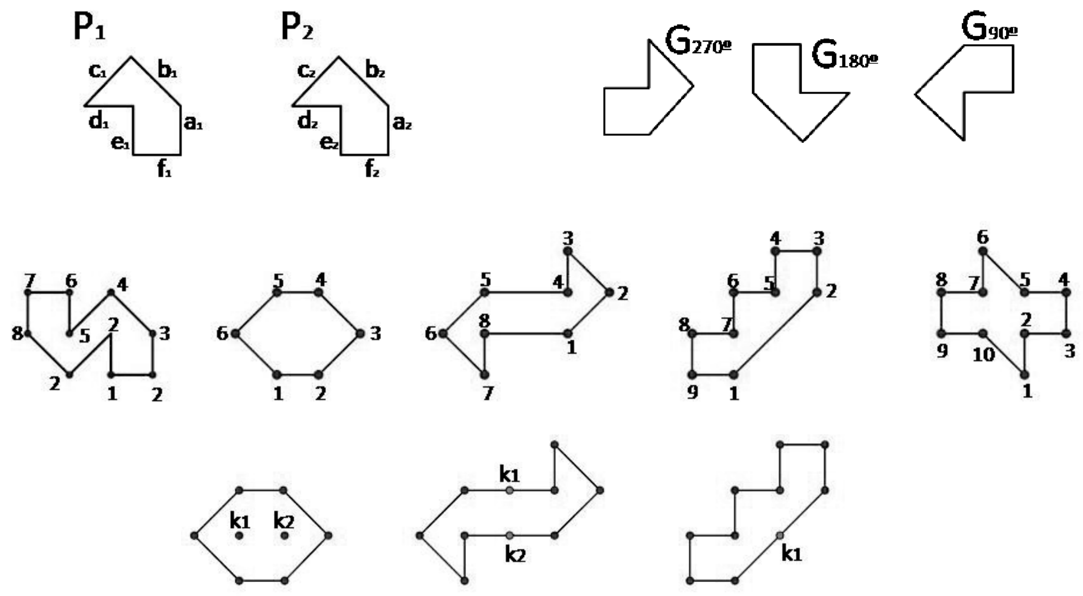
Tabla 5.33. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 6

Opción	Frecuencia	Porcentaje
A	46	11,50
B	77	19,25
C	3	0,75
D	**192**	**48,00**
E	24	6,00
T	32	8,00
D y E	1	0,25
C y E	1	0,25
B y D	3	0,75
Ns/Nc	21	5,25
Total	400	100,00

5.3.6.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 6

Se considerará la siguiente notación específica para este ítem, que permitirá llevar a cabo una descripción más fluida en la descripción de las configuraciones.

Figura 5.23. Notación ítem 6



$m = med(a_i)$: Medida del segmento a_i.

$med(a_i) = med(c_i) = med(d_i) = med(e_i)$; $med(b_i) = med(c_i)$; $i = 1{,}2$.

$med(b_i) = \sqrt{2} \cdot a_i$

<u>Configuración cognitiva 1</u> (CC1). *Comprobación exhaustiva ostensiva.* Se marcan o identifican las dos piezas en cada una de las figuras para después comprobar qué movimientos (giros, traslaciones, simetrías) realizados sobre ellas nos llevarían a esa posición para construir cada una de las figuras.

- Lenguaje: “dividir las figuras en dos partes”, “buscar las piezas en cada figura”, “volcar una pieza”, “cara al revés”, “mover mentalmente”, “darle la vuelta”, “salir del plano”. Notación: marcar sobre las figuras los segmentos o líneas que separan las dos piezas
- Conceptos: figura, piezas, giro, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) los giros y traslaciones son movimientos rígidos que no cambian el sentido de una figura; c) la unión de polígonos se hace a través de lados de igual medida.
- Procedimiento: marcar sobre las figuras las dos piezas. Para cada una de las figuras situar cada pieza atendiendo al movimiento realizado sobre ellas para conseguirlo. Si no hay ningún giro sobre el plano que lleve a situar una de las piezas en una figura *F* de las dadas en el enunciado, esa será la figura buscada.

- Argumento: como las figuras se supone que están formadas por las piezas P_1 y P_2 se intenta encontrar cual sería la posición de estas en cada una de las figuras. Es decir, se dividen las figuras mediante un segmento (o poligonal) de tal manera que se pueda ver que están formadas por las dos piezas iniciales. La figura A, queda dividida en las dos piezas por el segmento que une el vértice v_5 con v_{10}. La figura B, queda dividida en las dos partes a través de la línea poligonal (formada por tres segmentos) que se define de la siguiente manera: primero consideramos $\overline{v_3v_6}$ el segmento que une v_3 y v_6. Ese segmento se divide en tres partes de igual medida (m). La recta que pasa por los vértices v_4 y v_2 corta perpendicularmente al segmento $\overline{v_3v_6}$ en un punto k_1, de modo que se tendrá el segmento $\overline{v_4k_1}$. Por otra parte la recta que pasa por los vértices v_5 y v_1 corta perpendicularmente al segmento $\overline{v_3v_6}$ en un punto k_2, de modo que se tendrá un nuevo segmento, el segmento $\overline{v_1k_2}$. El tercer segmento de la poligonal es el de extremos k_1 y k_2 $(\overline{k_1k_2})$.

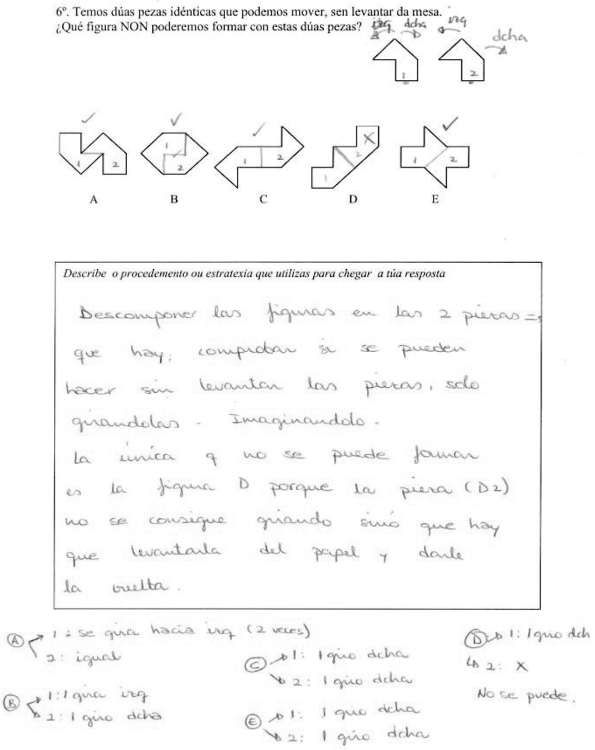
  Para la partición de la figura C en las dos piezas se consideran los puntos medios k_1 y k_2 de los segmentos $\overline{v_4v_5}$ y $\overline{v_1v_8}$. El segmento $\overline{k_1k_2}$ divide a la figura en las dos piezas dadas.

  La partición de la figura D se hace a través del segmento que une el vértice v_6 con el punto medio k_1 del segmento formado por los vértices v_1 y v_2.

  La figura E se descompone en las dos piezas P_1 y P_1 por medio del segmento de vértices v_5 y v_{10}.

  Una vez obtenida la descomposición de las figuras en cada una de la piezas se analizan los movimientos (de forma mental) que llevan a formarlas. Para formar la figura A, se gira 180º la pieza P_1 y la pieza P_2 se traslada y se unen las dos piezas por sus lados d_1 y d_2. La figura B se forma girando 90º la pieza P_1 y la 270º la pieza P_2. Después se unen por los lados e_i, d_i y f_i respectivamente. Si se gira 90º la pieza P_1 y 270º la pieza P_2 y se unen por los lados f_i correspondientes se obtiene la figura C. La figura E se obtiene uniendo por los lados b_i la pieza P_1 girada 270º y la P_2 girada 90º. Para obtener la figura D habría que que girar 270º P_1 y levantar de la mesa la pieza P_2 (movimiento equivalente a la realización de una simetría axial) ya que no hay ningún giro ni traslación que permita llegar a la situación necesaria para formar dicha figura. Habría que levantar de la mesa y volcar una de las piezas.

Ejemplo de respuesta 5.44. Configuración cognitiva CC1 del ítem 6



Transcripción:

Descomponer las figuras en las dos piezas que hay: comprobar si se pueden hacer sin levantar las piezas, sólo girándolas. Imaginándolo.

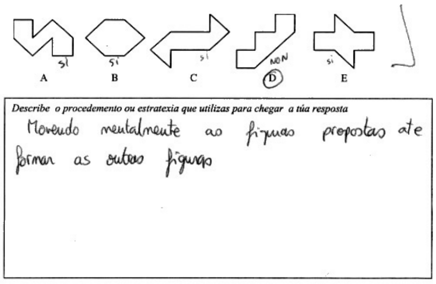
La única que no se puede formar es la figura D porque la pieza (D_2) no se consigue girando sino que hay que levantarla del papel y darle la vuelta.

<u>Configuración cognitiva 2</u> (CC2). C*omprobación exhaustiva no ostensiva*. En esta configuración no se realizan marcas sobre el papel, sino que se intenta formar las figuras con las dos piezas mentalmente o bien recubrir mentalmente las figuras con dichas piezas.

- Lenguaje: "giro a la derecha", "giro a la izquierda", "moviendo mentalmente las piezas", "no hay ninguna forma de colocarla", "posiciones", mover.
- Conceptos: giro, movimientos, figura, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) los giros y traslaciones son movimientos rígidos que no cambian el sentido de una figura; c) la unión de polígonos se hace a través de lados de igual medida.
- Procedimiento: mover mentalmente las piezas para formar las figuras. Observar que en la figura $F \in \{A, B, C, D, E\}$ no existe ningún movimiento sobre una de las piezas P_i que permita colocarla de manera que se pueda construir dicha figura. Por tanto, la figura F será la solución.
- Argumento: para formar la figura A, se gira 180º la pieza P_1 y la pieza P_2 se traslada y se unen las dos piezas por sus lados d_1 y d_2. La figura B se forma

girando 90º la pieza P_1 y la 270º la pieza P_2. Después se unen por los lados e_i, d_i y f_i respectivamente. Si se gira 90º la pieza P_1 y 270º la pieza P_1 y se unen por los lados f_i correspondientes se obtiene la figura C. La figura E se obtiene uniendo por los lados b_i la pieza P_1 girada 270º y la P_2 girada 90º. Para obtener la figura D habría que girar 270º P_1 y levantar de la mesa la pieza P_2 ya que no hay ningún giro ni traslación que me permita llegar a la situación necesaria para formar dicha figura. Habría que levantar de la mesa y volcar una de las piezas.

Ejemplo de respuesta 5.45. Configuración cognitiva CC2 del ítem 6



Transcripción:

Moviendo mentalmente las piezas hasta formar las otras figuras.

Configuración 3 (CC3). *Comprobación exhaustiva ostensiva sin movimientos.* Identificación de las dos piezas en cada una de las figuras. Comprobación exhaustiva, marcando las dos piezas, en cada una de las figuras. No se realizan movimientos (giros) sobre las piezas.

- Lenguaje: “dividir las figuras en dos partes”, “buscar las piezas en cada figura”.
- Conceptos: unidad de medida de superficie, figura.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) la unión de polígonos se hace a través de lados de igual medida.
- Procedimiento: marcar sobre el papel las dos piezas en cada una de las figuras. Observar que todas ellas pueden formarse con las dos piezas, por lo tanto no existe ninguna figura que no se pueda formar con las piezas dadas.
- Argumento: como se supone que las figuras están formadas por las piezas P_1 y P_2, se intenta encontrar la posición de estas en cada una de las figuras. Es decir, se dividen las figuras por medio de un segmento (o poligonal) de tal manera que se pueda ver que están formadas por dichas piezas. La figura A, queda dividida en las dos piezas por el segmento que une el vértice v_5 con v_{10}. La figura B, queda dividida en las dos partes a través de la línea poligonal (formada por tres

segmentos) que se define de la siguiente manera: primero consideramos $\overline{v_3v_6}_3$ el segmento que une v_3 y v_6. Ese segmento se divide en tres partes de igual medida (m). La recta que pasa por los vértices v_4 y v_2 corta perpendicularmente al segmento $\overline{v_3v_6}$ en un punto k_1, de modo que se tendrá el segmento $\overline{v_4k_1}$. Por otra parte la recta que pasa por los vértices v_5 y v_1 corta perpendicularmente al segmento $\overline{v_3v_6}$ en un punto k_2, de modo que se tendrá un nuevo segmento, el segmento $\overline{v_1k_2}$. El tercer segmento de la poligonal es el de extremos k_1 y k_2 $(\overline{k_1k_2})$.

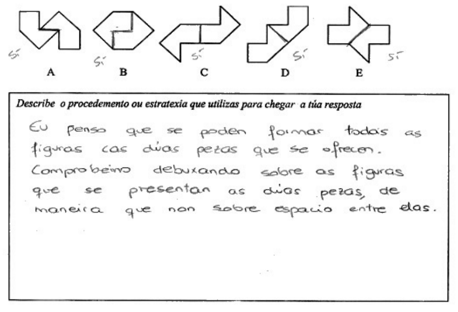
Para la partición de la figura C en las dos piezas se consideran los puntos medios k_1 y k_2 de los segmentos $\overline{v_4v_5}$ y $\overline{v_1v_8}$. El segmento $(\overline{k_1k_2})$ divide a la figura en las dos piezas dadas.

La partición de la figura D se hace a través del segmento que une el vértice v_6 con el punto medio k_1 del segmento formado por los vértices v_1 y v_2.

La figura E se descompone en las dos piezas P_1 y P_1 por medio del segmento de vértices v_5 y v_{10}.

Como todas las figuras se pueden partir en dos formas iguales a las piezas dadas el resultado es que se pueden construir todas las figuras.

Ejemplo de respuesta 5.46. Configuración cognitiva CC3 del ítem 6

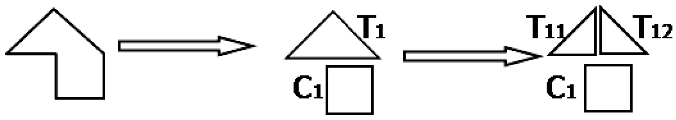


Transcripción:

Yo pienso que se pueden formar todas las figuras con las dos piezas que se ofrecen. Comprobamos dibujando sobre las figuras que se presentan las dos piezas de manera que no sobre espacio entre dos.

<u>Configuración cognitiva 4 (CC4)</u>. *Descomposición de las piezas*. Se descomponen las piezas en unidades más pequeñas que permitan una mejor visualización de las piezas en las figuras. Después se aplican los movimientos necesarios a las piezas para formar las diferentes figuras. Se encuentran dos descomposiciones (Figura 5.24): en la primera cada pieza se descompone en un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles, en la segunda, cada pieza se descompone en dos triángulos rectángulos isósceles iguales y un cuadrado, siendo el área de cada uno de los triángulos la mitad del área del cuadrado.

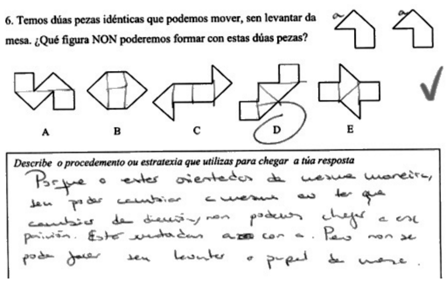
Figura 5.24. Descomposición de las teselas



- Lenguaje: "descomponer las piezas", "formar", "cambio de sentido". Icónico: representar las diferentes subfiguras que forman las piezas dadas.
- Conceptos: cuadrado, triángulo, giro, unidad de medida de superficie.
- Propiedades: a) la unidad de área es más pequeña que las piezas dadas en la tarea (realmente se tienen dos diferentes: el cuadrado y el/los triángulos); b) aditividad de la medida; c) los giros y las traslaciones son movimientos rígidos que no cambian la orientación de las figuras.
- Procedimiento: Descomponer cada una de las piezas (teselas) en un cuadrado y k triángulos. Descomponer las figuras en las $2 \times (1 + k)$ formas. Reagrupar las formas para visualizar las piezas P_1y P_2 dentro de cada figura. Comprobar visualmente que figuras se pueden formar aplicando giros y/ó traslaciones a las piezas P_1 y P_2.
- Argumento: Como cada una de las piezas se pueden descomponer en un cuadrado y un k triángulos ($k = 1,2$) se buscan esas piezas en las figuras que se presentan en la tarea. Así, cada una de las figuras se puede descomponer en dos cuadrados y $2 \times k$ triángulos de manera que lo que hay que hacer es buscar las divisiones que permitan ver las $2 \times k + 2$ piezas en cada figura.
- Si $k = 1$, las figuras se descomponen como se indica a continuación permitiendo ver las $2 \times k + 2$ piezas en cada una de las figuras. Todas las figuras se descomponen trazando tres segmentos. En la figura A se marca el segmento que une los vértices (que pasa por los vértices). En la figura B los segmentos que unen los vértices, el segmento que une los vértices v_5 y v_1 y, por último el que une los puntos k_1 y k_2 la dividen en los elementos buscados. En la figura C, las divisiones vienen marcadas por los segmentos $\overline{v_5\, v_8}$, $\overline{v_1\, v_4}$ y $\overline{k_1\, k_4}$. La figura D se divide en las $2 \times k + 2$ piezas a través de los segmentos $\overline{v_1\, v_7}$, $\overline{v_5\, v_2}$ y $\overline{k_1\, v_6}$. Por último, en la figura E, para obtener las piezas buscadas, se marcan los segmentos $\overline{v_{10}\, v_7}$, $\overline{v_5\, v_2}$ y $\overline{v_5\, v_{10}}$.

- Si $k = 2$ hay que añadir dos segmentos más en cada una de las figuras que corresponden a las alturas de los triángulos desde el ángulo recto formado por las líneas que contienen a los segmentos c_i y b_i , $i = 1, 2$.
- Finalmente, al tener descompuestas las figuras en todas esas formas, en cada figura se recomponen las nuevas piezas para visualizar en qué situación se encuentran las piezas P_1 y P_2 dentro de cada una de ellas y así ver qué tipo de movimientos aplicados a P_1 y P_2 llevan a formar dichas figuras. Si existe una figura $F \in \{A, B, C, D, E\}$, que para formarse necesita un movimiento de alguna de las piezas P_i que no sea ni un giro ni una traslación (o combinación de ambos), resultará ser la figura solución a la tarea.

Ejemplo de respuesta 5.47. Configuración cognitiva CC4 del ítem 6



Transcripción:

Porque al estar orientados de la misma manera, sin poder cambiar han de cambiar de dirección, no podemos llegar a esa dirección. Está orientado *a* con *a*. Pero no se puede formar sin levantar el papel de la mesa.

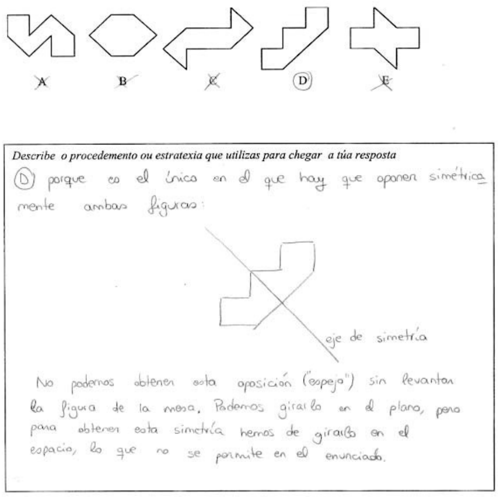
<u>Configuración cognitiva 5</u> (CC5). *Identificación de la simetría axial*. Basada en la propiedad de cambio de orientación de las simetrías. Cambiar la orientación del pico de una de las teselas respecto de la otra. En algún caso se expresa esta característica diciendo que no es posible formar la figura con esas dos piezas al considerar la simétrica como una pieza diferente a las dadas.

Dentro de las respuestas que se corresponden con esta configuración, encontramos algunas que trazan explícitamente el eje de simetría, mientras que otras trabajan exclusivamente con una imagen mental del mismo.

- Lenguaje: “las piezas están en espejo”, “una pieza inversa”, “imagen especular”, “sentido inverso”, “los picos no puede estar de frente”, “mismo sentido”, “sentidos opuestos”, “no coincide el sentido de las piezas”. Icónico: representación gráfica del eje de simetría de las figuras.
- Conceptos: simetría, figura simétrica, sentidos opuestos, piezas idénticas, unidad de medida de superficie.

- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) simetría axial como mediatriz; c) las simetrías cambian la orientación de las figuras; d) las traslaciones y los giros son movimientos rígidos que no cambian la orientación de las figuras.
- Procedimiento: intentar visualizar las dos piezas en cada una de las figuras (mentalmente o trazando el segmento que las separa). Observar que la figura D tiene una de las piezas en un sentido y la otra en sentido contrario mientras que en las demás figuras las dos piezas están en el mismo sentido. Como conclusión la figura D no se puede formar con las dos piezas dadas.
- Argumento: al visualizar (mentalmente o bien marcando ostensivamente los segmentos que dividen la figura en las dos piezas, tal y como se indicó en la argumentación de la configuración CC1) las dos figuras en cada una de las piezas se observa que en la figura D es una figura simétrica en la que su eje de simetría (la línea que contienen al segmento $\overline{v_6k_1}$) divide a la figura en dos partes iguales pero con distinta orientación. Por lo tanto, dicha figura está formada por una de las piezas dadas (por ejemplo, P_1) y por la pieza simétrica de P_2, lo que conduce a que sea la única figura de las dadas que no se puede formar con esas piezas, puesto que ningún giro ni traslación en el plano cambia la orientación de las piezas.

Ejemplo de respuesta 5.48. Configuración cognitiva CC5 del ítem 6



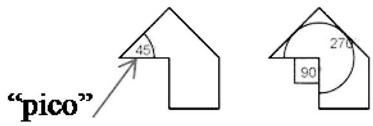
Transcripción:

D, porque es el único que hay que opone simétricamente ambas figuras.

No podemos obtener esta opción (espejo) sin levantar la figura de la mesa. Podemos girarla en el plano, pero para obtener esta simetríahemos de girarlo en el espacio, lo que no se permite en el enunciado.

<u>Configuración cognitiva 6</u> (CC6). *Estrategia de discriminación angular*. Discriminar la respuesta elegida por no tener ángulos rectos en su trazado.

Figura 5.25. Representación del "pico" (ángulo interior de 45º) y ángulo recto



Sea α el ángulo interior de 45º de las piezas P_1 y P_2.

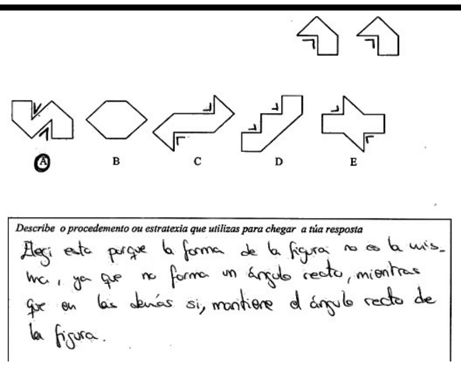
Sea β el ángulo "exterior" de $90º$ de las piezas P_1 y P_2. β = $360º\ -\gamma$, donde γ es el ángulo interior de las piezas de 270º.

Sea $N_\alpha(F)$ el número de ángulos α que tiene la figura *F*.

Sea $N_\beta(F)$ el número de ángulos β que tiene la figura *F*.

- Lenguaje: "mantener el ángulo α de cada una de las piezas", "mantener el ángulo β de cada una de las piezas". Notación: marcar gráficamente los ángulos de 90º o los de 45º.
- Conceptos: Ángulo recto, figura, pico, ángulos exteriores, ángulos interiores.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) al componer varias piezas, la figura formada ha de mantener las mismas condiciones métricas (medida de ángulos) que tenían las piezas que la forman.
- Procedimiento: Identificar visualmente el ángulo α (o β) de cada una de las piezas en cada una de las figuras dadas. De este modo cada una de las figuras ha de tener dos ángulos α (o β). Si hay alguna que no los tenga, esa será la solución.
- Argumento: Como las dos piezas P_1 y P_2 tienen un ángulo α (o β) y las figuras se forman con esas piezas, las figuras han de mantener las características de esas piezas. Así si las piezas tienen cada una un ángulo α (o β), las figuras han de tener dos ángulos α (o β). Si existe una figura $F \in \{A, B, C, D, E\}$ tal que $N_\alpha(F) \neq 2$ ($N_\beta(F) \neq 2$), entonces la solución a la tarea es *F*.

Ejemplo de respuesta 5.49. Configuración cognitiva CC6 del ítem 6



Transcripción:

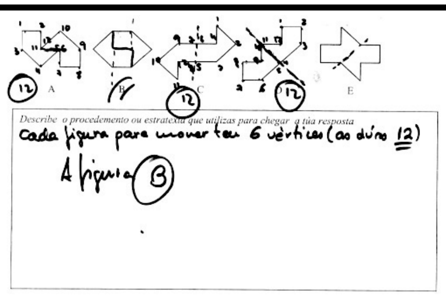
Elegí esta porque la forma de la figura no es la misma, ya que no forma un ángulo recto, mientras que en las demás sí, se mantiene el ángulo recto de la figura.

<u>Configuración cognitiva 7</u> (CC7). *Discriminación numérica*. Está basada en el mantenimiento del número de lados o vértices de las piezas cuando se unen para formar una nueva figura.

Se tendrá en cuenta la siguiente notación:
Sea $N_v(F)$ el número de vértices de la figura *F*.
Sea $N_l(F)$ el número de vértices de la figura *F*.

- Lenguaje: "mismo número de lados", "mismo número de vértices", "la misma forma".
- Conceptos: lados, vértices, perímetro, forma, unidad de medida de área.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) si $F = P_1 \cup P_2$, entonces $N_v(F) = N_v(P_1) + N_v(P_2)$, $(N_l(F) = N_l(P_1) + N_l(P_2))$; c) dos figuras que tienen igual área, tendrán igual perímetro.
- Procedimiento: contar el número de vértices (lados) de una de las piezas, como las dos piezas son idénticas tendrán el mismo número de vértices (lados) $N_v(P_1) = N_v(P_2)$. Contar el número de vértices (lados) de cada figura. Comparar el número de vértices (lados) de cada figura *F* con la suma de el número de vértices (lados) de P_1 y P_2. Si para alguna figura *F* no coincide, esa será la figura solución de la tarea.
- Argumento: como cada pieza tiene $N_v(P_1)$ vértices ($N_l(P_1)$ lados) las figuras que se formen con esas dos piezas deben tener $N_v(P_1)$ vértices ($N_l(P_1)$ lados). Se cuenta el número de vértices (lados) de cada una de las cinco figuras, si existe una figura $F \in \{A, B, C, D, E\}$ tal que $N_v(F) \neq 2 \times N_v(P_1)$ (ó $N_l(F) \neq 2 \times N_l(P_1)$, entonces la solución a la tarea es la figura *F*.

Ejemplo de respuesta 5.50. Configuración cognitiva CC7 del ítem 6



Transcripción:

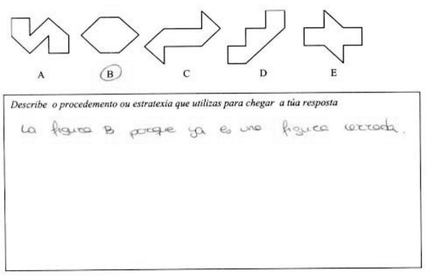
Cada figura para mover tiene 6 vértices (las dos 12)

La figura B.

<u>Configuración cognitiva 8</u> (CC8). *Discriminación visual*. Reconocer implícita o explícitamente la propiedad cóncavo/convexo. Afirmar que la figura B es visualmente diferente a las demás (por ejemplo diciendo que la B es un polígono y las demás no, o bien que la figura B es cerrada y los demás no). La convexidad de la figura B dificulta el reconocimiento de las piezas P_1 y P_2.

- Lenguaje:"La figura B es cerrada", "B es un polígono".
- Conceptos: cóncava, convexa, polígono, unidad de medida.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) dos figuras cóncavas no pueden formar una figura convexa; d) un polígono ha de ser convexo; e) una figura cerrada no tiene ángulos cóncavos.
- Procedimiento: observar las características visuales de las figuras teniendo en cuenta la forma de las piezas con las que se han de formar. La figura B rompe el esquema visual que proporcionan las demás figuras, lo que conduce a que esta sea la figura que no se pueda formar con las dos piezas proporcionadas en el enunciado.
- Argumento: como las piezas que se dan en la tarea tienen una forma determinada (cóncavas) cuando se unan para formar figuras, esas figuras han de mantener un efecto visual, por lo menos en alguna parte, parecido esas formas de las que provienen. Al observar todas las figuras se perciben características visuales de las piezas P_1 y P_2, salvo en la figura B. Por tanto, la figura B es la que no se puede formar con esas dos piezas porque al juntar esas piezas nunca se obtendría una figura de ese tipo.

Ejemplo de respuesta 5.51. Configuración cognitiva CC8 del ítem 6



Transcripción:

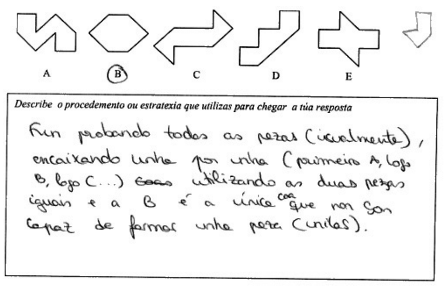
La figura B porque ya es una figura cerrada

<u>Configuración cognitiva 9</u> (CC9). *No identificar las piezas en alguna de las figuras.* Se identifica la posición de las piezas en cada una de las figuras, llegando a la conclusión de que en una de ellas resulta imposible esta división, por lo que se elige esa figura

como solución a la tarea. Esta configuración está asociada a dificultades para visualizar las dos piezas en cada una de las figuras.

- Lenguaje: “no encajan”, “no se unen”, “no se da formado”, “no podría hacerse”.
- Conceptos: figura, unidad de medida.
- Propiedades: a) aditividad de la medida; b) las piezas se unen a través de lados de igual medida.
- Procedimiento: tratar de encontrar las dos piezas en las dos figuras (mentalmente o a través de marcas sobre cada una de las figuras). Si en alguna figura de las dadas en el enunciado de la tarea no se encuentran las dos piezas, esa será la figura que no se podrá formar.
- Argumento: Se intenta visualizar las dos piezas en cada una de las figuras. Para ello se recubren mentalmente las figuras con las piezas o bien se marca el segmento que divide a cada figura en las piezas P_1 y P_2 (tal y como se describe en la argumentación de la configuración CC1). Si para alguna figura $F \in \{A, B, C, D, E\}$, no se encuentra un segmento (o poligonal) que divide a la figura en las dos piezas P_1 y P_2, o bien, no es posible formar (mentalmente) la figura con las piezas, se tendrá que la solución a la tarea es la figura F.

Ejemplo de respuesta 5.52. Configuración cognitiva CC9 del ítem 6



Transcripción:

Fui probando todas las piezas (visualmente), encajando una por una (primero la A, después B, luego C…) utilizando las dos piezas igaules y al B es al única con la que no soy capaz de formar una pieza (unirlas).

5.3.6.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones asociadas al ítem 6

El mayor número de respuestas corresponde a la configuración cognitiva CC9, seguida de la CC2 y de la CC1 (Tabla 5.34). La diferencia de frecuencia entre estas dos últimas configuraciones reside posiblemente en el hecho de que la configuración CC1 necesita el apoyo de elementos ostensivos (marcas de la división de las figuras en las dos piezas) que facilitan la resolución de la tarea. Se puede destacar el bajo porcentaje de estudiantes (3%) que identifican la simetría de la figura D y la recogen verbalmente en su argumentación, situación que se corresponde con la configuración CC5.

Tabla 5.34. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 6

Tipo de configuración	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Comprobación exhaustiva ostensiva con movimientos.	70	17,50
CC2	Comprobación exhaustiva no ostensiva con movimientos.	81	20,25
CC3	Comprobación exhaustiva ostensiva sin analizar movimientos.	30	7,50
CC4	Descomposición de las piezas en unidades más pequeñas.	14	3,50
CC5	Identificación de la simetría.	12	3,00
CC6	Discriminación angular.	8	2,00
CC7	Discriminación numérica.	10	2,50
CC8	Discriminación visual.	8	2,00
CC9	No identificar las piezas en alguna de las figuras.	84	21,00
NC	No argumenta la opción elegida o deja la respuesta en blanco.	74	18,50
NE	No entiende.	9	2,25
TOTAL		400	100

El uso de elementos ostensivos (marcar el segmento que separa las dos piezas de la figuras) es un elemento clave en la configuración CC1 pero además, también lo es en las configuraciones CC3, CC4 y en un número considerable de respuestas asociadas a la configuración CC9. En el caso de la configuración CC5, el 75% de los estudiantes que siguen esta configuración también separan las dos piezas ostensivamente. Como resultado, se tiene que un 51,75 % de los estudiantes de la muestra necesita apoyarse en este tipo de elementos.

El reconocimiento de la "simetría" como movimiento rígido sólo se aprecia explícitamente en la configuración CC5, aunque está asociado a la propiedad de cambio de orientación y a un tipo de movimiento que requiere salirse del plano. Se describe en esta configuración la figura D como figura simétrica mientras que en las demás configuraciones, en particular en las configuraciones CC1 y CC2 no se hace referencia a esa característica de la figura D.

Las configuraciones CC8 y CC6 hacen referencia a características visuales (distractores) que se convierten en determinantes para la resolución de la tarea. Dos de esas características visuales provienen de las piezas: el ángulo de 45º (llamado por los estudiantes "pico") y el ángulo "exterior" de 90º. La otra característica visual es la que proporciona la convexidad de la figura B. Estas configuraciones, junto con la configuración CC7, no tratan de encontrar las piezas (ostensivamente o mentalmente) en las figuras sino que dan argumentaciones basadas en consideraciones visuales o numéricas, lo que conduce hacia una interpretación de que las características de las figuras que los estudiantes consideran relevantes (nº de ángulos, lados o vértices, concavidad, convexidad), han de mantenerse al recomponerlas para formar una nueva figura.

En las configuraciones CC1, CC2 y CC5 se tienen en cuenta las consideraciones sobre la comparación de formas por transformaciones o descomposiciones que hace Battista (2007, p. 903):

> Los alumnos comparan las formas descomponiéndolas, luego las deslizan, giran o voltean las partes de la forma de modo que les permita deducir, basándose en las propiedades de la forma o transformación, si una forma transformada es congruente con otra. Los alumnos no mencionan necesariamente, de manera explícita, las propiedades geométricas (congruencia de formas, segmentos, ángulos) o transformaciones (deslizamiento, volteo o giro), pero su razonamiento es coherente con dichas propiedades y transformaciones.

5.3.6.4. Análisis de errores

En la Tabla 5.35 se describen brevemente los tipos de errores encontrados en este ítem. Destaca el hecho de que ningún estudiante afirma verbalmente no comprender la tarea propuesta. Comparando la Tabla 5.33 con la Tabla 5.35 se observa que el porcentaje de estudiantes que no cometen ningún error (37,75) es casi un 10% más bajo que el porcentaje asociado a la respuesta correcta (48%). Cabe destacar, por su alta frecuencia en comparación con los restantes errores, el 2P que es debido a la no visualización de las dos piezas en alguna de las figuras.

Tabla 5.35. Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores asociados al ítem 6

	Descripción	Frecuencias	Porcentaje
0	Sin errores.	151	37,75
EB	No contesta/ No argumenta.	40	10,00
EBC	Sin argumento con opción correcta.	19	4,75
1S	Afirmar verbalmente no comprender la tarea.	0	0,00
2S	Obviar el uso de movimientos planos para formar las figuras.	32	8,00
1C	Descartar la figura convexa por su disparidad con las cóncavas	16	4,00
2C	Asociar a un giro la propiedad de inversión de las simetrías.	21	5,25
3C	Debilidades métricas.	20	5,00
1P	Descomponer incorrectamente las figuras.	9	2,25
2P	Descartar la figura por no percibir las dos piezas.	84	21,00
3P	Fallar al recombinar las subpiezas.	8	2,00
Total		400	100,00

El error 2S resulta como consecuencia de obviar la condición del enunciado que implica el uso de transformaciones "sin levantar las piezas de la mesa" para formar las figuras. Sólo se considera que las figuras se deben construir con esas dos piezas y no el movimiento que permite formarlas. Este planteamiento lleva a considerar que todas las opciones de respuesta son erróneas (pues podrían formar todas las figuras con las piezas dadas).

El error 1C, descartar la figura convexa por su diferencia con las teselas cóncavas, está derivado de la fuerza que tiene la percepción visual. En la figura B no se perciben los "picos" o los vértices que se perciben en las piezas que han de formarla. Además, en todas las figuras excepto en la figura B se unen las teselas sólo por un lado y en el caso de la figura B por tres, lo cual implica pérdida de lados y vértices que modifica sustancialmente las características morfológicas de esa figura con respecto a las demás.

El error 3C hace referencia a "debilidades" métricas. Supone que los estudiantes no comprendan que al unir las dos figuras se puedan perder lados, vértices y modificar la amplitud de los ángulos variando la apariencia pero no el área (idea implícita de que a igual área igual perímetro). A diferencia del error 1C, muchos estudiantes que cometen este error no descartan la figura B, lo que conduce a pensar que para ellos la convexidad de dicha figura no es un factor determinante para resolver la tarea.

Los errores procedimentales que aparecen en este ítem están relacionados con la descomposición de las figuras. En el caso del error 1P, la descomposición de las figuras se hace en dos piezas que no son congruentes con las teselas. El error 2P implica, en la mayoría de los casos, que la reflexión sobre qué tipo de movimiento lleva a construir la figura es secundaria (Tabla 5.36). No identificar las dos piezas en la figura pone de manifiesto que la habilidad de *identificación visual* sólo está parcialmente desarrollada. En la tabla siguiente se muestra la frecuencia de cada una de las respuestas dentro de este tipo de error asociado a la configuración CC9 (la más frecuente).

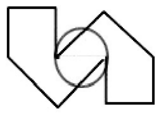
Tabla 5.36. Frecuencia y porcentaje del error 2P

	Frecuencia	Porcentaje
Figura A	23	27,38
Figura B	41	48,81
Figura D	11	13,10
Figura E	8	9,52
B y D	1	1,19
Total	84	100

Con respecto a la frecuencia de las diferentes figuras en el error 2P, el alto porcentaje asociado a la figura B (48,81%) se debe a su característica de figura convexa, derivada del hecho de unir tres lados homólogos de las piezas en vez de uno, lo que dificulta la visualización de la partición en P_1 y P_2.

Se observa que la figura A (Figura 5.26) también tiene una frecuencia importante. Un análisis de este hecho permite diferenciar dos opciones. La primera tiene que ver con el hecho de que para estos alumnos "la figura A no es simétrica", en contraposición a la idea errónea de que las otras sí lo son. En realidad, todas las figuras proporcionadas en el enunciado de la tarea tienen simetría (rotacional o axial), sin embargo, resulta comprensible que la situación del centro de la simetría rotacional sea más difícil de percibir en esta figura. La segunda opción se refiere a que la visualización de esta figura produce “cierta distorsión” de manera que se produce un “estrechamiento” en la unión de las piezas, como si de una ilusión óptica se tratase, provocando la percepción de dos piezas no iguales a las dadas (ver ilustración). Esta situación pone de manifiesto que la habilidad de conservación de la percepción no está desarrollada completamente.

Figura 5.26. Efecto visual del estrechamiento de la figura A



A

Las configuraciones CC3, CC6, CC7, CC8 y CC9 que suponen el 35% de la muestra, están asociadas al error 2S. En dichas configuraciones no se tiene en cuenta la parte del enunciado que hace referencia a “mover, sin levantar de la mesa”, es decir, no analizan los movimientos que se realizan sobre las piezas para formar las figuras. En todas ellas la atención se centra en si se pueden formar o no las figuras con las piezas que nos dan como único objetivo de la tarea.

El error 3C está asociado a las configuraciones CC6 y CC7 mientras que el error 1C a la configuración CC8.

El porcentaje del error 2C pone de manifiesto que, tal y como recogen Gutiérrez y Jaime (1996), muchos alumnos asocian las propiedades de la simetría a los giros y viceversa.

En la Tabla 5.37 se muestra la efectividad de aquellas configuraciones susceptibles de ser correctas. Destaca la configuración CC5 por su 100% de efectividad. Es destacable el hecho de que la configuración CC2 es más efectiva que la CC1, cuando la primera analiza mentalmente la construcción de las figuras con las piezas sin un apoyo ostensivo.

Tabla 5.37. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 6

Configuraciones	Frecuencia	Porcentaje
CC1	52	74,29
CC2	70	86,42
CC4	4	28,57
CC5	12	100,00

Cuando se habla de la efectividad parece que las configuraciones CC1 y CC4 deberían proporcionar resultados similares, circunstancia que no se observa en la muestra estudiada. La explicación se encuentra en la acción de recomponer que hay que realizar si se sigue la configuración CC4. Los resultados muestran que el 57,14% de las respuestas que corresponden a dicha configuración cometen errores al recomponer con las nuevas piezas (1 cuadrado y uno/dos triángulos) las dadas en el enunciado. Por otro lado, tanto el cuadrado como el triángulo isósceles rectángulo son figuras simétricas mientras que la pieza dada no lo es y esa característica no se ha tenido en cuenta a la hora de realizar los movimientos (giros, traslaciones ó simetrías) para formar las figuras con las nuevas subdivisiones (14,29 % de dicha configuración).

Brown y Wheatly (1997, p. 54) apuntaron la distinción entre tareas de descomposición/recombinación y tareas de transformaciones (movimientos en el plano). En su trabajo se sostiene que descomponer/recombinar y transformar son componentes de la visualización independientes y que no todos los estudiantes lo hacen con la misma facilidad. En la tarea que aquí se presenta se requieren las dos componentes y se observa que un 49,75% de la muestra es capaz de descomponer todas las figuras en las dos piezas dadas, las configuraciones CC1, CC2, CC3, CC4 (de esta sólo 4 hicieron bien la descomposición) CC5 y CC7 (de estas sólo 2 hicieron la descomposición, los demás no indican nada). Sin embargo, fallan en la parte de analizar el movimiento requerido (37,75% de resultados correctos). En la tabla 5.35, la efectividad de las configuraciones que sí tuvieron en cuenta los movimientos de las piezas nos muestra que, salvo en la CC5, en las demás no se obtuvo el 100% de efectividad. El porcentaje de aquellos que no son capaces de realizar la descomposición de todas las figuras (configuración CC9 y error 2P) es del 21%, bastante elevado para este nivel educativo. De las configuraciones CC6, la configuración CC8 y el 80% de la configuración CC7 no se puede concluir nada ya que no indican gráficamente ni verbalmente que hayan hecho la descomposición. Todo esto corrobora la distinción hecha por Brown y Wheatly (1997). Por otro lado, siguiendo a Orton (1997, p. 311), debemos tener en cuenta que no es fácil extraer de las respuestas de los estudiantes el tipo de transformaciones mentales que tienen lugar.

5.3.7. ÍTEM 7: GENERACIÓN DE CUERPOS MEDIANTE ROTACIONES EN EL ESPACIO

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras respecto de los ejes que se indican.

En la Tabla 5.38 se describen los códigos utilizados para recoger las respuestas de los estudiantes.

Tabla 5.38. Códigos para las respuestas al ítem 7

CC	A correcta B correcta
CI	A correcta B incompleta
CIn	A correcta B incorrecta
IC	A incompleta B correcta
II	A incompleta B incompleta
IIn	A incompleta B incorrecta
InC	A incorrecta B correcta
InI	A incorrecta B incompleta
InIn	A incorrecta B incorrecta
BIn	A sin contestar y B incompleta

Se considerará que una respuesta está "incompleta" cuando falten algunos elementos en su descripción o en su representación, por ejemplo, cuando no se indican los agujeros que se forman, pero su estructura exterior general sea correcta. Se dirá que es incorrecta cuando el resultado es un cuerpo de revolución que no coincide con el correcto o bien cuando se ha llevado a cabo una acción distinta de la solicitada que produce una figura en una dimensión menor.

5.3.7.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 7

En la Tabla 5.39 se muestra el porcentaje de respuestas asociadas a cada una de las opciones anteriores. Existe un porcentaje relativamente bajo de estudiantes que dejan sin responder este ítem, lo que nos podría inducir a pensar que resultó sencillo para la mayoría; sin embargo, el porcentaje del código CC, que recoge a todos los que dieron una respuesta correcta, es uno de los más bajos (4%). El mayor porcentaje (63,25%) se concentra en las respuestas en las que tanto la Figura A) como la figura B) son incorrectas (InIn), mientras que el siguiente se da en respuestas donde la figura A) es incorrecta y la figura B) está incompleta. No ha habido respuestas que cubrieran los códigos CIn, IC y IIn.

Tabla 5.39. Frecuencia y porcentaje de respuestas en el ítem 7

	Frecuencia	Porcentaje
CC	**16**	**4,00**
CI	14	3,50
CIn	0	0,00
IC	0	0,00
II	23	5,75
IIn	0	0,00
InC	1	0,25
InI	68	17,00
InIn	253	63,25
BIn	2	0,50
Ns/Nc	23	5,75
Total	400	100,00

5.3.7.2. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 7

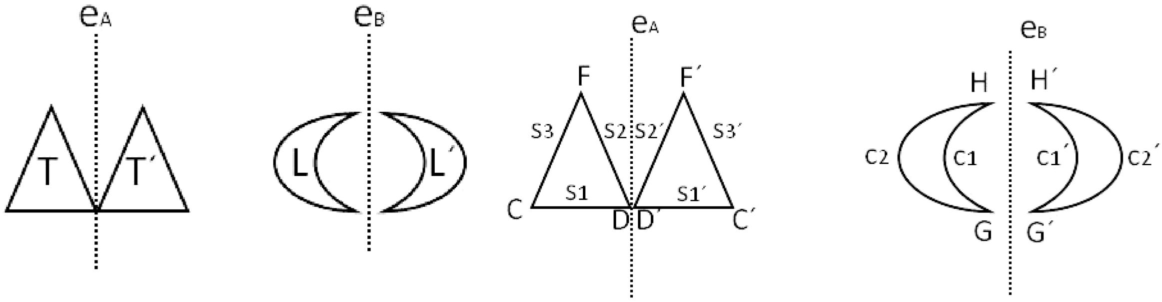
A continuación se describirán las nueve configuraciones asociadas a este ítem.

<u>Configuración cognitiva 1</u> (CC1). *Interpretación del eje de rotación como eje de simetría*. Justificación gráfica basada en las simetrías que produce la concepción del eje de rotación como eje de simetría axial y contemplada, en algunos casos, como "dar la vuelta", es decir, un giro de 180º alrededor del eje en el que sólo se contemplan los

estados inicial y final. Se distinguen, dentro de esta configuración, dos procedimientos diferentes.

Se seguirá la notación indicada en la Figura 5.27

Figura 5.27. Notación para la descripción de la configuración CC1

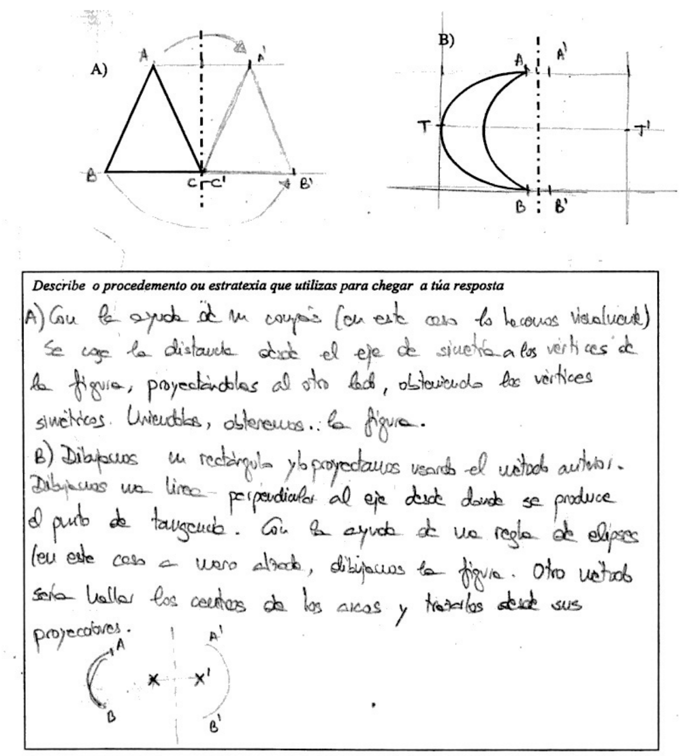


Lenguaje: “dibujé la figura como si la línea fuera un espejo porque después el papel ha de ir doblado por ahí y las figuras tienen que coincidir”, “al pasar al otro lado”, “hacer una simetría”, “figura simétrica respecto al eje de simetría”, “la figura al doblar se superpone”, “los cuerpos son los inversos”, “como un eje de simetría, ves las mismas partes cercanas al eje”, “doblo el papel a modo de espejo”, “la línea como espejo”, “haciendo efecto espejo, trasladando algunas medidas y puntos en sentido contrario”, “copia del original en dirección contraria”, “poner la figura al otro lado del eje”, “dar la vuelta a la figura”, “trasladar los puntos más alejados del eje a los puntos más alejados del otro lado del eje”, “hacer girar las figuras por el eje”, “si el triángulo lo apoyo sobre el vértice inferior derecho y lo hago girar sobre la línea creo que quedaría así”, “al hacerlos girar sobre el eje, el triángulo permanece igual pero en la luna aparece el opuesto (de forma opuesta)”, “giré las figuras”, “girarlas mentalmente”, “girarlas respecto a la línea”, “lo hago girar cara a la derecha”, “el giro hace efecto espejo”, “voltear la figura”. Icónico: representación gráfica de las figuras al otro lado del eje.

- Conceptos: triángulo, eje de simetría, figuras simétricas, idea se simetría asociada al doblado del papel, superponer, espejo, grados, girar, centro de giro, eje de giro.
- Propiedades: a) la simetría es una transformación geométrica que conserva las propiedades métricas de las figuras; b) la simetría es una transformación geométrica que cambia la orientación de las figuras; c) una simetría axial plana coincide con un giro de 180º en el espacio alrededor de un eje.

- Procedimiento 1: marcar los vértices del triángulo al otro lado del eje a igual distancia del eje y perpendicularmente al mismo. Unir, mediante segmentos, los nuevos vértices obtenidos para formar un nuevo triángulo que será la solución para la figura A). En el caso de la figura B se hace el mismo procedimiento para diversos puntos de L (los vértices de la luna y para el punto medio de las curvas c_1 y c_2). Esos nuevos puntos se unen mediante curvas para llegar a la nueva figura solución de este apartado.
- Argumento1: como los ejes e_A y e_B son ejes de simetría axial, se construirán las figuras simétricas de T y de L con respecto a dichos ejes. Eso significa que ha de mantenerse la distancia de los puntos de la figura al eje de simetría y la perpendicularidad respecto del eje de los segmentos que unen los puntos correspondientes de la figura inicial y de su simétrica. Las figuras que resultan, T' y L' están situadas al otro lado de los respectivos ejes (e_A y e_B) y son congruentes con las iniciales, de manera que al doblar por dichos ejes cada una de las figuras y su simétrica coinciden. De esta manera, la figura simétrica del triángulo T será T' y la de la luna L será L'.

Ejemplo de respuesta 5.53. Configuración cognitiva CC1 del ítem 7. Argumento 1



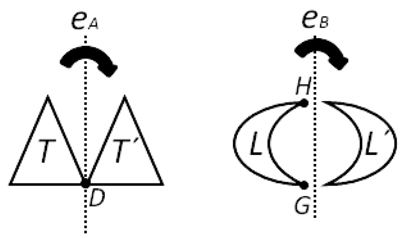
Transcripción:

A) Con la ayuda de un compás (en este caso lo hacemos visualmente) se coge la distancia desde el eje de simetría a los vértices de la figura, proyectándolas al otro lado, obteniendo los vértices simétricos. Uniéndolos obtendremos la figura.

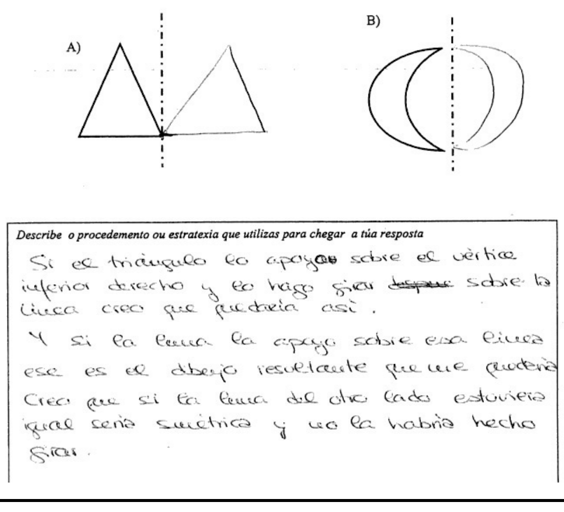
B) Dibujamos un rectángulo y lo proyectamos usando el método anterior. Dibujamos una línea perpendicular al eje desde donde se produce el punto de tangencia. Con la ayuda de una regla de elipses (en este caso a mano alzada) dibujamos la figura. Otro método sería hallar los centros de los arcos y trazarlos desde sus proyecciones.

- Procedimiento 2: girar en el espacio 180º cada una de las figuras T y F con respecto a los ejes dados. Las figuras resultantes serán las iniciales pero en sentido contrario, al otro lado de los ejes.
- Argumento 2: Figura A): Como el punto D está sobre el eje e_A con respecto al cual se realiza el giro, se va a mantener fijo al realizar el movimiento. Así, se gira el triángulo 180º sobre el plano que contiene al segmento s_1 y es perpendiular al eje e_a. De esta forma, al otro lado del eje de rotación aparece un triángulo T' idéntico al inicial. En el caso de la figura B), (L) se gira 180º tomando los dos puntos H y G como centros de giro (no puntos fijos) y como resultado se obtiene una luna similar a la anterior L' pero cambiada de sentido y al otro lado del eje e_B. El resultado coincide con el efecto que produciría un espejo al reflejar dichas figuras A) y B).

Figura 5.28. Procedimiento 2 de la CC1 del ítem 7



Ejemplo de respuesta 5.54. Configuración cognitiva CC1 del ítem 7. Argumento 2



Transcripción:

Si el triángulo lo apoyo sobre el vértice inferior derecho y lo hago girar sobre la línea creo que quedaría así.

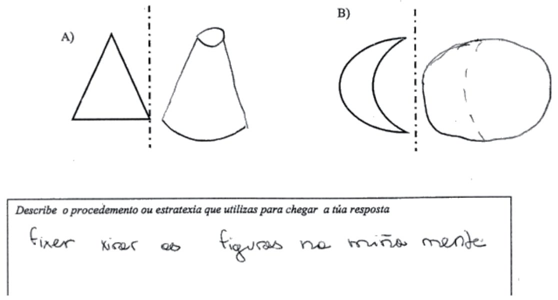
Y si la luna la apoyo sobre esa línea ese es el dibujo resultante que me quedaría. Creo que si la luna del otro lado estuviera igual sería simétrica y no la habría hecho girar.

<u>Configuración cognitiva 2</u> (CC2). *Representación gráfica de los cuerpos resultantes sin apoyo físico de los ejes dados*. En este caso se representan los cuerpos de revolución, pero sin utilizar el eje para construir un plano de simetría del cuerpo.

- Lenguaje: "al girar muy rápido es como si se completara", "busqué la forma que a la vista aparentan", "me imaginé en el eje y las vueltas y la figura que debería crear", "describiría un tronco de cono al no pasar el eje por la altura del triángulo, la figura B describiría una elipse al no formar la media luna una circunferencia perfecta", "al darle vueltas la figura da como resultado cuerpos tridimensionales", "utilizando la imaginación", "hice girar las figuras en mi mente", "imagino la figura girando sobre el eje", "figura ovalada", "se forma en la base un círculo de radio la arista del triángulo", "crear una imagen mental", "imaginar el movimiento de las figuras", "se llaman cuerpos de revolución", se verán en tres dimensiones", "cuando hacemos girar un cuerpo apreciamos el volumen", "parecida a una esfera pero con un hueco vertical en el medio", "imagino qué vería al darle vueltas sobre el mismo eje constantemente, como si fuera una peonza". Icónico: representación gráfica de los cuerpos, flechas y arcos pequeños para indicar el volumen.
- Conceptos: triángulo, arista, círculo, elipse, peonza, pelota, cuerpos de revolución, eje de rotación, girar, tronco de cono, esfera, altura de un triángulo, volumen, punto fijo.
- Propiedades: a) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales; b) cada punto de la figura plana describe una circunferencia alrededor del eje y sobre un plano perpendicular al mismo; c) los puntos sobre el eje de rotación permanecen fijos; d) al rotar una figura alrededor de un eje se mantiene la distancia de cada uno de los puntos a dicho eje.
- Procedimiento: Girar mentalmente las figuras planas dadas alrededor del eje. Plasmar en el papel la imagen de los cuerpos utilizando la representación en perspectiva.
- Argumento: Al girar una la figura T alrededor del eje de rotación e_A todos sus puntos describen circunferencias alrededor del eje de rotación menos el punto D que permanece fijo. Como todos los puntos del segmento s_1 (salvo el punto P) no tocan al eje se producirá un hueco en forma de cono invertido en la figura generada. Así la figura obtenida será un tronco de cono que en su interior tiene

un hueco en forma de cono invertido. En el caso de la figura B), el procedimiento será el mismo, salvo que en este caso no existe ningún punto fijo. Como la curva c_1 no toca al eje, la figura generada, de forma esférica (elipsoidal), tendrá un agujero en su interior que la traspasa de forma esférica también.

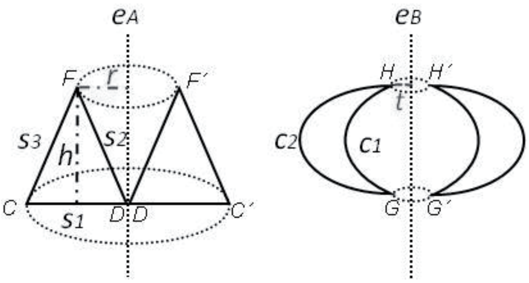
Ejemplo de respuesta 5.55. Configuración cognitiva CC2 del ítem 7



Transcripción:
Lo hice girar en mi mente.

Configuración cognitiva 3 (CC3). *Marcar circunferencias para conferir un efecto tridimensional*. Justificación apoyada en el uso de representaciones gráficas, dibujando las figuras simétricas a las dadas y las circunferencias de las partes superior e inferior para dar el efecto tridimensional (sensación de volumen).

Figura 5.29. Notación para la descripción de la configuración CC3 del ítem 7

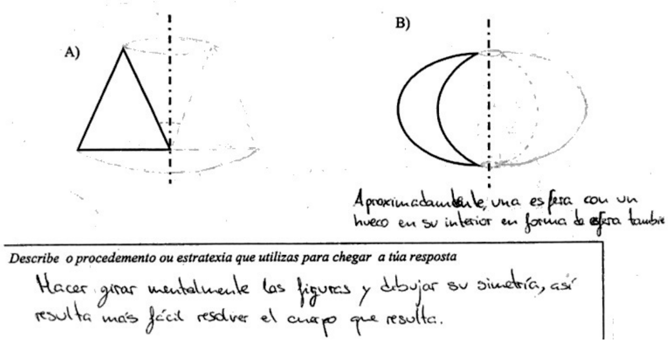


- Lenguaje: "jugué con las distancias que tienen las figuras sobre el eje", "hacer girar mentalmente", "dibujar su simetría", "si la figura está pegada al vértice no hay distancia entre los lados y si está separada habrá un hueco", "volcán con un agujero en forma cónica, óvalo con una esfera en su interior", "cono truncado", "esfera hueca", "dibujé la trayectoria de todos los vértices… la distancia es menor…los vértices no están en el eje", "los vértices describen un círculo", "el vértice no pasa por el eje", "cono cortado por la parte superior". Icónico: representación de los cuerpos tal y como se muestra en la Figura 5.29.

- Conceptos: representación de objetos tridimensionales en perspectiva, distancia al eje, figura simétrica, planos de simetría, triángulo, tronco de cono, esfera, circunferencia, elipse, punto fijo, trayectoria de un punto, volumen.
- Propiedades: a) una figura de revolución tiene infinitos planos de simetría; b) cada punto de la figura plana describe una circunferencia alrededor del eje y sobre un plano perpendicular al mismo; c) los puntos de la figura plana que están sobre el eje de rotación permanecen fijos; d) al rotar una figura alrededor de un eje se mantiene la distancia de cada uno de los puntos a dicho eje.
- Procedimiento: Dibujar las figuras simétricas a las dadas en los dos casos. En el caso de la figura A) marcar la circunferencia (elipse en perspectiva) que pasa por los puntos *F* y *F´* y la que pasa por los puntos C y C´ lo que proporciona una representación plana de un tronco de cono con un cono interior invertido. En el caso de la figura B se marcan las circunferencias (elipses en perspectiva) que pasan por los puntos homólogos *H* y *H´* y los puntos *G* y *G´*, respectivamente. Se obtiene así la representación plana de una figura aproximadamente esférica con un agujero con forma esférica también.
- Argumento: como el eje e_A es un eje de rotación lo que se va a obtener es un sólido de revolución que tiene infinitos planos de simetría. En el caso del triángulo *T* se dibuja el triángulo *T´* simétrico con respecto al eje e_A. A continuación se dibujan las elipses (representación en perspectiva de las circunferencias) que describen los puntos *C* y *F* en planos perpendiculares al eje e_a que pasan por dichos puntos y por sus simétricos *C´* y *F´*. De esta manera se obtiene una representación plana de un tronco de cono (radio de la base s_1) y de curva generatriz s_3. A ese tronco de cono se le quita un cono que aparece invertido (apoyado sobre su ápice que es el punto *D*) de generatriz s_2 y radio de la base *r* (la distancia del punto *F* al eje e_a). En el caso de la figura B) se dibuja la figura simétrica *L´* con respecto al eje e_b y se marcan las elipses (representación en perspectiva de las circunferencias de radio *t* (distancia del punto *H ó G* a e_b)) que describen los puntos *H* y *G* y que pasan por sus simétricos *H´* y *G´*. Incluso se podría dibujar la elipse (circunferencia) que describe alguno de los puntos (punto medio) de las curvas c_1 y c_2 para dar más sensación de volumen. Se forma un sólido pseudoesférico cuya curva generatriz es c_2, con un hueco que lo atraviesa debido a que ningún punto de la curva c_1

toca al eje e_B. El hueco interior es un sólido de revolución generado por la curva c_1.

Ejemplo de respuesta 5.56. Configuración cognitiva CC3 del ítem 7



Transcripción:

Hacer girar mentalmente las figuras y dibujar su simétrica, así resulta más fácil resolver el cuerpo que resulta. Aproximadamente una esfera con un hueco en su interior en forma de esfera también.

Configuración cognitiva 4 (CC4). *Rotaciones libres en el plano*. Justificación gráfica aplicando un giro en el plano a cada una de las figuras alrededor de uno de sus vértices o bien rotándolas simplemente sin fijar el centro de giro. En muchos casos el objetivo principal es pasarlos por completo al otro lado del eje. Se aplican a las figuras todos los giros, de igual o diferente amplitud, que se consideren necesarios para la resolución.

Notación para describir esta configuración:

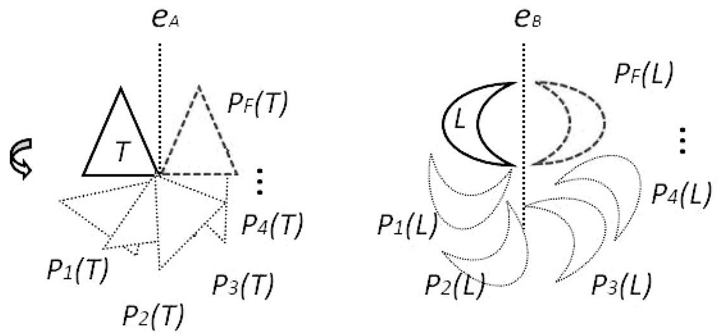
$P_i(T)$: Figura A (T) en la posición *i,* $(i = 1, \infty)$

$P_F(T)$: Figura A (T) en la posición final.

$P_i(L)$: Figura B (L) en la posición *i,* $(i = 1, \infty)$

$P_F(L)$: Figura B (L) en la posición final.

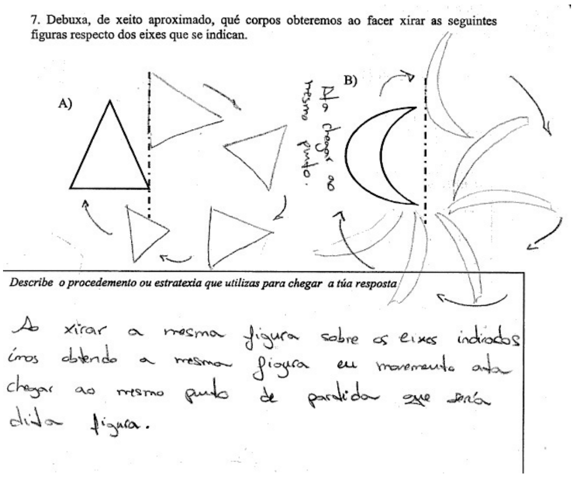
Figura 5.30. Notación para la descripción de la configuración CC4 del ítem 7



- Lenguaje: “girando la figura por el eje”, “el primer triángulo da lugar a un triángulo isósceles y la luna a fase de la luna creciente”, “nada más comenzar a girar el triángulo obtendríamos otro triángulo”, “daría lugar a un triángulo de las mismas características", "la primera figura que se puede apreciar es un semicírculo", "voy rotando la figura hacia la derecha", "cambiar las figuras de sentido, posición", "mover la figura hacia arriba y hacia abajo", "imaginar la rotación de la figura en sentido contrario a las agujas del reloj", "en el espacio los objetos adoptan miles de formas porque es infinito", "las figuras al girar sobre ese eje y volver a su posición no cambian, tienen el mismo aspecto", "en el triángulo se toma como referencia un vértice y en la otra figura la figura entera", "se obtienen las mismas figuras".

- Conceptos: girar, triángulo, luna, semicírculo, eje, vértices.
- Propiedades: a) el plano es infinito; b) los giros son isometrías; c) eje de rotación como eje que separa al plano en dos semiplanos.
- Procedimiento: girar libremente cada una de las figuras en el plano. La solución vendrá dada por las mismas figuras (A y B) en diversas posiciones.
- Argumentación: como los ejes, tanto e_A como e_B, separan al plano en dos semiplanos lo que hay que hacer es ir girando libremente las figuras en el plano, obteniendo las dos figuras en diferentes posiciones $P_i(T)$ y $P_i(L)$ $(i = 1, \infty)$, hasta pasarlas por completo al otro lado de los ejes. Como los giros mantienen las propiedades métricas de las figuras, las figuras resultantes son las mismas que las iniciales pero en otra posición (o en la misma), es decir, la solución será $P_F(T)$ y $P_F(L)$, respectivamente.

Ejemplo de respuesta 5.57. Configuración cognitiva CC4 del ítem 7



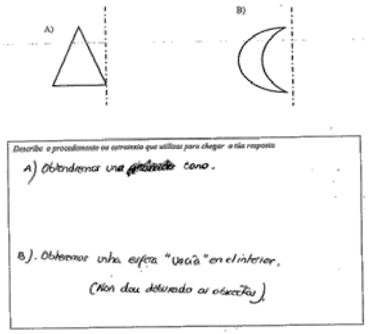
Transcripción:

Si giras la misma figura sobre los ejes indicados vamos obteniendo la misma figura en movimiento hasta llegar al mismo punto de partida que sería dicha figura.

Configuración cognitiva 5 (CC5). *Ausencia de representación gráfica*. Se describen verbalmente los cuerpos resultantes y las acciones llevadas a cabo para obtenerlos. Se intenta describir la acción mental realizada sin apoyarse en representaciones gráficas (ostensivas). En esta configuración, los conceptos, las propiedades y la argumentación son los mismos que los de la configuración CC2, sin embargo el procedimiento cambia al no utilizar en ningún momento la representación gráfica de los cuerpos creados. Debido a ello no se repetirán otra vez esas entidades primarias. Además, no se encontró ninguna descripción verbal que se ajustara a cualquiera de las de otras configuraciones.

- Lenguaje: "un triángulo rota sobre su base 360º y da un cono", "una circunferencia (esfera) que dentro está vacía", "la luna daría dos circunferencias concéntricas", "obtenemos un cono y una esfera vacía en su interior", "B es una esfera o una pelota, A no tengo claro si podría ser un cono", "en la figura A un cono y en la B una esfera", "un cono, una esfera hueca", "en la B haremos un objeto ovalado", "imaginando la rotación de las figuras", "en A una pirámide invertida y en B una esfera", "al girar la luna obtendremos un círculo (esfera) porque se juntan los vértices, en el caso del triángulo un cono", "cono y pelota".
- Conceptos: cono, esfera, pirámide, girar, círculo, vértices, triángulo, circunferencias concéntricas, ángulos, eje de rotación, volumen, punto fijo.
- Propiedades: a) cada punto de la figura plana describe una circunferencia alrededor del eje y sobre un plano perpendicular al mismo; b) los puntos sobre el eje de rotación permanecen fijos; c) al rotar una figura alrededor de un eje se mantiene la distancia de cada uno de los puntos a dicho eje.
- Procedimientos: girar las figuras mentalmente alrededor del eje de rotación.
- Argumentación: Como el eje dado es un eje de rotación, al hacer girar cada una de las figuras alrededor de él se formará un cuerpo tridimensional.

Ejemplo de respuesta 5.58. Configuración cognitiva CC5 del ítem 7



Transcripción:

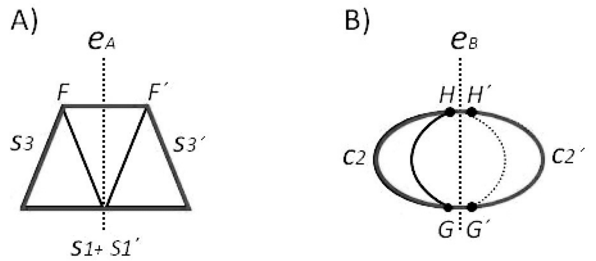
A) Obtenemos un cono

B) Obtenemos una esfera "vacía" en el interior.

(no doy dibujado los objetos)

<u>Configuración cognitiva 6</u> (CC6). *Representación de la sección plana frontal del cuerpo tridimensional perpendicular al plano de visión*. Es necesario el uso de códigos verbales para poder interpretar la solución.

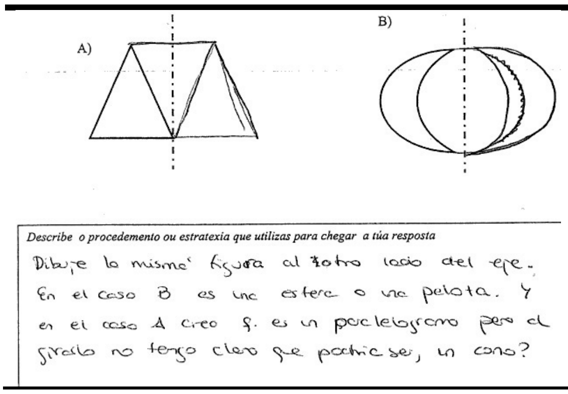
Figura 5.31. Notación para la descripción de la configuración CC6 del ítem 7



- Lenguaje: "veríamos sólo la parte exterior de la luna", "elipse", "en la B haremos un objeto ovalado", "las figuras hacen un efecto doble", "globo terrestre", "dibujé la misma figura al otro lado del eje", "cono y esfera", "se forma un trapecio", "imaginarse las figuras en movimiento respecto a sus ejes", "uniendo los puntos para hacer otra dimensión". Icónico: representación gráfica siguiendo la estructura de la Figura 5.31.
- Conceptos: trapecio, óvalo, elipse, esfera, representación ortogonal frontal, punto fijo, volumen.
- Propiedades: a) las figuras de revolución tienen infinitos planos de simetría; b) todos los planos de simetría contienen al eje de rotación; c) las simetrías son isometrías.
- Procedimiento: se considera el eje de rotación como eje de simetría para construir las figuras simétricas de las dadas respecto del mismo. En cada uno de los casos, se unen mediante segmentos las dos figuras, la dada y su simétrica, formándose así una nueva figura plana que se corresponde con la visión ortogonal frontal de los cuerpos de revolución generados por el triángulo y por la luna, respectivamente.
- Argumentación: se realiza la figura simétrica de T con respecto al eje de rotación e_A dado. Se unen los puntos F y F´ mediante un segmento $\overline{FF'}$. Se consideran los segmentos $s_3, s_1 + s_1', s_3$ y el segmento $\overline{FF'}$ que forman un trapecio que es la imagen que se obtiene si se considera la vista frontal ortogonal del sólido de revolución generado. En el caso de la figura B (L) se realiza la figura simétrica de L con respecto al eje e_B. Se unen mediante un

segmento/curva los puntos H y H' y los puntos G y G' de modo que la vista ortogonal frontal de la figura de revolución dará la imagen de una elipse (óvalo)

Ejemplo de respuesta 5.59. Configuración cognitiva CC6 del ítem 7

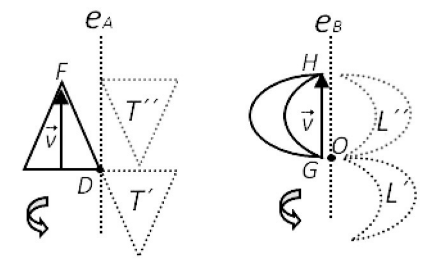


Transcripción:

Dibujé la misma figura al otro lado del eje. En el caso B es una esfera o una pelota.Y en el caso A creo que es un paralelogramo pero al girarlo no tengo claro que podría ser, ¿un cono?

Configuración cognitiva 7 (CC7). *Justificación gráfica aplicando un giro de 180º y una traslación*. Se basa en aplicar a las cada una de las dos figuras una composición de movimientos: simetría central o giro de 180º y traslación.

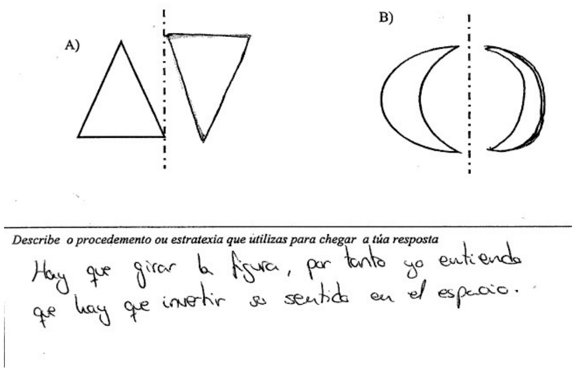
Figura 5.32. Notación para la descripción de la configuración CC7



- Lenguaje: "al girarlo la figura se dará la vuelta, mientras el triángulo cambia la luna no", "imaginar el giro con respecto a la figura que está dibujada", "girar mentalmente los objetos", "hice girar la figura", "la figura no puede cambiar", "hay que girar la figura, por tanto, invertir su sentido en el espacio".
- Conceptos: giro, triángulo, grados, figuras semejantes, lúnula.
- Propiedades: a) todo giro es una isometría; b) toda traslación es una isometría; c) la composición de movimientos planos es una isometría.
- Procedimiento: girar las figuras 180º y aplicarles después una traslación para mantener las figuras al otro lado de los ejes respectivos pero a la misma altura que las figuras iniciales.

- Argumentación: la figura T se gira 180º con respecto al punto D con lo que se obtiene la figura T'. Después se le aplica a T' una traslación de vector $\vec{v}$, de módulo la altura del triángulo T desde el punto F ($|\vec{v}| = d(F, \overline{CD})$) y sentido hacia el punto F. De esta manera se obtiene la figura T''. De la misma forma, se le aplica un giro de 180º a la figura L con respecto a un punto exterior O que se encuentra sobre el eje e_B (que es el resultado de la intersección del eje con la perpendicular al eje pasando por el punto G) obteniéndose la figura L'. Después se le aplica a la figura L' una traslación de vector $\vec{v}$ de módulo la $d(H, G)$ lo que da la figura L'' como figura final en el apartado B).

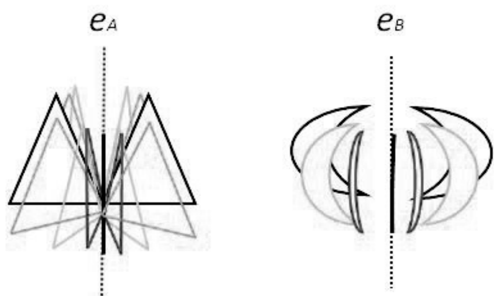
Ejemplo de respuesta 5.60. Configuración cognitiva CC7 del ítem 7



Transcripción:
Hay que girar la figura, por tanto yo entiendo que hay que invertir su sentido en el espacio.

Configuración cognitiva 8 (CC8). *Creación de un continuo de imágenes*. Representación gráfica de diferentes vistas en perspectiva de las figuras planas en el espacio a medida que van girando alrededor de los ejes. Requeriría la coordinación e integración de todas esas imágenes para la reconstrucción de la imagen global del cuerpo generado (Figura 5.32).

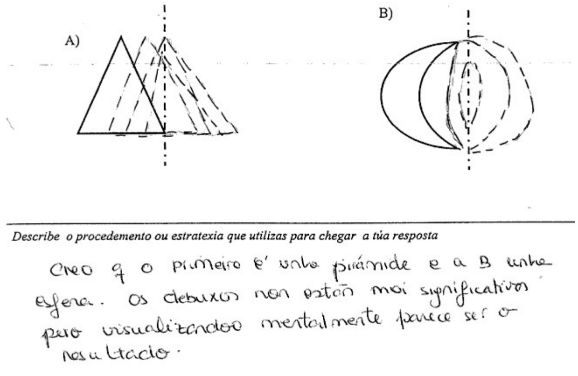
Figura 5.33. Notación para la descripción de la configuración CC8 del ítem 7



- Lenguaje: “si lo hacemos girar da una pirámide y una esfera”, “cada vez se va haciendo más estrecho”, “si los giramos con rapidez describen órbitas”, “al tener que imaginarme los objetos moviéndose, creo que tendremos que ver la imagen con efectos 3D”, “pudiendo ver las figuras girando y cogiendo volumen”.

- Conceptos: representación en perspectiva, giro, rotación alrededor de un eje, esfera, pirámide, cono, punto fijo, volumen.
- Propiedades: a) las figuras de revolución tienen infinitos planos de simetría; b) Cada uno de los infinitos planos que contienen al eje divide en dos partes simétricas a la figura; c) los giros son movimientos rígidos; d) los puntos de la figura plana que están sobre el eje de rotación permanecen fijos; e) al rotar una figura alrededor de un eje se mantiene la distancia de cada uno de los puntos a dicho eje; f) propiedades de la representación en perspectiva de figuras planas en el espacio.
- Procedimiento: dibujar cada una de las figuras en distintas posiciones a medida que se van girando alrededor de los ejes respectivos en un plano que contiene a los mismos. Al coordinar e integrar dicha secuencia de imágenes en una sola (en cada uno de los dos casos) proporcionará la imagen (mental) de un cuerpo tridimensional.
- Argumento: se deja el punto D fijo y se gira 360º el triángulo en el espacio sobre un plano perpendicular al eje e_A que contiene a los puntos C y D, alrededor del eje e_A. Cada pequeño giro alrededor del eje produce una imagen del triángulo en perspectiva que cuando se encuentra perpendicular al campo de visión ofrecerá la imagen de un segmento. Toda esa secuencia de infinitas imágenes permite concluir que el cuerpo que se obtiene es un tronco de cono con un hueco en forma de cono invertido en el centro, para la figura A. En el caso de la figura B ese mismo procedimiento permite obtener la imagen mental de un cuerpo con forma de elipsoide (generado por la curva c_2) con un agujero (también en forma de elipsoide, generado por la curva c_1) que lo atraviesa en la dirección del eje de rotación.

Ejemplo de respuesta 5.61. Configuración cognitiva CC8 del ítem 7

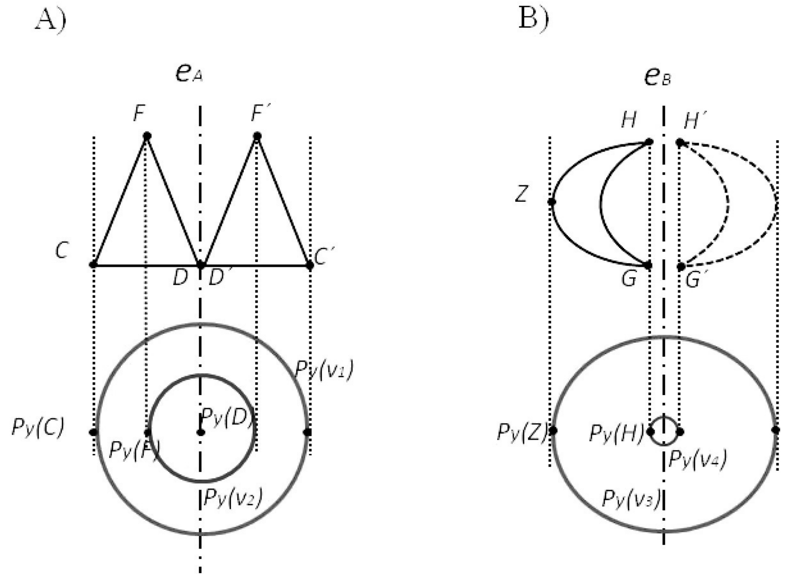


Transcripción:

Creo que lo primero es una pirámide y la B) una esfera. Los dibujos no están muy significativos pero visualizándolo mentalmente parece ser el resultado.

Configuración cognitiva 9 (CC9). *Representación gráfica de la planta y el alzado de los cuerpos resultantes*.

Figura 5.34. Notación para la descripción de la configuración CC9 del ítem 7



Notación para las proyecciones (planta) de diversos puntos de las figuras A) y B):

$P_y(C)$: Proyección del punto *C*; $P_y(C´)$: Proyección del punto *C´*

$P_y(F)$: Proyección del punto *F*; $P_y(F´)$: Proyección del punto *F´*

$P_y(D)$: Proyección del punto *D*; $P_y(D) = P_y(D´)$

$P_y(H)$: Proyección del punto *H*; $P_y(H) = P_y(G)$

$P_y(H´)$: Proyección del punto *H´*; $P_y(H´) = P_y(G´)$

$P_y(Z)$: Proyección del punto *Z*; $P_y(Z´)$: Proyección del punto *Z´*

$P_y(v_1)$: Proyección de la circunferencia que describe el punto *D* sobre un plano perpendicular al eje e_A.

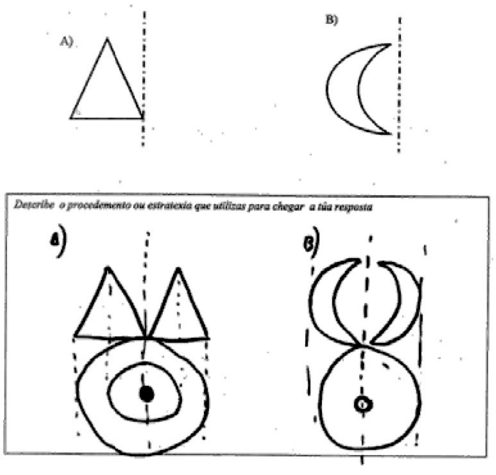
$P_y(v_2)$: Proyección de la circunferencia que describe el punto F sobre un plano perpendicular al eje e_A.
$P_y(v_3)$: Proyección de la circunferencia que describe el punto H (G) sobre un plano perpendicular al eje e_B.
$P_y(v_4)$: Proyección de la circunferencia que describe el punto Z sobre un plano perpendicular al eje e_B.

- Lenguaje: "vista desde arriba", "vista desde abajo", "desde arriba veríamos un agujero y de lado una esfera", "cortada por la mitad", "esfera achatada por arriba y por abajo", "dibujar desde diferentes perspectivas". Icónico: representación gráfica como la que se indica en la Figura 5.34.
- Conceptos: representación ortogonal, circunferencias, punto fijo, volumen, triángulo, vértice, eje de rotación, plano de simetría, esfera, tronco de cono.
- Propiedades: a) una figura de revolución tiene infinitos planos de simetría; b) cada punto de la figura plana describe una circunferencia alrededor del eje y sobre un plano perpendicular al mismo; c) los puntos de la figura plana que están sobre el eje de rotación permanecen fijos; d) al rotar una figura alrededor de un eje se mantiene la distancia de cada uno de los puntos a dicho eje; e) propiedades de la representación ortogonal (planta/alzado/perfil): la proyección de una circunferencia en un plano perpendicular al eje de rotación es una circunferencia, la proyección de una recta perpendicular al plano de proyección es un punto; d) conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales.
- Procedimiento: Dibujar las figuras simétricas de las dadas respecto de los ejes indicados. Trazar rectas paralelas a los ejes pasando por los vértices del triángulo y por los vértices de la luna y el punto medio de la curva c_2. Figura A: dibujar la circunferencia de radio $d(C, e_A)$ y concéntrica a esta la circunferencia de radio $d(F, e_A)$. En la figura B se dibujan las circunferencias concéntricas de radios $d(Z, e_B)$ y $d(H, e_B)$, respectivamente.
- Argumento: Como un sólido de revolución tiene infinitos planos de simetría que contienen al eje de rotación, si se corta por uno de esos planos se obtiene una vista ortogonal frontal del sólido que permite "ver" el interior del sólido generado. De esta manera se tendrá la figura T y su simétrica T'. Se trazan rectas perpendiculares pasando por los puntos C, F, D y sus simétricos a una

distancia mayor que la $d(C, e_A)$). Marcamos sobre la prolongación del eje e_A un punto que será la proyección $P_y(D)$ (planta) de dicho punto y de todos los que se encuentran sobre el eje de rotación e_A (el punto D es un punto fijo, por tanto no describe ninguna circunferencia). Tomando $P_y(D)$ como centro, se dibuja una circunferencia $P_y(v_1)$ de radio $d(C, e_A)$ que tiene dos rectas tangentes en los puntos $P_y(C)$ y $P_y(C')$. Se describe también otra circunferencia $P_y(v_2)$ concéntrica a la anterior de radio $d(F, e_A)$ con otras dos rectas tangentes en los puntos $P_y(F)$ y $P_y(F')$. Estas dos circunferencias ofrecerán la representación en planta del sólido generado en el caso de la figura A. En la figura B, siguiendo el mismo procedimiento, la vista frontal corresponderá a la figura L y a su simétrica L' con respecto al eje e_B. La representación ortogonal de la planta viene dada por dos circunferencias concéntricas $P_y(v_3)$ y $P_y(v_4)$ de radios $d(Z, e_B)$ y $d(H, e_B)$, respectivamente cuyo centro es el punto proyección de todos los puntos del eje e_B. Las proyecciones del punto Z y la del punto Z' serán los puntos de tangencia $P_y(Z)$ y $P_y(Z')$ de la circunferencia $P_y(v_3)$. Por otra parte, la proyección de los puntos H y G es el mismo punto $P_y(H)$ al estar ambos sobre la misma recta perpendicular al plano de proyección y será uno de los puntos de tangencia de la circunferencia junto con $P_y(H')$.

En el caso de la figura A las representaciones de planta y perfil (alzado) corresponden a un tronco de cono con un hueco en forma de cono invertido y en el caso de la figura B corresponden a un cuerpo elipsoidal con un agujero de forma también elipsoidal.

Ejemplo de respuesta 5.62. Configuración cognitiva CC9 del ítem 7



5.3.7.3. Análisis cuantitativo de las configuraciones asociadas al ítem 7

El análisis cuantitativo de las configuraciones que se muestra en la Tabla 5.40, nos muestra dos configuraciones cuya frecuencia destaca sobre las demás: la configuración CC1 con un porcentaje del 49% que supone prácticamente la mitad de la muestra, y la configuración CC2, que aún alcanzando un 16,50%, queda bastante por debajo de la configuración anterior. Las demás configuraciones tienen porcentajes que podrían clasificarse en dos grupos, las que tienen una frecuencia cercana al 5% (CC3, CC4, CC5 y CC6) y aquellas que rondan el 2,50% (CC7 y CC8), quedando aislada la configuración CC9 con un 1,25%.

Tabla 5.40. Configuraciones cognitivas asociadas al ítem 7

	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Eje de rotación como eje de simetría.	196	49,00
CC2	Representación gráfica sin apoyo ostensivo de los ejes dados.	66	16,50
CC3	Marcar elipses para conferir efecto tridimensional.	21	5,25
CC4	Rotaciones libres en el plano.	23	5,75
CC5	Ausencia de representación gráfica.	17	4,25
CC6	Representación de la sección plana frontal	21	5,25
CC7	Giro con traslación.	9	2,25
CC8	Creación de un continuo de imágenes.	10	2,50
CC9	Planta y alzado de los cuerpos resultantes.	5	1,25
NC	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco	26	6,50
NE	No entiende	6	1,50
Total		400	100,00

Las configuraciones CC1, CC4 y CC7 comparten la idea de que los ejes que aparecen en la tarea se consideran situados sobre el plano y, por tanto, el movimiento es realizado en el plano y como consecuencia se obtienen figuras planas. En el caso de las configuraciones CC4 y CC7, el movimiento realizado es un giro y en el caso de la configuración CC1 el eje se considera como eje de simetría.

La consideración del eje como eje de rotación para generar sólidos tridimensionales se encontró en una amplia variedad de configuraciones: CC2, CC3, CC5, CC6, CC8 y CC9. Sin embargo, este conjunto de configuraciones entendidas globalmente no alcanzan un porcentaje muy elevado en cuanto a frecuencia (35%), contrastando con el grupo anterior de configuraciones en las que se presentan figuras planas como solución a la tarea y que suponen un 57% de la muestra.

El apoyo ostensivo consistente en el empleo de los ejes como guías para obtener las representaciones gráficas de los cuerpos resultantes se recoge en todas las configuraciones salvo en la configuración CC2 y en la configuración CC5.

Si se restringe el estudio a aquellas configuraciones que involucran objetos tridimensionales, se puede establecer un grupo de configuraciones que intentan ofrecer una representación gráfica global del cuerpo generado, mediante la representación en perspectiva, como son las configuraciones CC2, CC3 y CC8 (la configuración CC5 permite crear una imagen mental pero no presenta de forma ostensiva una representación de la misma). La configuración CC8 presenta una particularidad con respecto a las otras dos que se traduce en que el observador ha de coordinar e integrar todo el continuo de imágenes para producir un único cuerpo. Esta última configuración impregna de dinamismo la imagen mental.

Sin embargo, las configuraciones CC6 y CC9 ofrecen distintas vistas de representaciones ortogonales de de los cuerpos generados y no una representación gráfica que evoque directamente (asociación directa con una imagen mental) un cuerpo tridimensional. Siguiendo a Gutiérrez (1998a, p. 198): “la representación ortogonal mantiene la información sobre la estructura de los sólidos en cuanto a cantidad de elementos, posiciones relativas, etc., pero pierde lo referente a su aspecto visual”. Se podría hacer una distinción entre la configuración CC6 y la CC9. En el caso de la CC6, parece haber un intento de crear una imagen tridimensional a través de la representación gráfica utilizada, pero no se consigue al no dar sensación de profundidad. Este tipo de representación gráfica se ajusta a la etapa 2 (e*squemática espacial*) señalada por Mitchelmore (1978,1980a) para la representación de figuras regulares del espacio, donde las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente incluyendo a veces caras ocultas. En la configuración CC9, no se busca el efecto volumen en la representación, está claro el uso de la habilidad de *reconocimiento de las* *relaciones espaciales* relativas a la identificación de las características de cada una de las figuras para representar sus proyecciones en el plano (vista frontal y aérea).

Parte de la información que se conserva al hacer e interpretar una representación plana se debe a que se han compartido ciertos códigos y claves (Parszyz, 1988), de manera que determinados datos objetivos se interpreten siempre de la misma forma. Así, todas las configuraciones “tridimensionales” presentadas deben seguir códigos de representación sin los cuales no se podría hacer una lectura correcta de las representaciones presentadas por los estudiantes. Por ejemplo, en la configuración CC3, dibujar las circunferencias de las bases es un código que confiere a la estructura un efecto tridimensional. En el caso particular de la configuración CC6 los códigos son insuficientes y por ello esta configuración se suele acompañar de un discurso verbal.

La configuración CC5 establece un trabajo exclusivamente mental sin apoyos ostensivos. A pesar de ello, pueden aparecer de forma aislada algunos elementos gráficos, como puede ser la representación de las figuras simétricas de las dadas con respecto a los ejes dados. Las respuestas de los alumnos indican su incapacidad para reproducir una representación gráfica de la imagen mental creada. La argumentación dada en esta configuración se ajusta al tipo de representación verbal identificada en los trabajos de Gorgorió (1998, p. 224) y Gutiérrez, (1998a, p. 201).

5.3.7.4. Análisis de errores

En la Tabla 5.41 se muestra la relación de errores asociados a este ítem. Cabe destacar el bajo porcentaje de estudiantes que dan una representación correcta de los sólidos generados (4%). Habría que considerar que al depender las respuestas de la representación gráfica realizada y no contar con entrevistas de los estudiantes, pudiese ocurrir que algunas respuestas de las opciones CI e IC contribuyeran a elevar dicho porcentaje. Los dos errores más frecuentes están concentrados dentro del tipo de error conceptual, son el error 1C (28,25%) y el error 3C (21,25%) que corresponden a configuraciones que no ofrecen una figura tridimensional como solución a la tarea propuesta. En el bloque de los errores procedimentales sobresale el error 4P que supone el 14%, cuando se detecta en las dos figuras a la vez, al que hay que añadir el 11% cuando afecta sólo a una de las dos figuras, sobre todo a la figura B.

Tabla 5.41. Frecuencia y porcentaje de los tipos de errores asociados al ítem 7

Tipo de errores	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
0	Sin errores	16	4,00
EB	Dejar el ítem sin contestar	23	5,75
1S	No comprender la tarea propuesta	4	1,00
1C	Considerar el eje de rotación como eje de simetría	113	28,25
2C	Girar en el plano las figuras	33	8,25
3C	Girar las figuras 180º en el espacio (simetría)	85	21,25
1P	No identificar los huecos que se generan	0	0,00
2P	Considerar sólo la figura que queda en el interior	5	1,25
3P	Dificultad para describir, visualizar o dibujar los cuerpos resultantes	9	2,25
4P	No considerar la distancia al eje (A y B)	56	14,00
5P	Describir las figuras como la imagen de la sección plana frontal	11	2,75
3P-4P	En la figura A se comete error 3P y en la figura B el 4P	11	2,75
0-4P	En la figura A no se comete error y en la figura B) el 4P	13	3,25
1P-4P	En la figura A se comete error 1P y en la figura B el 4P	18	4,50
4P-1P	En la figura A se comete error 4P y en la figura B el 1P	1	0,25
EB-4P	En la figura B se comete error 4P	1	0,25
EB-3P	En la figura B se comete error 1P	1	0,25
Total		400	100,00

A continuación se describirán con más detalles estos errores. Se observa en la anterior tabla que hay un porcentaje casi imperceptible (1%) de estudiantes que hacen explícito el hecho de no haber comprendido la tarea propuesta (error 1S). Sin embargo, la base de las configuraciones CC1, CC4 y CC7 que se apoyan en los errores 1C, 2C y

3C indican que la acción que requiere la tarea no se ha llevado a cabo porque no se ha comprendido el objetivo de la misma.

El error 1C, asociado de una forma directa a la configuración CC1, está en consonancia con la propuesta de Vinner (1983, 1991) que sostiene que el razonamiento de los estudiantes está basado, en la mayoría de los casos, en sus imágenes de los conceptos, en contraposición con la creencia de muchos profesores de diferentes niveles educativos de que los estudiantes basan sus razonamientos en las definiciones verbales de los conceptos y que las imágenes del concepto tienen un papel secundario. De acuerdo con Vinner, Hershkowitz (1990) destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto recalcando que además, cuando se trabaja con objetos tridimensionales, este es especialmente importante (Guillén, 2000, p. 37). La mayoría de las actividades realizadas por los estudiantes identifican la situación de una figura y un eje a su derecha como la imagen de concepto de simetría, lo que conduce a que ante una imagen del mismo tipo se asocie con dicho concepto.

También se puede observar aquí lo que Mesquita (1992, p. 20) señala como *doble estatus de los objetos geométricos,* pues todo concepto geométrico si bien es distinto de su representación externa difícilmente se puede disociar de ella. Probablemente el estudiante no se percate de esta ambigüedad pero, como señala también Guillén (2000, p. 38), resulta ser una fuente de conflicto.

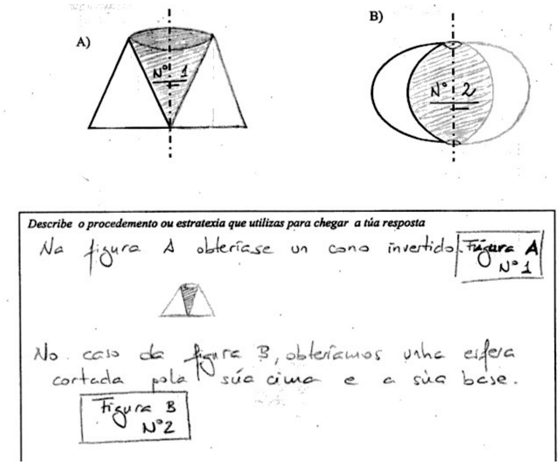
El análisis de respuestas lleva a reconocer el error 2C (giro en el plano) como un error diferente, en esencia, del error 1C. En aquel no hay confusión sobre que movimiento realizar, sino que lo que se observa es la aplicación del movimiento restringiéndolo al plano y no en el espacio. Es un error asociado y exclusivo de la configuración CC4. En este caso, es probable que la palabra "giro" actúe de distractor, al aplicar el significado que tiene el término en el contexto cotidiano. Siguiendo a Gutiérrez y Jaime (1996, p. 126) se puede haber fomentado esta circunstancia con la instrucción en el trabajo sobre los giros en el plano (utilizando, p.e., Geogebra o, sencillamente con lápiz y papel). Las nociones primarias de los estudiantes sobre los giros tienen que ver con la característica visual que corresponde al *desplazamiento circular* que se produce, imprimiendo la visión dinámica de los giros (las manecillas del reloj que giran, una llave al abrir una puerta, etc.). En nuestro caso no se permitía el uso de instrumentos de dibujo por lo que no se sabe si hubieran mantenido la conservación de la distancia al centro de giro.

La diferencia entre el error 1C y el error 3C es muy sutil pues conduce a la misma solución de la tarea. El análisis de este error permite deducir que es un error provocado por la imagen que se les presenta, se toma la figura y se gira hacia el otro lado del eje, es decir, 180º en el espacio, pero no se gira "alrededor" de un eje. Se produce un conflicto entre la imagen presentada (que lleva hacia la realización de una simetría) y la palabra utilizada en el enunciado (girar). La representación gráfica de la imagen es la opción que contó con más seguidores, como se puede observar en la cantidad de respuestas que tuvieron ese error. Cabe preguntarse si se obtendrían los mismos resultados si no se facilitase a los alumnos el eje pintado y sólo se indicara en el enunciado que se realiza una rotación de la figura respecto a un eje vertical. Subyace aquí la idea de simetría como un movimiento que físicamente no se produce en el plano, sino que hay que "salirse del plano" para mover la figura y que se produzca un cambio de orientación (Jaime y Gutiérrez, 1996). En el sentido cotidiano de movimiento, el movimiento realizado es un giro de 180º, lo que conduce a este tipo de errores que también recoge Gorgorió (1998) en su trabajo.

El error 1P supone no identificar los huecos que se generan por la rotación espacial de las figuras. En los casos en los que se obtiene para la figura A un tronco de cono y para la figura B una esfera sin especificar nada más, el error 1P debe ser interpretado como un error que podría ser debido a la consideración como relevante únicamente de la parte exterior de la figura por lo tanto, se representa exclusivamente la forma exterior de los sólidos formados sin detallar si hay o no hueco en el interior de los mismos. Ello conduce a inducir que podrían ser soluciones parcialmente correctas, al no disponer de más datos.

El error 2P surge al considerar como solución los huecos que se crean al girar las figuras dadas alrededor de los ejes correspondientes, es decir, se consideran las figuras complementarias de las que en realidad se forman. De este modo, se tiene que la solución viene dada por el cono invertido generado por la curva generatriz s_2 en el caso de la figura A y el cuerpo esférico con un agujero central atravesándolo que se produce al girar alrededor del eje la curva c_1 (Ejemplo de respuesta 5.63). En los casos encontrados (5%), los cuerpos de revolución generados eran correctos.

Ejemplo de respuesta 5.63. Huecos en los cuerpos de revolución generados en A y en B



Transcripción:

En la figura A se obtendría un cono invertido.

En el caso de la figura B, obtendríamos una esfera cortada por arriba y por abajo.

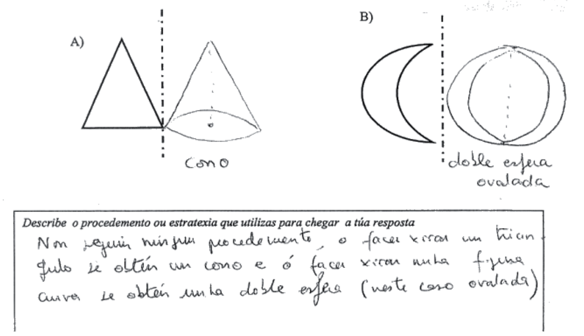
Cuando los estudiantes tienen dificultades para describir, dibujar o visualizar las figuras resultantes se clasifica el error dentro de la categoría 3P. Al igual que ocurre en las investigaciones realizadas con estudiantes de primaria (Gutiérrez, 1998a, pp. 205-206), los estudiantes para maestro son conscientes de la incorrección de sus dibujos, ya que los borran y los vuelven a hacer. Esto indica que el problema está en que carecen de capacidades para coordinar las diferentes direcciones de los segmentos que integran la representación plana. Según Gutiérrez (1998a, p. 206),

> La habilidad de dibujo es un factor que afecta realmente a la capacidad para hacer representaciones de sólidos, y los educadores hemos de ser conscientes de que esta habilidad no crece de manera espontánea, o lo hace con mucha más lentitud que si se realizan tareas específicas en las clases.

Este es un error ligado, sobre todo a la configuración CC5. Si hacemos una comparación entre las dos figuras, el análisis permite establecer mayor peso a este error para la figura A (5% frente al 2,75% de la figura B, que puede ser debido a la falta de simetría de la figura con respecto a un eje horizontal lo que provoca que haya en la misma perpendicular puntos a diferente distancia del eje de rotación y dificulta la creación de la imagen mental.

El error 4P, consistente en no considerar la distancia al eje en cada una de las figuras, provoca, en la mayoría de los casos, que las figuras que resultan sean un cono y un cuerpo esférico. En esta situación, las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio no están desarrolladas suficientemente, al no establecer correctamente la relación entre el objeto y el eje de rotación (equidistancia al centro de giro). Este error implica que no se reconozcan los huecos interiores dado que se generan precisamente por la distancia al eje de determinados puntos en cada una de las figuras, es decir, el error 4P implicaría el error 1P. En el caso del cuerpo generado haciendo girar la luna, se encuentran casos en los que sí se tiene en cuenta el hueco interior (Ejemplo de respuesta 5.64) pero no que la figura sea abierta.

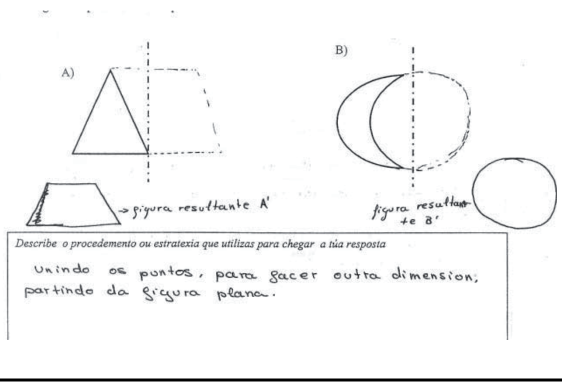
Ejemplo de respuesta 5.64. Error 4P asociado al ítem 7



Transcripción:
No sé ningún procedimiento, al hacer girar un triángulo se obtiene un cono y al hacer girar una figura curva se obtiene una doble esfera (en este caso ovalada).

El error de procedimiento señalado como 5P (Ejemplo de respuesta 5.65) está asociado únicamente a la configuración CC6. Como se ha visto, la representación dada en las respuestas asociadas a esta configuración sólo hace referencia a la sección plana frontal de los cuerpos generados y la descripción dada en algunos casos sólo se refiere a la imagen de figuras planas (trapecio y elipse o círculo). Salvo que se haga una referencia escrita a figuras tridimensionales no se puede saber con certeza si en realidad crean (mentalmente) un cuerpo tridimensional aunque sólo representen la sección plana frontal, lo cual podría corresponder a la etapa señalada por Mitchelmore (1980a) como *esquemática espacial* donde las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente y, a veces, incluyendo caras ocultas.

Ejemplo de respuesta 5.65. Error 5P asociado al ítem 7



Transcripción:
Uniendo los puntos para hacer otra dimensión, partiendo de la figura plana.

Los errores que están separados mediante un guión, indican que el error cometido no coincide en ambas figuras, así el primero de ellos indicará el error ligado a la figura A y el segundo el que corresponde a la figura B. Salvo en el 11,25% de la muestra, el error cometido en la figura A es similar al cometido en la figura B.

Si analizamos con detalle las configuraciones CC1, CC4 y CC7 podemos observar que además de aquellos errores que están ligados directamente a ellas, es pertinente asociar a las mismas un tipo de error situacional. En el caso de la configuración CC1 el error viene provocado por la imagen del eje de rotación que es el prototipo de imagen que se da para solicitar que un alumno realice una simetría. En el caso de las otras dos configuraciones el error situacional viene dado por la palabra "girar" asociada a la rotación en el plano, que hace referencia a una acción mucho más presente en las actividades llevadas a cabo a lo largo de la vida escolar de los estudiantes.

El porcentaje mayor de errores se concentra en la categoría de errores conceptuales que, además, se corresponden con el tipo de respuestas mayoritarias (63,25%). Los errores 1C y 3C provienen de un mismo tipo de configuración, la configuración CC1 en la que el eje actúa como eje de simetría axial.

En las configuraciones CC4 y CC7 se aprecian errores en el concepto de giro al no ser capaces de interpretar que un giro queda determinado por su centro y amplitud de ángulo.

A continuación, en la Tabla 5.42 se recogen los distintos cuerpos de revolución generados que son descritos en las respuestas de los estudiantes. Las soluciones dadas que tienen error del tipo 3P generan cuerpos tridimensionales pero no queda claro cuáles, al tener dificultades para describir o representar los cuerpos generados. En el caso de la configuración CC6, que tiene asociado el error 5P, sólo en algunos casos se reconocen los cuerpos tridimensionales que generan debido a la naturaleza de dicha configuración (ofrece una representación que no da sensación de volumen). Los demás provienen de los errores 1P, 2P y 4P, bien para las dos figuras o para alguna de ellas y en total tenemos 120 respuestas con cuerpos tridimensionales. Se puede observar que sólo un 13,33% ofrece una solución correcta y que el porcentaje más alto (35,83%) corresponde a aquellos que han considerado un cono para la figura A y una esfera para la figura B como cuerpos generados.

Este análisis de los cuerpos generados pone de manifiesto el hecho de que los estudiantes conocen un abanico bastante pobre de figuras de revolución. En general se limitan a ajustar las imágenes conceptuales creadas a los prototipos que conocen, sin analizar las características y propiedades geométricas de los mismos.

Tabla 5.42. Tipo de cuerpos tridimensionales generados

Tipo de cuerpos tridimensionales generados	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
Ci-E	La figura A es un cilindro y la figura B una esfera	3	2,50
C-EH	La figura A es un cono y la figura B una esfera hueca	14	11,67
C-E	La figura A es un cono y la figura B una esfera	43	35,83
C-ET	La figura A es un cono y la figura B una esfera truncada	2	1,67
P-E	La figura A es una pirámide y la figura B una esfera	6	5,00
TC-EH	La figura A es un tronco de cono y la figura B una esfera hueca	12	10,00
TC-E	La figura A es un tronco de cono y la figura B una esfera	17	14,17
E	La figura A no está clara o no se hizo y la figura B es una esfera	4	3,33
TC-EA	La figura A es un tronco de cono y la figura B una esfera achatada/óvalo	3	2,50
Correctas	La figura A es un tronco de cono sin un cono invertido y la figura B un elipsoide con un agujero/hueco de forma elipsoidal	16	13,33
TOTAL cuerpos 3D		120	100,00

El 49,17% de los que han considerado que se generaban figuras tridimensionales han dado como cuerpo resultante en A un cono, mientras que en la figura B el cuerpo más frecuente (60,83%) ha sido una esfera, sin especificar si era o no hueca o si tenía o no agujero. El 26,67% consideraron que se generaba un tronco de cono en el caso de la figura A y el 21,67% que se generaba en la figura B una esfera con un hueco dentro. Los porcentajes elevados en los dos primeros casos revelan que los estudiantes han reproducido un cuerpo de revolución conocido al presentárseles como figuras planas un triángulo y una "semicircunferencia doble" sin reflexionar sobre el proceso que debían llevar a cabo, conclusión que enlaza con el trabajo de Cohen (2003).

Dicho estudio, llevado a cabo con profesores de primaria en servicio y con futuros profesores, ha tenido en cuenta que al tratar con profesores es probable que conozcan los desarrollos estándar de estos cuerpos y que el hecho de reconocerlos no significa que sean capaces de visualizar el proceso. Imaginar la rotación de sólidos depende directamente de las experiencias que se hayan tenido, lo que concuerda con la afirmación de van Hiele sobre el nivel de rendimiento geométrico, que depende mucho más de las experiencias de enseñanza y aprendizaje que del desarrollo espontáneo con la edad (Cohen, 2003, p. 230).

En la configuración CC8 las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio se perciben a través de los dibujos realizados en este tipo de argumentación, al igual que la conservación de las dimensiones de las figuras al girar. Sin embargo, al verbalizar las respuestas obtenidas se pierde parte de la información, pues la que se puede extraer de los dibujos no coincide con la verbalizada. De este modo, los estudiantes que han seguido la configuración CC8 presentan unos cuerpos de revolución que, en el 72,72% de los casos, corresponden, al verbalizarlos, a una pirámide o un cono en la figura A y una esfera para la figura B sin contemplar los huecos generados ni la distancia al eje, que sí estaba presente en los dibujos realizados, lo que los ha llevado a los errores 3P y 4P. Esta idea pone de manifiesto la advertencia hecha por Parzysz (1988, 1991) según la cual debemos tener en cuenta que al fijarnos en las propiedades que refleja un dibujo es necesaria una descripción discursiva que caracterice al objeto para eliminar las posibles ambigüedades inherentes al dibujo.

El análisis realizado nos permite hacer un paralelismo con las diferentes etapas que describe Mitchelmore (1978, 1980a) atendiendo a los dibujos encontrados en las respuestas de los estudiantes, lo que supone considerar sólo las configuraciones CC2, CC3, CC6 y CC8. De esta manera, los dibujos de la configuración CC6 se corresponderían con la Etapa 1 ("esquemática plana") donde la figura se representa mediante una cara vista ortogonalmente, los de las configuraciones CC2 y CC8 con la

Etapa 3 ("pre-realista") donde los dibujos muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad, aunque sin conseguirlo plenamente. En la Etapa 4 ("realista") se incluirían aquellos dibujos que son bastante correctos y siguen de forma aproximada las reglas del dibujo en perspectiva. Independientemente del método usado, los dibujos de esta última etapa indican que el estudiante ha establecido un marco euclídeo de referencia dentro del cual puede establecer las relaciones espaciales tridimensionales. Esta última etapa podríamos asociarla a las representaciones de las configuraciones CC3 y CC9. No se han encontrado dibujos que se correspondan con la Etapa 2 descritas por Mitchelmore (1980a, p. 84).

Para el estudio de la efectividad de las configuraciones (Tabla 5.43) sólo se van a considerar las configuraciones CC2, CC3, CC5, CC6, CC8 y CC9 por carecer de sentido su análisis para las demás.

Tabla 5.43. Efectividad de las configuraciones asociadas al ítem 7

Configuración	Frecuencia	Porcentaje
CC2	2	3,03
CC3	8	38,10
CC5	0	0
CC6	0	0
CC8	1	10,00
CC9	4	80,00

La configuración CC2, la de mayor frecuencia (17%) de aquellas que presentan como solución a la tarea cuerpos tridimensionales, es la que tiene la efectividad más baja. Por otro lado, la configuración que tiene mayor efectividad es la CC9, que es la menos frecuente. Este porcentaje alto en cuanto a efectividad en esta configuración y bajo en cuanto a frecuencia con respecto a los demás tipos de configuraciones, puede venir determinado por el hecho de que los estudiantes que lo han utilizado están habituados al dibujo técnico y a trabajar con diferentes puntos de vista de los objetos como muestra el lenguaje utilizado y los códigos de la representación plana ortogonal. En el caso de la configuración CC3, se observa que el hecho de utilizar los ejes y las circunferencias generadas por los puntos de la parte superior e inferior de las figuras e proporciona una ayuda importante para poder resolver la tarea correctamente.

Como se ha visto en el Capítulo 3, se pueden distinguir tres tipos de representaciones planas de sólidos (*representaciones gráficas*, *representaciones verbales y representaciones mixtas*) cuya frecuencia depende mucho de cómo esté planteada la tarea (Guillén et al., 1992; Gutiérrez, 1998). En nuestro investigación, se dice explícitamente en el enunciado que "dibujen de forma aproximada". Así, lo esperado sería que prevaleciera la representación gráfica sobre la verbal. Por otro lado, se solicita que describan el procedimiento o la estrategia que siguieron para llegar a la solución lo que conduce a que, además de la representación gráfica, aparezca un discurso verbal y como consecuencia que aumenten las representaciones verbales y mixtas. Para paliar este efecto, se considerarán representaciones verbales sólo aquellas en las que no hay presencia de representación gráfica o que, si la hay, es simplemente un esbozo y se considerarán representaciones mixtas aquellas que el dibujo y la descripción verbal se complementan, o bien aquellas en las que tanto la representación gráfica como la descripción verbal serían completas (las dos han de serlo). La configuración CC5 prescinde de toda representación gráfica de figuras y supone un 3,5% de la muestra.

Como se puede observar en la Tabla 5.44, esa clasificación puede verse distorsionada por el hecho de solicitar de manera explícita a los estudiantes que explicaran el procedimiento o la estrategia que siguieron, lo cual forzaría el aumento de las representaciones mixtas en detrimento de las gráficas. Sin embargo, esta particularidad no afectó significativamente a las clasificadas como verbales, coincidiendo en porcentaje con nuestra configuración CC5. Dicha configuración no se correspondería exactamente con la llamada "representación verbal" de Gutiérrez (1998), ya que teóricamente se podrían encontrar representaciones verbales que no siguieran esa configuración y que expresaran una representación ortogonal mediante planta, alzado y perfil (CC9) o bien una secuencia de imágenes (CC8). Sin embargo, en este trabajo no se han encontrado respuestas que se adapten a dichas descripciones.

Tabla 5.44. Distribución de la frecuencia y porcentaje de los tipos de representación (Gutiérrez, 1998)

Tipo de representación	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
RG	Gráfica: El texto es irrelevante	47	39,17
RV	Verbal: Los dibujos son irrelevantes	17	14,17
RM	Mixta: El dibujo y el texto se	56	46,67

	complementan		
Total		120	100

Para estudiar la relación existente entre el tipo de configuración y el tipo de representación utilizada, sólo se atenderá a aquellas configuraciones que infieren carácter tridimensional a sus producciones. La relación entre el tipo de representación y la configuración CC2 ofrece una visión de aquellos que, aún intentado conferir volumen mediante una representación en perspectiva, al no utilizar de forma ostensiva los ejes no lo lograron. Ello puede deberse a no emplear como apoyo los ejes dados como se pone de manifiesto en la diferencia que hay en la efectividad de la configuración CC2 y la CC3.

La Tabla 5.45 establece la frecuencia del uso de representación gráfica en cada una de las configuraciones. La CC5 no está incluida porque como se ha visto anteriormente coincide con el tipo de representación verbal. El porcentaje se realiza sobre el total de respuestas que siguen un tipo concreto de configuración. De esta manera, se entiende que en el caso de la configuración CC2, el porcentaje de representaciones gráficas es bastante similar al de las representaciones verbales. A nivel general se puede afirmar que la configuración que hace un uso más eficiente de las representaciones planas de objetos tridimensionales (en el sentido de autosuficientes) es la configuración CC3. En el caso particular de la configuración CC6, su naturaleza no permite prescindir de una aclaración verbal para poder interpretar el dibujo realizado. El tipo de procedimiento llevado a cabo en la configuración CC8 requiere un buen dominio de la representación en perspectiva de las distintas posiciones de las figuras planas para que dicha secuencia de imágenes evoque el cuerpo pretendido, lo que se traduce en un alto porcentaje en representaciones mixtas.

Tabla 5.45. Frecuencia del uso de representación gráfica en cada una de las configuraciones del ítem 7

Configuración	Tipo de representación	Frecuencia	Porcentaje
CC2	RG	32	48,48
	RM	29	45,45
CC3	RG	11	52,38
	RM	7	33,33
CC6	RG	0	0,00

	RM	12	57,14
CC8	RG	1	20,00
	RM	7	60,00
CC9	RG	2	40,00
	RM	1	20,00

En el caso de que los cuerpos generados sean C-E o C-EA, muchas de las representaciones son en realidad de un cono y una circunferencia. Se quiere decir con esto que la representación gráfica del cono evoca un cono pero la de la esfera evoca una circunferencia dado que no existe efecto volumen, por lo que se cuenta como tipo de representación mixta. Sin una aclaración verbal para la figura B no se podría saber si es una circunferencia o una esfera (al cono le confieren el efecto tridimensional al incluir el lado diferente curvo, lo que diferencia claramente su representación de la de un triángulo).

Al igual que en el trabajo de Hazama y Akai (1993, p. 168) se encontró que los estudiantes incorporan leyendas relativas a atributos de los componentes de las figuras, como también se ha podido comprobar aquí. Así, por ejemplo, los estudiantes nombran la forma de las caras, etiquetando cual es la cara superior, frontal, etc., incluso ofreciendo en algunos casos descripciones verbales del sólido entero, por ejemplo, en el caso de la figura A que parece una taza y en el caso de la figura B una pelota. Las dificultades o dilemas con que se encuentran también quedan reflejadas por ellos mismos cuando redibujan sus representaciones gráficas, indicando la confrontación existente con su dibujo. Según estos autores, Las representaciones gráficas de figuras tridimensionales no sólo sirven para comunicar a los demás información espacial sino también para comunicarla entre los propios autores de los dibujos.

La investigación llevada a cabo por Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) muestra las dificultades de los estudiantes para representar formas tridimensionales, para interpretar representaciones bidimensionales de formas tridimensionales y para manipular mentalmente formas 3D. Además, sugiere que los procesos de representación siguen cuatro niveles de sofisticación para estudiantes de 9 a 14 años. No se encuentran estudiantes de nivel 1 en nuestro trabajo ya que los que sólo utilizan la configuración verbal son conscientes de que sus dibujos no representarían los objetos, son conscientes de que es necesario coordinar caras y vistas aunque no las sepan dibujar. Los estudiantes de nivel 2 podrían ser aquellos que representan el cono como un triángulo con una cara curva únicamente, sin más convenciones y una circunferencia como esfera. Los estudiantes de nivel 3 parecen utilizar las convenciones necesarias para el dibujo de objetos 3D, sin embargo no indican los huecos ni otras características internas de la figura. El nivel cuatro correspondería a aquellos que implementan correctamente las convenciones utilizadas para representaciones 2D de objetos 3D, indicando elementos estructura interna y externa de los cuerpos, justificando todas sus acciones e incluso mostrando diferentes representaciones.

CAPÍTULO 6:
SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentará una síntesis de los resultados obtenidos en la investigación llevada a cabo, exponiendo y analizando a su vez las conclusiones que se derivan de los mismos. Para ello se recuperarán los objetivos y las hipótesis generales expuestas en el Capítulo 2. Además, se contrastarán las hipótesis específicas de cada ítem, formuladas en el Capítulo 4, con los resultados obtenidos en el análisis de respuestas de los estudiantes.

En otra sección de este capítulo se expondrán las cuestiones de la investigación que han quedado abiertas y que consideramos interesantes de cara a continuar trabajando sobre ellas como futuras líneas de investigación. También se presentarán las aportaciones del trabajo así como las limitaciones del mismo.

6.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS

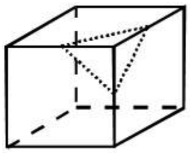
A continuación se analizarán los resultados y conclusiones alcanzados respecto a los objetivos expuestos en el Capítulo 2.

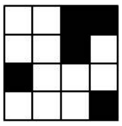
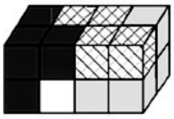
6.2.1. OBJETIVO ESPECÍFICO 1

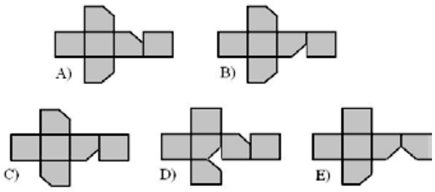
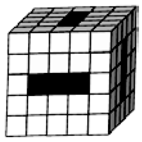
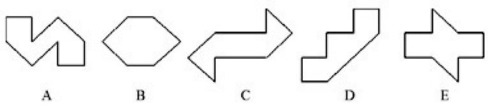
Objetivo específico 1: Determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE.

Hablar de los objetos y procesos que ponen en juego los sujetos al realizar las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE es hablar de las configuraciones cognitivas en el marco del EOS. En el Capítulo 5 se han descrito de forma detallada las diferentes configuraciones cognitivas detectadas para cada uno de los siete ítems, describiendo los objetos y procesos puestos en juego en cada una de ellas. Se han obtenido siete configuraciones diferentes para el ítem 2; ocho para los ítems 1 y 3; nueve para los ítems 6 y 7; cinco para el ítem 4 y seis para el ítem 5. En Tabla 6.1 se muestra una síntesis de dichas configuraciones.

Tabla 6.1. Configuraciones asociadas a cada uno de los 7 ítems

Distintivo gráfico de los ítems	Tipo de Configuraciones
Ítem 1 	CC1. Asignar los vértices de una cara triangular del cuerpo resultante a cada uno de los vértices del cubo inicial. CC2. Identificar el cuerpo resultante con un cubo. CC3. Comprobación exhaustiva de casos. CC4. Asignar el nº de vértices de una cara cuadrangular del cuerpo resultante a cada una de las caras del cubo inicial. CC5. Identificar los vértices del cuerpo resultante con puntos de las aristas del cubo. CC6. Extrapolación de la acción sobre un vértice del cubo con integración. CC7. Extrapolación de la acción sobre una cara del cubo con integración. CC8. Comprobación exhaustiva de casos apoyada en un desarrollo plano del cubo.

Ítem 2 	CC1. Aplicación eje horizontal y/ó vertical. CC2. Aplicación ejes diagonales. CC3. Reproducción de P_3 . CC4. Comprobación exhaustiva de casos. CC5. Simetrizar sólo una de las piezas. CC6. Idea de estabilidad o regularidad visual. CC7. Simetrizar cada una de las piezas.
Ítem 3 	CC1. Justificación deductiva de la pieza blanca. CC2. Discriminación visual. CC3. Comprobación exhaustiva por encaje de las piezas. CC4. Descomposición mediante cortes de nivel topográfico. CC5. Representación mediante proyección ortogonal. CC6. Supresión sucesiva de las piezas visibles en el cuerpo. CC7. Asignación de números a cada uno de los cubos que forman el paralelepípedo. CC8. Análisis deductivo sobre la forma de la pieza blanca.

Ítem 4  	CC1. Composición exhaustiva de todos los desarrollos. CC2. Dibujar un cubo con la esquina cortada y realizar su desarrollo plano. CC3. Pertenencia de las caras cortadas a la misma “zona”. CC4. Reconocimiento visual de un triángulo. CC5. Fijar una de las bases del cubo como cara cortada.
Ítem 5 	CC1. Uso de procedimientos extractivos. CC2. Volumen como espacio creado (vacío). CC3. Descomposición ortogonal por capas. CC4. Descomposición del cubo en secciones de afuera-adentro. CC5. Traslación de túneles. CC6. Extracción de las piezas complementarias a los túneles.
Ítem 6  	CC1. Comprobación exhaustiva ostensiva con movimientos. CC2. Comprobación exhaustiva no ostensiva con movimientos. CC3. Comprobación exhaustiva ostensiva sin analizar movimientos. CC4. Descomposición de las piezas en unidades más pequeñas. CC5. Identificación de la simetría. CC6. Discriminación angular. CC7. Discriminación numérica.

	CC8. Discriminación visual. CC9. No identificar las piezas en alguna de las figuras.
Ítem 7 	CC1. Eje de rotación como eje de simetría. CC2. Representación gráfica sin apoyo ostensivo de los ejes dados. CC3. Marcar elipses para conferir efecto tridimensional. CC4. Rotaciones libres en el plano. CC5. Ausencia de representación gráfica. CC6. Representación de la sección plana frontal. CC7. Giro con traslación. CC8. Creación de un continuo de imágenes. CC9. Planta y alzado de los cuerpos resultantes.

6.2.2. OBJETIVO ESPECÍFICO 2

Objetivo específico 2: Determinar los principales conflictos manifestados por los sujetos ante la resolución de las tareas seleccionadas de VRE.

La resolución de las tareas y su posterior análisis nos permitió categorizar las respuestas de los estudiantes y, por tanto, también sus errores, dificultades y conflictos. Como se muestra en el Capítulo 5, dichos conflictos dependen directamente de la tarea, se encuentran en numerosas ocasiones asociados a determinadas configuraciones cognitivas y se ven reflejados en los errores más frecuentes.

El tipo de categorización utilizada para la clasificación de los errores en conceptuales, situacionales, procedimentales y combinados nos ha permitido organizarlos globalmente en la Tabla 6.2 y poder concluir que casi la mitad de los errores observados en la prueba se enmarcarían dentro de la categoría de errores conceptuales. Si relacionamos esta tabla con el índice de dificultad asociado a cada ítem, aquellos que resultaron “más fáciles” (ítem 3, ítem 4 e ítem 6) son aquellos en los que menos errores conceptuales se cometen. En el ítem 7 es en el que aparece el mayor porcentaje de errores conceptuales y procedimentales y el ítem 2 es el que reúne el mayor porcentaje de los situacionales. Atendiendo a la columna de los errores procedimentales, los valores más elevados se obtienen para los ítems 6 y 7 en los cuales el procedimiento está asociado a los movimientos de rotación/giro y simetría.

Tabla 6.2. Distribución global del tipo de errores

	Tipo de errores				
	Conceptuales	Situacionales	Procedimentales	Combinados	Total
Ítem 1	137	25	59	0	221
Ítem 2	157	110	0	11	278
Ítem 3	0	75	31	0	106
Ítem 4	2	0	38	0	40
Ítem 5	122	57	48	0	227
Ítem 6	57	32	93	0	182
Ítem 7	231	4	124	0	359
Porcentaje	49,96	21,44	27,81	0,78	100,00

En la siguiente tabla (Tabla 6.3) se recogen los errores que tienen un porcentaje significativo en cada una de las siete tareas analizadas.

Tabla 6.3. Errores más significativos en los siete ítems analizados

	Errores	Descripción	Porcentaje
Ítem 1	3C	No tener en cuenta que cada vértice del cuboctaedro es común a dos caras triangulares	24,25
	2P	Considerar que el corte sólo afecta a dos aristas	11,50
Ítem 2	2C	No considerar todos los ejes de simetría del cuadrado	27,25
	4S	Considerar cada parte como una figura individual	17
Ítem 3	2S	Las piezas dadas han de mantener su posición en el espacio	15,25
Ítem 4	1P	Dificultad al imaginar la recomposición del cubo a	9

		partir de sus desarrollos	
	2C	Duplicar las caras del cubo que aparecen en el dibujo	14
Ítem 5	3C	Atribuir cuatro caras al cubo	10,25
	2S	No considerar que los túneles se intersecan	10
Ítem 6	2P	Descartar la figura por no identificar las dos piezas	21
	1C	Considerar el eje de rotación como eje de simetría	28,25
Ítem 7	3C	Girar las figuras 180º en el espacio (simetría)	21,25
	4P	No considerar la distancia al eje en las dos figuras	14

Los principales conflictos que se han detectado están directamente asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales y la de los diagramas presentados. Dichas cuestiones son cuestiones fundamentales de la visualización como se vio en el Capítulo 1. Los conflictos relacionados con la representación plana se pueden observar, principalmente, en el ítem 3 (errores 2S, 3S) e ítem 5 (errores 2P, 3P, 4P, 2S). Los relacionados con la segunda cuestión se presentan principalmente en los ítems 2 (error 4S) y 7 (error 1C).

También aparecen conflictos entre la definición verbal de una figura y la imagen que se presenta de la misma. Por ejemplo, en el ítem 5, es probable que, si se solicita de forma explícita, todos los estudiantes sean capaces de dar una definición correcta del cubo (nº de caras, aristas y vértices). Sin embargo, al contar las unidades de volumen que tiene el cubo perforado, un porcentaje elevado de estudiantes multiplica el número de unidades de una cara por cuatro (identificación con un cuadrado) o bien por tres (que son las caras que se muestran en la representación plana dada).

Existe un porcentaje alto de estudiantes que tienen una estructura espacial de las figuras basada en un conjunto de caras no coordinadas, como se recoge en el análisis de los errores 3C del ítem 1 y 2C y 3C del ítem 5. En ese caso, realizan doble conteo sobre determinados elementos de las figuras (vértices, aristas, unidades). Esta visión también aparece como error 3C en el ítem 6, al no considerar una posible pérdida de lados o vértices totales al unir dos figuras de la forma que se pide en la tarea.

También se detectaron dificultades en los estudiantes en el momento de argumentar la respuesta dada. Se produce un conflicto a la hora de expresar verbalmente o gráficamente el proceso por el cual se llega a una solución concreta. En la Tabla 6.4 se muestra el porcentaje de sujetos que no son capaces de argumentar (verbal o gráficamente) la respuesta dada. Se observa que aquellos ítems con un porcentaje mayor de aciertos tienen un porcentaje más bajo en argumentación.

Tabla 6.4. Porcentaje de estudiantes que no argumentan su respuesta

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7
No argumentar la respuesta	12	7,25	15,25	14,5	3,25	14,25	6,5

6.2.3. OBJETIVO ESPECÍFICO 3

Objetivo específico 3: Conocer en qué medida es posible explicar los conflictos en la realización de tareas de VRE en términos de la complejidad ontosemiótica de dichas tareas.

En el Capítulo 5 se recogen los significados personales de los sujetos al realizar las tareas de VRE propuestas. En el marco del EOS, el análisis de estos significados requiere la construcción de los significados institucionales, los cuales actúan como referente a la hora de explicar los conflictos con los que se encuentran los estudiantes. Estos significados de referencia aparecen detallados en el Capítulo 4 y es el estudio de las cinco dualidades (extensivo-intensivo, unitario-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y personal-institucional) para cada una de las tareas el que proporciona una explicación desde el punto de vista ontosemiótico a dichos conflictos y a su naturaleza.

6.3. CONCLUSIONES SOBRE LAS HIPÓTESIS

A continuación analizaremos cada una de las hipótesis de este trabajo, entendidas estas en el sentido de expectativas sobre los resultados obtenidos.

6.3.1. HIPÓTESIS 1

Hipótesis 1: El uso del "enfoque ontosemiótico" sobre el conocimiento matemático, en particular los tipos de objetos y procesos propuestos, permitirá operativizar nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre VRE (habilidades, imágenes, esquemas, etc.) y aportará explicaciones complementarias de los conflictos de los sujetos al resolver tareas de VRE.

Como se ha visto en el Capítulo 4, el análisis a priori de las tareas, realizado en términos de configuración epistémica, nos permitió formular algunas hipótesis específicas para cada una sobre conflictos de significado que potencialmente podrían manifestar los estudiantes. En el Capítulo 5 se describen todas las configuraciones cognitivas que se encontraron para cada una de dichas tareas, y es ahí donde se ponen de manifiesto todos los conflictos de los sujetos, permitiéndonos apoyar las hipótesis formuladas con los resultados obtenidos.

A continuación se describirán las hipótesis formuladas específicamente para cada uno de los ítems.

6.3.1.1. Ítem 1: cubo truncado

Hipótesis $H1_{It1}$: La descomposición del cubo como un sistema formado por 12 aristas dispuestas de una forma determinada en la cual la acción a realizar va a producir un vértice en cada una de ellas no es fácil de detectar por los estudiantes de magisterio.

La hipótesis supone que la mayoría de los estudiantes se centrarán en los vértices, como opción prioritaria, y en las caras del cubo, como segunda opción, al considerarlos como elementos con los que están más habituados a trabajar. Los resultados obtenidos corroboran esta hipótesis ya que sólo el 6% siguen la configuración CC5.

Hipótesis $H2_{It1}$: La relación entre lo que mide la arista y la distancia a la que se hace el corte va a quedar en segundo plano, lo que va a dificultar que algunos de los estudiantes lleguen a la solución correcta.

La situación descrita en esta hipótesis corresponde a los errores 2S, 2C y 3C. En el caso de los alumnos que cometen el error 2S, expresan claramente que no identifican los nuevos vértices con los puntos medios de cada arista. Aquellos alumnos que siguen las configuraciones CC1 y CC2 se quedan con la imagen del vértice cortado y lo multiplican por el número de vértices del cubo (nº de caras). No establecen la relación existente entre el corte hecho y la distancia a la que se hace, sino que consideran exclusivamente la acción realizada sobre los vértices con independencia de lo demás. El porcentaje de sujetos en los que se dio esta situación asciende al 33,75%.

Hipótesis $H3_{It1}$: la práctica poco habitual de este tipo de actividades de truncamiento puede ser un factor explicativo de las dificultades de los estudiantes al resolver esta tarea.

Los estudiantes que marcan de forma ostensiva todos los cortes y los vértices sobre la representación dada del cubo (configuración CC3) obtienen una representación ostensiva, más o menos clara, del sólido resultante (10%). Todos los demás realizan operaciones aritmético-lógicas para obtener la solución sin ningún tipo de dibujo del nuevo sólido (tampoco lo exigía la tarea).

Por otro lado, esta hipótesis también se plasma en aquellos sujetos que cometen el error 2P (11,50%). Al centrar la acción sobre una cara, la imagen ostensiva que se devuelve al realizar el corte en los cuatro vértices del cubo es la de otro cuadrado lo que conduce a formar la imagen (ostensiva o no ostensiva) de un nuevo cubo pero más pequeño.

6.3.1.2. Ítem 2: simetrías en el plano

Hipótesis $H1_{It2}$: Algunos sujetos pueden tener dificultades en hacer esta interpretación de la noción de figura. La idea de figura como un todo unitario puede llevar a los estudiantes a interpretarla como una figura conexa.

Esta hipótesis nos conduce hacia el error 3S (añadir cuadraditos negros para obtener una figura conexa) (2,25%) y hacia el error 4S (17%), al considerar que si ha de ser conexa, en realidad el enunciado nos da tres figuras sobre las que actuar y no una única figura.

Hipótesis $H2_{It2}$: La representación gráfica de la figura a completar provocará conflictos en los estudiantes al considerar las partes de la figura como partes totalmente independientes.

Esta hipótesis se ve plasmada en el porcentaje atribuido al error 4S (considerar cada parte negra como una figura individual) cometido por un 17% de la muestra, que incluye aquellas situaciones en las que o bien se realiza la simetría en cada una de las tres partes o bien se realiza sólo en una de ellas.

Hipótesis $H3_{It2}$: La expresión "tenga por lo menos un eje de simetría" puede producir un conflicto semiótico al interpretarla como que "tenga por lo menos uno".

Hay un 30% de estudiantes que no reconocen o no consideran todos los ejes de simetría de la red cuadrangular (errores 2C y 1V). En algunos casos los estudiantes indican que han elegido un eje y con esa elección han sombreado el menor número de cuadraditos. En otros casos se necesitaría de otro tipo de instrumento (entrevista) para asegurar esta hipótesis.

6.3.1.3. Ítem3: ortoedro encajable

Hipótesis $H1_{It3}$: No establecer las relaciones entre las piezas formando parte de un todo unitario llevará a los estudiantes a elecciones erróneas.

Los errores asociados a esta afirmación son: 1P, 2P, 3P, 2S y 3S, que suponen el 23,75% del total. Además, aquellos que no argumentan pero elijen una opción incorrecta no establecen las relaciones necesarias entre las diversas componentes del sistema. Es necesario conjugar los cubitos unidad que forman cada una de las diferentes piezas con los de las demás y a su vez todas las piezas con el ortoedro final.

Hipótesis $H2_{It3}$: No explicitar en el enunciado que las piezas que se dan como opciones que se pueden girar puede crear conflictos a los estudiantes y aumentar la dificultad de la tarea.

El 18,50 % de los estudiantes interpretaron que las piezas tenían que aparecer formando el ortoedro en la misma posición que se daban en el enunciado (corresponde a los errores: 2S, 3S, 1P). Dentro del grupo de los que no argumentaron nada y respondieron incorrectamente, aquellos que optaron por la solución representada por la pieza E, es de suponer que lo hicieron a causa de que esta opción fue elegida tras identificación visual por la posición presentada.

Hipótesis $H3_{It3}$: La resolución de la tarea a través de métodos no ostensivos dificultará la obtención de la solución correcta.

Esta hipótesis sostiene que sin un apoyo gráfico, ostensivo, sólo con la creación y manipulación de las imágenes mentales creadas será difícil llegar a la solución. Sobre todo si la manipulación de dichas imágenes no forma parte de la práctica habitual de los alumnos.

En este caso se observa que las configuraciones que se apoyan en representaciones ostensivas como la representación por niveles o la asignación de números a cada uno de los cubos que forman el paralelepípedo (CC4 y CC7, respectivamente) obtienen un 100% de efectividad. La configuración CC6, en la que se van extrayendo las piezas de forma sucesiva y dibujando el sólido resultante tras cada uno de los pasos del proceso (configuración CC6) tiene un 90,91% de efectividad. Llama la atención que la representación ortogonal sólo alcance un 84,62% y no el 100%. Todas las demás configuraciones tienen porcentajes más bajos, sobre todo la CC2 (basada en la discriminación visual) que sólo alcanza el 9,23% de efectividad.

6.3.1.4. Ítem 4: desarrollo del cubo sin vértice

Hipótesis $H1_{It4}$*: Dadas las características del tipo de sólido (un cubo) y el desarrollo plano elegido, la tarea va a resultar fácil a los estudiantes de magisterio.*

Esta hipótesis es corroborada por el porcentaje de aciertos (76%), que es el más alto de todas las tareas presentadas y el escaso número de estudiantes que no contestan al ítem (9,25%).

Los diferentes objetos que aparecen en el planteamiento y en el proceso de resolución de la tarea, cubo, vértice, desarrollo plano del cubo y corte, son familiares para los alumnos. No se presentaron conflictos entre expresión y contenido.

6.3.1.5. Ítem 5: cubo perforado

Hipótesis $H1_{It5}$*: Las relaciones que se establecen entre las diferentes partes del sistema y el sistema son determinantes para la resolución de la tarea.*

En este caso se presentan distintos errores implicados en esta afirmación. Por un lado, los errores situacionales 2S y 4S, relacionados con el hecho de no considerar que los túneles se intersecan y con el hecho de contar sólo las tres caras que se muestran en la representación plana dada en el enunciado del sólido. Por otro lado están los errores procedimentales 2P, 3P y 4P, los cuales establecen el número de intersecciones que se han tenido en cuenta. Por último, el error conceptual 2C, en el cual se extrapola la acción realizada en una cara a las seis del cubo y el error 3C que realiza el mismo proceso, pero sólo para cuatro por considerar que son las que tiene el cubo. En el caso de estos últimos errores, no se establecen las relaciones entre el sistema al producirse el doble conteo en los cubos comunes a dos caras consecutivas (falta de coordinación entre las caras). Todos estos errores contribuyen a sustentar esta hipótesis pues corresponden a un 40,5% de los estudiantes.

Hipótesis $H2_{It5}$: *La expresión del problema mediante un dibujo en perspectiva, sin señalar las intersecciones interiores ni las salidas ocultas de los túneles, es otro factor de dificultad potencial.*

La expresión “los túneles atraviesan el cubo”, contenida en el enunciado de la tarea, no es interpretada adecuadamente por el 24,50% de los estudiantes. Las limitaciones de la representación plana de un objeto tridimensional, provocan malentendidos en el contenido que los estudiantes atribuyen a dicha expresión, lo que supone la existencia de un conflicto semiótico de relevancia porcentual, tal y como se postula en esta hipótesis.

Hipótesis $H3_{It5}$: El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema.

Las dificultades y errores asociados a la justificación verbal o gráfica del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles (1P, 2P, 3P, 4P, 2S), confirman esta hipótesis (22%). Las intersecciones de los túneles tampoco están consideradas en la configuración CC2, que tiene asociado un 24,5 % de errores y que se sumaría al porcentaje anterior.
En este caso se podría hacer una distinción entre:

- Aquellos que no contemplan que los túneles se intersequen aunque sí atraviesan todo el cubo, de lado a lado. Corresponderían al error 2S.
- Aquellos alumnos que consideran que los túneles se intersecan pero se confunden al hacer el recuento, o consideran sólo algunas de las intersecciones que se producen pero no todas (errores 1P, 2P, 3P y 4P).
- Por último, los que consideran que los túneles tienen entrada y salida pero no atraviesan el cubo. Estarían contemplados aquí los errores 2C, 3C, 3S y 4S.

Hipótesis $H4_{It5}$: El significado personal puede tener limitaciones sobre las nociones de cubo, de volumen y unidad de medida del volumen.

Los datos obtenidos confirman que un elevado porcentaje de estudiantes ha tenido dificultades con las nociones de cubo, volumen (confusión entre volumen y superficie) y unidad de medida del volumen, siendo previsible que los sujetos manifiesten errores en sus respuestas a esta tarea. Los errores 1C, 3C y 4S están relacionados con dificultades en la comprensión de la noción del cubo y de sus elementos. Además, los errores 2C, 3C y 4S suponen que la noción de volumen no es la institucional, al considerar lo que ocurre en una cara y multiplicarlo por seis, cuatro o tres caras, respectivamente. En el caso del error 4C, este corresponde a la aplicación incorrecta de la multiplicación asociada al concepto de medida. El porcentaje atribuido al conjunto de errores citados es del 30,75%.

Algunos estudiantes utilizan el "cubito" como unidad de medida de volumen considerada como magnitud unidimensional, lo que les lleva a no interpretar correctamente lo que ocurre en las intersecciones de las caras adyacentes. Esta dificultad pone de manifiesto "la contradicción entre la concepción unidimensional del volumen, en la que no se puede contar dos veces una misma unidad y la tridimensional en la cual el volumen es producto de tres dimensiones" (Del Olmo et al., 1989, p. 113).

También se identifica claramente una aplicación incorrecta de la multiplicación como combinación asociada al concepto de medida. En el caso de no tener en cuenta las intersecciones de los túneles, no se identifica el volumen como una magnitud sumativa [$med(A+B) = med(A) + med(B)$].

6.3.1.6. Ítem 6: componer formas con dos piezas iguales

Hipótesis $H1_{It6}$: La descomposición de las piezas en otras más pequeñas actuando de manera independiente y no como un todo pueden conducir a soluciones erróneas.

La configuración CC4 supone la descomposición ostensiva de las piezas dadas en otras más pequeñas. Esas nuevas piezas son cuadrados y triángulos isósceles rectángulos que aportan información que facilita la visualización de la descomposición de las figuras. En el Capítulo 5 se muestran dos descomposiciones diferentes que surgen del análisis de las respuestas de los alumnos. La efectividad de esta configuración sólo alcanza el 28,57 % debido a que la recomposición de las figuras se realiza omitiendo el paso de una reconfiguración anterior que proporciona las dos piezas iniciales dadas en el enunciado. Los movimientos se aplican a las subpiezas y no a las piezas, sin tener en cuenta una característica determinante para la resolución de la tarea: que unas son simétricas y las otras no.

Hipótesis $H2_{It6}$: La estructura del enunciado (frase, punto, frase interrogativa) puede hacer que el sujeto centre su atención el verbo "formar" y, en consecuencia, tener dificultades para completar la tarea.

El análisis de las respuestas de los estudiantes conduce a la conclusión de que un 33% no considera la parte del enunciado que impone una restricción al movimiento de las piezas. Así, se tiene que ese grupo incluye a todos aquellos estudiantes que resuelven la tarea y que descartan una figura por no encontrar las dos piezas (error 2P); a los que encuentran la descomposición de todas las figuras en las dos piezas y dan como respuesta que todas ellas se pueden construir (error 2S) y, por último, a los que descartan la figura convexa por su disparidad con las demás (error 1C). Todos ellos se centran únicamente en la acción de componer las figuras con las dos piezas o en encontrar las dos piezas en las figuras dadas.

Hipótesis $H3_{It6}$: El carácter no ostensivo de la formación de las figuras con las dos piezas puede crear errores y dificultades a los estudiantes.

Una dificultad de las citadas en esta hipótesis se pone de manifiesto en el hecho de que el 21% (2P) de los estudiantes no fueron capaces de identificar las dos piezas en, al menos, una figura. Relacionado con este hecho tenemos el que el 4% (1C) de los alumnos descarten la única figura que es convexa por su disparidad con el resto, donde se perciben las dos piezas visualmente de una forma más clara. También se deben incluir aquellos casos (2,25%) en los que se realiza una descomposición en las que las partes no son congruentes con las piezas dadas (1P). En total, tenemos que a un 27,25% de los estudiantes el hecho de no hacer ostensivas las particiones les condujo a los errores y dificultades mencionados.

Hipótesis $H4_{It6}$: La realización de movimientos (giros, traslaciones, simetrías) de forma no ostensiva aplicados a las piezas supone una dificultad considerable para nuestros alumnos.

Así como el recubrimiento o la partición de las figuras se pueden hacer fácilmente ostensivos, los movimientos de las piezas, al no disponer de ellas físicamente, son plenamente mentales. Las dos configuraciones que contemplan la realización de movimientos (CC1 y CC2) tienen una efectividad del 74,29% y del 86,42%, respectivamente.

Hipótesis $H5_{It6}$: Podemos conjeturar que la acción "levantar de la mesa" no será asociada a una simetría axial lo cual podrá ser una explicación de la dificultad de la tarea.

El movimiento que no se permite ("levantar de la mesa") es reconocido como una simetría sólo por el 3% de los estudiantes.

6.3.1.7. Ítem7: generación de cuerpos mediante rotaciones en el espacio

Hipótesis $H1_{It7}$: No tener en cuenta el carácter sistémico de la realización de la tarea (figura, eje y distancia al eje) conducirá a soluciones erróneas.

Los resultados obtenidos muestran que un porcentaje elevado de alumnos, el 25% del total, no consideraron la distancia de las figuras al eje. Algunos estudiantes no la consideraron en el caso de la figura A, otros en el caso de la figura B y el 14% en ambos. Como consecuencia, y como se ha visto en el Capítulo 5, las figuras tridimensionales más frecuentes fueron el cono para el caso de la figura A y la esfera para el caso de la figura B.

Hipótesis $H2_{It7}$: La representación dada del objeto y del eje en el enunciado de la tarea puede inducir al sujeto a interpretar que la tarea requiere simplemente dibujar la figura simétrica.

El poder de la imagen gráfica supera al lenguaje verbal o escrito en el sentido de que la representación ostensiva que se da de la figura y del eje induce a un 49,50 % de estudiantes a contemplar dicha representación como la representación estándar de una simetría, donde dada una figura y un eje se trata de volcar la figura al otro lado del eje.

Hipótesis $H3_{It7}$: La representación plana de los cuerpos generados o su descripción verbal será una tarea difícil para los estudiantes.

Nos centramos sólo en aquellos sujetos que consideraron la solución como un cuerpo tridimensional, que suponen un 30% del total. La representación ostensiva de los cuerpos obtenidos puede ser verbal, gráfica o mixta. En el caso de la representación gráfica se obtienen dibujos en perspectiva (CC2, CC3), representaciones ortogonales (planta, alzado y perfil) (CC9), representación por niveles o cortes topográficos (CC6) y la representación a través de un continuo de imágenes (CC8). Verbalmente no hay ninguna respuesta que determine claramente los sólidos obtenidos y en el caso de aquellos estudiantes que realizaron una representación gráfica o mixta de un cuerpo tridimensional, sólo el $13,\widehat{33}$ % proporcionaron una solución clara.

Hipótesis $H4_{It7}$: Los significados personales no concuerdan con el institucional, en el que las figuras que se generan son sólidos de revolución y que por tanto son el producto de hacer girar una curva alrededor de un eje, manteniendo todas las propiedades que definen un giro (equidistancia al eje de giro, etc.)

Está hipótesis es corroborada por varios resultados que suponen un 57,75% del total. El primero es el que proporciona una idea de simetría en sus dos vertientes (aplicando las propiedades que definen el movimiento matemáticamente y la simetría vista como un movimiento que sale del plano y sitúa la figura al otro lado del eje girada 180º) y el segundo es el que se deriva de girar la figura dada en el plano. En cualquiera de las dos situaciones, la figura que se obtiene es una figura plana.

6.3.2. HIPÓTESIS 2

Hipótesis 2: Encontraremos una variedad de configuraciones cognitivas de los estudiantes mediante las cuales se pueden describir niveles de habilidad sobre VRE.

Atendiendo a la variedad de configuraciones cognitivas es posible describir niveles de habilidad/competencia sobre VRE. Estos niveles están sujetos a ciertas condiciones que dependen directamente de la tarea que se está realizando. Por ejemplo, el nivel 1 en el ítem 1 no tiene por qué corresponderse con el nivel 1 en la tarea 2; sino que se refiere a que son los niveles más bajos encontrados. En cada nivel puede haber varias configuraciones y en cada configuración las habilidades de visualización (Del Grande, 1987) implicadas pueden tener distinto peso. Estos niveles se intentarán apoyar en las componentes de la VRE puestas en juego en cada ítem que se han descrito en el capítulo 3; pero contemplando la componente específica propia de cada una de las configuraciones.

6.3.2.1. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del ítem 1

- Nivel 1: CC2. Está basada en características visuales que se centran parcialmente en lo que ocurre en una cara. La imagen que aparece conduce al prototipo de imagen de la cara de un cubo (ortoedro) visto desde cualquiera de las posiciones ortogonales. No se pone en juego la habilidad de relaciones espaciales que es la que establece la relación entre la inclinación del plano y las aristas del cubo que corta.
- Nivel 2: CC1 y CC4. Se extrapola lo que ocurre en los vértices (caras) a todos los demás elementos del cubo (vértices o caras), con lo cual se establece una relación entre la acción sobre uno de los elementos del cubo y el resto de elementos del mismo tipo. Sin embargo no se produce una integración del efecto que produce dicha acción sobre dos elementos (vértices o caras) contiguos. La estructura espacial de la figura está basada en un conjunto de caras no coordinadas como se ha visto en el capítulo 5.
- Nivel 3: CC3 y CC8. Requieren la identificación visual de los elementos (vértices) de la nueva figura aislándolos de los elementos del cubo inicial.

Realizan de forma ostensiva toda la acción lo que les proporciona, en el caso de la configuración CC3, una imagen del sólido resultante.

- Nivel 4: CC6 y CC7. En todas ellas se efectúa la acción sobre un tipo de elemento del cubo (vértice, cara, arista) pero teniendo en cuenta las relaciones espaciales que se establecen al realizar los cortes y al realizar la extrapolación a todos los demás elementos.
- Nivel 5: CC5. A diferencia del nivel anterior aquí se establece una relación biunívoca: cada punto de corte sobre una arista del cubo conduce a un vértice del nuevo sólido. Por tanto, hay una integración total de la estructura del cubo y la acción realizada.

En cuanto a la efectividad, las configuraciones más efectivas fueron la CC7 seguida de la configuración CC3.

6.3.2.2. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 2

- Nivel 1: CC6. Se basa en la asociación de igualdad de cantidad de magnitud (área) a ambos lados de un eje. No se tienen en cuenta las relaciones de posición de los diferentes elementos con respecto al eje para formar una figura simétrica.
- Nivel 2: CC3, CC5, CC7. La interpretación figural del enunciado conduce a considerar varias partes independientes de la figura a simetrizar. La habilidad de identificación visual no está bien desarrollada al no identificar esas partes como partes de un todo único aisladas de la retícula cuadrada.
- Nivel 3: CC1. Se identifica la figura que debe ser simetrizada considerando la retícula cuadrangular en la que está inscrita. La identificación visual de la retícula permitirá disponer de los ejes de simetría del cuadrado para construir la figura simétrica. Sin embargo, en este nivel, aún no se reconocen los ejes de simetría diagonales del cuadrado, atendiendo únicamente a posiciones estándar de ejes en situación horizontal y vertical.
- Nivel 4: CC4, CC2. En este nivel ya se identifican los cuatro ejes de la retícula cuadrangular aunque no se muestre una representación gráfica de todos ellos. El reconocimiento de las relaciones espaciales y de posición permitirá establecer los cuadraditos que se deben sombrear para obtener una figura

simétrica atendiendo a los diferentes ejes y manteniendo, por tanto, la equidistancia al eje y la perpendicularidad al mismo.

No se obtiene un 100% de efectividad en ninguna de las configuraciones debido a errores relacionados con una interpretación reducida o deformada de la simetría y en otros casos debido a no considerar el número mínimo necesario para obtener la figura simétrica.

6.3.2.3. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 3

- Nivel 1: CC2. No se tiene en cuenta los lugares que ocupan los demás cubitos. Por tanto, la habilidad de conservación de las posiciones espaciales no está desarrollada ni tampoco la de rotación mental. Se basa en apreciaciones de tipo visual, además, no se considera el paralelepípedo como un todo, al tener en cuenta sólo la acción sobre la cara frontal y no considerar acciones sobre las demás caras.
- Nivel 2: CC3. Aunque sí se utiliza el reconocimiento de las relaciones y posiciones espaciales, no se aplica el mismo para poder descartar algunas de las piezas sino que se utiliza para comprobar con cada una de las piezas de forma exhaustiva si se corresponden con la pieza blanca o no.
- Nivel 3: CC8. El reconocimiento de las posiciones espaciales permite eliminar toda la planta superior. La atención se pone entonces en piezas que se puedan colocar de manera que tengan una sola altura (reconocimiento de las relaciones espaciales).
- Nivel 4: CC4, CC5, CC6, CC7, CC1. Las configuraciones CC4 y CC5 requieren del conocimiento de habilidades de conversión de representaciones planas de objetos tridimensionales. Tanto en un caso como en otro, el reconocimiento de las posiciones de los cubitos de las diferentes piezas permite obtener las posiciones de los cubitos de la pieza que falta. Después se requiere la coordinación e integración de los mismos para conformar la pieza blanca.

En la configuración CC6 se requiere un constante reconocimiento de la posición y relación espacial de las piezas con el paralelepípedo y con las demás piezas. Ese reconocimiento se hace pieza a pieza y no cubito a cubito como en las anteriores. No hay que deducir la pieza buscada porque "aparece".

La configuración CC7 establece una relación biunívoca entre los números del 1 al 16 que corresponden a los cubitos que forman las distintas piezas y las posiciones que ocupan los cubitos en una retícula tridimensional. La configuración CC1 no necesita establecer esa relación porque lo hace directamente.

En cualquiera de las configuraciones anteriores, el reconocimiento de las relaciones espaciales permitirá deducir que la pieza buscada está en otra posición.

La efectividad en todas las configuraciones de los niveles 3 y 4 supera el 75%, alcanzando el 100% en las configuraciones CC7 y CC4.

6.3.2.4. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 4

- Nivel 1: CC1. No hay ningún tipo de discriminación de los desarrollos presentados. La habilidad de discriminación visual permite comparar la imagen mental de un cubo con un vértice cortado (habilidad de memoria visual) con las imágenes mentales que se van obteniendo a medida que se montan los diferentes desarrollos planos.

- Nivel 2: CC2 y CC5. Exige ciertas imposiciones de carácter visual o conceptual. Las imágenes conceptuales que se crean son deficientes y por tanto, sólo se acepta que coincidan con las imágenes prototípicas que los sujetos tienen.

- Nivel 3: CC3 y CC4. Antes de aplicar la habilidad de discriminación visual, se descartan ciertos desarrollos planos al no cumplir ciertas propiedades conceptuales o visuales que se imponen. Aunque debemos señalar que estas configuraciones cognitivas no están formada por una gran variedad de ejemplos.

- Nivel 4: En la muestra analizada no se ha encontrado una configuración de este nivel. Esta se correspondería con el modelo epistémico de referencia visto en el Capítulo 4 y que se basa en la discriminación por el corte.

Se observa que los alumnos no están habituados a trabajar con desarrollos planos del cubo diferentes al formato 1-4-1 (Mesquita, 1992, p. 29) y menos aún con desarrollos de figuras diferentes a un cubo.

La efectividad de todas las configuraciones fue elevada obteniéndose un 100% para las CC3, CC4 y CC5 a pesar de estar basadas en propiedades que no son ni suficientes ni necesarias.

6.3.2.5. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 5

- Nivel 1: CC2. Sólo se tiene en cuenta la estructura externa de la disposición 3D. No hay coordinación de las distintas caras y perspectivas. No se considera la disposición 3D como un conjunto coordinado de caras.
- Nivel 2: CC4 y CC5. En la configuración CC5, la disposición dada no permite crear imágenes adecuadas para el conteo y se debe realizar una reestructuración en la posición de los elementos del cubo (cubitos) para poder resolver la tarea. El reconocimiento de las relaciones y posiciones espaciales se aplica varias veces, siendo la primera vez el momento de recolocar todos los elementos que conforman los túneles. En el caso de la configuración CC4 se deben coordinar, además, diferentes perspectivas para considerar las diferentes placas que se van sacando. Siguiendo a Battista (2007, p. 898), los modelos mentales creados permiten obtener respuestas correctas, pero no son generalizables y son inadecuados para estructuras matriciales de gran tamaño.
- Nivel 3: CC3. Las habilidades de reconocimiento de las posiciones y relaciones espaciales se ponen de manifiesto para poder realizar las representaciones planas de módulos de cubos. La estructuración de capas o filas por columnas permite localizar las unidades de forma precisa.
- Nivel 4: CC1 y CC6. En la configuración CC6, a diferencia de las demás configuraciones, se pone en juego la habilidad de identificación visual que permite aislar la imagen del cubo perforado de la imagen del cubo con los túneles. El reconocimiento de las posiciones y relaciones espaciales permite estructurar ese cubo perforado en varias piezas que facilitan después el conteo.

En la configuración CC1 también la habilidad de identificación visual se pone en juego para aislar el túnel del cubo completo. Además, se deben coordinar diferentes perspectivas para crear la imagen mental de las intersecciones de los túneles.

El mayor porcentaje de efectividad se obtiene para la configuración CC3 que, aún así, no supera el 63%.

6.3.2.6. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 6

- Nivel 1: CC6, CC7 y CC8. El punto de atención está en las características visuales o numéricas de las figuras. La habilidad de conservación de la percepción no está desarrollada al entender que cuando se combinan las dos piezas no se deberían perder lados o se debería mantener el número de ángulos rectos. Identificar las dos piezas en las figuras no es esencial (habilidad de identificación visual). Por otra parte, la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales no se pone en juego.

- Nivel 2: CC9. La habilidad de identificación visual no está del todo desarrollada al encontrar alguna figura en la que no se ve la partición. Este hecho conduce a no poner en juego la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales para analizar, en cada figura, si una pieza está girada o es simétrica con respecto a la otra.
- Nivel 3: CC3. La habilidad de identificación visual está totalmente desarrollada. En este caso, el objetivo se centra en identificar las dos piezas en todas las figuras y una vez obtenido ese objetivo no se pone en juego ninguna habilidad más.
- Nivel 4: CC4. La identificación visual de las piezas no resulta sencilla por ello se subdividen en otras piezas más fáciles de identificar (más cotidianas). Esta subpartición de las piezas dificultará el reconocimiento de las relaciones espaciales al no tener en cuenta las características geométricas propias de las piezas originales.
- Nivel 5: CC1, CC2 y CC5. En este nivel, se ponen en juego todas las habilidades necesarias. Se identifican las piezas, se deslizan, giran y voltean para formar las diferentes figuras. Aunque no se mencionen explícitamente las propiedades matemáticas utilizadas (salvo en la configuración CC5) su razonamiento es coherente con ellas.

La única configuración que alcanza el 100% de efectividad es la CC5, seguida de la CC2 (86,42%) y de la CC1 (74,29%).

6.3.2.7. Niveles de habilidad en VRE de las configuraciones del Ítem 7

- Nivel 1: CC1, CC4, CC7. La atención se centra en asociaciones visuales con prototipos o bien asociaciones verbales de una palabra con su significado más habitual. Las habilidades de conservación de la percepción y de las relaciones espaciales se aplican al plano y no al espacio y no siempre correctamente.

- Nivel 2: CC5. Se ponen en funcionamiento las habilidades de rotación mental, reconocimiento de posiciones en el espacio y conservación de las relaciones espaciales; pero no se utilizan convenciones de representaciones planas de objetos tridimensionales para representar gráficamente dichos cuerpos. La dificultad se centra en la comunicación gráfica de la información pero las imágenes mentales creadas pueden ser correctas.
- Nivel 3: CC6. No se utilizan convenciones para representar objetos tridimensionales. La representación de un objeto tridimensional se presenta únicamente por una de las vistas ortogonales. El tipo de representación realizado necesita de apoyo verbal para comunicar la estructura completa del cuerpo generado.
- Nivel 4: CC2 y CC8. Se utilizan convenciones para el dibujo de objetos tridimensionales; sin embargo, no se indican huecos ni otras características internas de las figuras, lo que no da una información completa de las imágenes creadas. No se consigue dotar plenamente a los cuerpos de profundidad y por ello en la mayor parte de los casos, el tipo de representación es mixto, necesitando de un apoyo verbal para comunicar la estructura del cuerpo generado.
- Nivel 5: CC3 y CC9. Se ponen de manifiesto las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y la de conservación de las relaciones espaciales al implementar las convenciones utilizadas para representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales. La comunicación de la información sobre las imágenes mentales creadas (habilidad de rotación mental) es bastante clara.

La única configuración, asociada a este ítem, que tiene un porcentaje representativo de efectividad es la CC9 con un 80%. La CC3 no alcanza el 40%.

6.3.3. HIPÓTESIS 3

Hipótesis 3: Los porcentajes de estudiantes que manifiestan configuraciones cognitivas de alto nivel con relación a la habilidad VRE serán significativamente inferiores a los que manifiestan configuraciones de bajo nivel.

Procederemos a separar las configuraciones para cada ítem en aquellas que consideramos de alto nivel y que se corresponden con los niveles superiores descritos en los párrafos anteriores y aquellas que corresponden a un nivel bajo. En algunas de las tareas encontraremos además un grupo de configuraciones de nivel intermedio, entendiendo que son aquellas que a pesar de no aplicar correctamente las propiedades y no tener las habilidades requeridas muy desarrolladas pueden proporcionar una respuesta correcta. Esta clasificación está recogida en su totalidad en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5. Niveles de las configuraciones

	Configuraciones	Porcentaje
Ítem 1	Nivel alto: CC6 y CC7 // CC5	10,25
	Nivel intermedio: CC3 y CC8	11,50
	Nivel bajo: CC2 // CC1 y CC4	45
Ítem 2	Nivel alto: CC2 y CC4	18,75
	Nivel bajo: CC6 // CC3, CC5 y CC7 // CC1	47,25
Ítem 3	Nivel alto: CC8 // CC1, CC4, CC5, CC6 y CC7	34,25
	Nivel bajo: CC2 // CC3	23,75
Ítem 4	Nivel alto: CC3 y CC4	8,5
	Nivel intermedio: CC2 y CC5	14
	Nivel bajo: CC1	52,50
Ítem 5	Nivel alto: CC3 // CC1 y CC6	49,25
	Nivel intermedio: CC4 y CC5	0,75
	Nivel bajo: CC2	24,25
Ítem 6	Nivel alto: CC1, CC2 y CC5	40,75
	Nivel intermedio: CC4	3,50
	Nivel bajo: CC4 // CC6, CC7 y CC8 // CC9 // CC3	38,50
Ítem 7	Nivel alto: CC3 y CC9	6,5
	Nivel intermedio: CC6, CC2 y CC8	24,25
	Nivel bajo: CC1, CC4 y CC7 // CC5	61,25

Se observa que en los ítems 3, 5 y 6 las configuraciones de alto nivel superan en porcentaje a las de bajo nivel. Eso pone de manifiesto que, contrariamente a la hipótesis formulada, los estudiantes, en dichas tareas, tienen configuraciones dónde movilizan variedad y cantidad de objetos visuales (propiedades visuales, imágenes mentales, etc.). Esto no quiere decir que las acciones sobre esos elementos se hagan siempre de manera correcta, como se puede comprobar si se analiza la efectividad de dichas configuraciones. Probablemente esto se deba a que los estudiantes no saben cómo trabajar con esos objetos y procesos visuales o bien que no están habituados a hacerlo. Este hecho puede deberse también a las características de la tarea, en particular a la acción requerida que en el caso de los ítems 3 y 6 es de componer y descomponer en partes y en el caso del ítem 5 es de conteo de partes, asociado a conteo de unidades de medida de volumen.

En los demás ítems la hipótesis se confirma, observándose que la diferencia de porcentaje entre las de bajo y alto nivel es muy significativa.

6.3.4. HIPÓTESIS 4

Hipótesis 4: La alta incidencia de las configuraciones cognitivas de bajo nivel se puede explicar en términos de la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de las tareas de VRE incluidas en el instrumento de evaluación.

En el Capítulo 3 se describen los objetos y procesos implicados en cada uno de los ítems del cuestionario desde el punto de vista institucional. La complejidad de dichos elementos o su práctica poco habitual puede dar una explicación de la alta incidencia de configuraciones de bajo nivel.

Vamos a agrupar los cuatro ítems en los que se da una alta incidencia de las configuraciones de bajo nivel en dos subgrupos, atendiendo a los objetos y procesos implicados. Por un lado tendremos los ítems 1 y 4 y por otro los ítems 2 y 7.

En la búsqueda de algún tipo de característica común o diferenciadora de cada pareja, se observa que la respuesta solicitada en los ítems 2 y 7 supone el dibujo de una figura y que además los conceptos implicados se refieren a movimientos en el plano o en el espacio: eje de rotación/simetría, puntos fijos y las propiedades equidistancia al eje y perpendicularidad entre el eje y el segmento que une un punto con su transformado. En el ítem 7 aparece además el concepto de trayectoria, hueco y agujero. En el caso de los ítems 1 y 4 la conexión para estos resultados se establece en los conceptos:

intersección de planos, sólidos truncados y ángulos poliedros cuya presencia no es habitual en la instrucción recibida por los sujetos participantes en el estudio.

En cuanto a la acción requerida, el ítem 1 implica contar elementos pero no sobre la figura dada sino sobre otra que no es conocida. Para obtener esa otra figura es necesario realizar previamente otra acción: cortar los vértices.

En el ítem 2 se requiere realizar una simetría. Se debe construir una figura simétrica utilizando los cuadraditos sombreados. Una de las dificultades que aparecen es que la figura no es conexa ni es congruente con una figura conocida.

En el ítem 4 la acción es de plegar. En esta tarea aunque la figura es conocida (cubo) y su desarrollo plano también (desarrollo estándar en forma de cruz) se añade un elemento nuevo consistente en que el cubo tiene un vértice cortado.

En el caso del ítem 7 la acción requerida es rotar las figuras dadas para generar sólidos de revolución. Las figuras planas dadas son conocidas pero están a cierta distancia del eje, situación no habitual en las actividades escolares.

6.4. APORTACIONES Y LIMITACIONES DEL TRABAJO

Gardner (1983, p. 8) considera que la capacidad espacial es esencial para el pensamiento científico, sostiene que es una de las "competencias intelectuales humanas relativamente autónomas". La mayoría de las ocupaciones técnicas y científicas (arquitectos, ingenieros, pintores, físicos, químicos, informáticos, matemáticos, etc.) requieren personas con un percentil por encima del 90% en capacidad espacial (Clements y Battista, 1992, p. 442). En el caso de las matemáticas, Hadamard (1945) argumenta que gran parte del pensamiento que se requiere en las matemáticas elevadas es de naturaleza espacial y como él muchos otros matemáticos y educadores matemáticos creen que esta capacidad junto con la imaginería visual juega un papel importante en el pensamiento matemático.

Según Cunningham (1991, p. 70), la restauración del lado visual e intuitivo de las matemáticas, llevada a cabo desde hace unas décadas, abre nuevas posibilidades al trabajo matemático. En la actualidad, los ordenadores han proporcionado un entorno visual muy importante para explorar o presentar esas ideas, para representar problemas y sus soluciones, para incrementar la intuición y comprensión de problemas y para mostrar la dinámica de ciertos sistemas o procesos. Este autor afirma que esta nueva herramienta puede ofrecer lo mejor del mundo simbólico y lo mejor del mundo intuitivo. La informática educativa tiene ya una importante producción visual, y estas nuevas herramientas de aprendizaje visual necesitan un conjunto de técnicas de evaluación diferente de las utilizadas para el aprendizaje simbólico tan familiar. Este autor nos hace pensar en que la enseñanza de la visualización implica aprender nuevas habilidades pedagógicas y que no sólo debemos entender las matemáticas sino que debemos aprender a comunicar nuestras matemáticas visualmente (Cunningham, 1991, p. 74).

Todo lo anterior justifica la parcela matemática elegida (visualización y razonamiento espacial) para nuestro trabajo y el interés por mostrar los objetos y procesos implicados en la resolución de tareas espaciales, así como los conflictos y dificultades que surgen en los diversos sistemas de prácticas.

6.4.1. APORTACIONES DEL TRABAJO

Dada la distribución de respuestas correctas por ítem (tabla 5.1), con porcentajes por debajo del 40% menos en el ítem 4, se hace evidente que, salvo en el caso de este ítem, las tareas presentadas no forman parte de la práctica habitual de estos estudiantes. Además, en vista de que la mayoría de las modificaciones de las tareas y cualquier generalización de las mismas es más complicada que las presentadas, en general, dichas generalizaciones, descritas en el Capítulo 4, pueden suponer un esfuerzo bastante elevado para los alumnos de magisterio.

Estos estudiantes tienen ideas muy vagas y limitadas sobre conceptos básicos como simetría, giro, cubo, ortoedro, paralelepípedo, etc. y frecuentemente el significado que atribuyen a los mismos está basado en ejemplos prototípicos. No están acostumbrados a realizar cortes de sólidos, a desarrollar cuerpos truncados y a generar sólidos de revolución. Así mismo, la representación plana de objetos tridimensionales no forma parte de su formación y se producen numerosos conflictos a la hora de realizarla o bien de interpretarla.

Además, se han encontrado importantes limitaciones a la hora de comunicar la información visual. Gorgorió (1998) habla de errores de códigos verbales que se refieren a hechos espaciales que nosotros también hemos observado, por ejemplo cuando los estudiantes utilizan las palabras “círculo” (o “circunferencia”) y quieren decir “esfera”, cuando hablan de “lado” y quieren decir “cara” o cuando utilizan “elipse” para referirse a un “elipsoide”. Pallascio, Allaire y Mongeau (1993, p. 11) recalcan que una de las mayores dificultades con las que los estudiantes se encuentran es la terminología en la generación de figuras bi y tridimensionales debido a la falta de vocabulario geométrico.

Se ha visto, a través del análisis ontosemiótico realizado, que los estudiantes movilizan gran cantidad de objetos y procesos visuales (en contra de lo que creen algunos autores que sostienen que a los estudiantes no les gusta el pensamiento en términos visuales). Sin embargo, no lo hacen de forma eficiente y muchas veces ni siquiera de forma consciente. Los resultados muestran, al igual que en el estudio de Malara (1998), que los futuros profesores se encontraron con dificultades para coordinar las visiones parciales de un objeto, para visualizar los objetos globalmente, para evocar la visión desde uno de sus cuatro puntos de vista fundamentales y para verificar la corrección de sus producciones y conceptualizar los principios de representación.

Según Gorgorió (1998) para resolver una tarea espacial es posible seguir un tipo de estrategia que no se argumente con objetos y procesos visuales. Esta apreciación le permite distinguir entre capacidad del procesamiento visual y capacidad de procesamiento espacial como se ha visto en el Capítulo1. En el análisis que hemos hecho sobre las configuraciones y, atendiendo a la definición dada en el Capítulo 2, todas las configuraciones obtenidas son configuraciones visuales aunque el grado de visualización no es el mismo en todas. Se ha observado, a través de las configuraciones cognitivas de los estudiantes, como estos han utilizado mayoritariamente argumentaciones visuales en la resolución de las tareas propuestas.

Por otra parte, el análisis ontosemiótico ha permitido explicar que en la resolución de la mayoría de las tareas las referencias o restricciones visuales son más fuertes para los alumnos que las que vienen dadas a partir de una sentencia verbal. Por ejemplo, en el caso del ítem 1 el 33,75% no atiende a que el corte se haga a 2 cm. (*Hipótesis* $H2_{IT1}$), en el ítem 5 el 24,50% no contemplan que los túneles atraviesan el cubo (*Hipótesis* $H2_{IT5}$), en el ítem 6 el 33% de los estudiantes a que no las piezas no se puedan levantar de la mesa (*Hipótesis* $H2_{IT6}$) y, en el ítem 7, un 49,50% de los sujetos no reparan en la palabra girar (*Hipótesis* $H2_{IT7}$). Este poder de lo visual sobre lo verbal ha de ser canalizado, es decir, es necesario aprender a manipularlo para poder trabajar y razonar sobre esas imágenes.

Hemos constatado que las características de la tarea, fundamentalmente la acción requerida (Gorgorió, 1998), es uno de los elementos que más afectó a la resolución de la misma. Así, aquellas que requieren la acción de dibujar, que se corresponden con el ítem 2 y el ítem 7, fueron las que menor porcentaje de aciertos tuvieron, el 8,5% y el

4%, respectivamente. También se ha observado que muchas configuraciones de alto nivel en VRE no alcanzan el 100% de efectividad debido, además, al tipo de respuesta exigido. Gorgorió (1998, p. 227), concluye que

> Para cada categoría de estrategias, la aparición de un tipo u otro, y su efectividad, depende de la relación de una o más características de la tarea propuesta, con la acción requerida en la tarea, siendo la característica más relevante. Por lo tanto, la demostración de la habilidad espacial de orientación de un sujeto, depende no sólo de su capacidad o posibilidades sino también de las características de la tarea a la que se enfrenta.

Cosío (1997, p. 173) observó que aquellos ítems con menor rendimiento necesitaron más estrategias que en aquellos que tuvieron un porcentaje elevado de aciertos. En términos de configuraciones nosotros podemos decir que el número de tipos de configuraciones para cada ítem fue elevado, salvo para el ítem 4 que resultó ser, significativamente, el de mayor porcentaje de aciertos.

El marco teórico empleado aporta una herramienta exhaustiva que ha permitido que afloren todos los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en las prácticas, tanto desde el punto de vista institucional (configuraciones epistémicas) como personal (configuraciones cognitivas).

El análisis realizado en el Capítulo 5 recoge la frecuencia de las posibles respuestas, las diferentes configuraciones cognitivas con sus ejemplos de respuesta correspondientes, la categorización de los errores y la relación entre los tres aspectos anteriores a través de lo que se ha llamado “efectividad de las configuraciones”. El trabajo presentado muestra que la efectividad no determina el nivel de una configuración. La comparación de los niveles a los que pertenecen las configuraciones con la efectividad de las mismas pone de manifiesto que el uso de elementos ostensivos facilita mucho la resolución de la tarea. Los alumnos no están acostumbrados a movilizar imágenes dinámicas y mantener las características visuales y de posición (habilidad de memoria visual) que en los casos de configuraciones con soporte únicamente mental provoca no obtener el 100% de efectividad.

Esto quiere decir que, desde el punto de vista institucional, las configuraciones pueden ser efectivas o no, en el sentido de llevar hacia la resolución de la tarea. Sin embargo, desde un punto de vista cognitivo, hay configuraciones que tuvieron un 0% de efectividad siendo epistémicamente correctas en ese sentido. Por ejemplo, en el ítem

5, la configuración CC6 tuvo el 0% de efectividad, siendo la configuración más limpia y funcional. Sólo en el ítem 3, todas las configuraciones detectadas tienen un cierto porcentaje de efectividad. Además, se debe tener en cuenta que el 100% de efectividad no quiere decir que esa configuración lleve siempre hacia una solución correcta (ítem 4).

Duval (1999, pp. 4-5) sitúa en el centro de la comprensión en matemáticas la representación y la visualización, y por tanto, es fundamental analizar en que medida estos dos elementos interactúan para producir aprendizaje. A diferencia de otros campos de conocimiento, el uso de representaciones semióticas es esencial para tener acceso a los objetos matemáticos; sin embargo, hay que tener en cuenta que la comprensión de las matemáticas requiere distinguir un objeto de su representación. Hemos visto en nuestro trabajo como uno de los mayores conflictos que se encontraron a la hora de resolver las tareas tiene que ver con esa falta de interrelación entre representación y visualización.

6.4.2. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Se ha visto en el Capítulo 1 que varios autores apuntan diversas dificultades asociadas con la investigación sobre imaginería visual (DeWindt-King y Goldin, 2001; Gray y Pita, 1999; Owens, 1999; Presmeg, 1985, Presmeg 2006a). En particular, Gray y Pita (1999, p. 241) señalan que todo investigador en este campo debería tener presente siempre que “el estudio de la imaginería en cualquier contexto está lleno de dificultades”. No existe garantía de la exactitud de la construcción del investigador de la naturaleza de esas imágenes ni de que el pensamiento del individuo no esté influenciado por el proceso de la investigación.

A continuación se exponen algunas de las limitaciones del estudio realizado:

- Como se ha visto en el Capítulo 1, existen variedad de tipos de tareas espaciales. En nuestro trabajo sólo se han analizado tareas del tipo E1, E03, E11, E14, E17, E23, E26, E27, P09, P10 y P13.
- Las tareas seleccionadas no ponen en juego todas las habilidades espaciales descritas por Del Grande (1987).
- Los resultados obtenidos, aunque pertenecen a una muestra de tamaño considerable, no se pretenden extrapolar a toda la comunidad de estudiantes de la diplomatura de Maestro, por haberse realizado en un contexto particular.

- El trabajo no pretende "medir" las capacidades espaciales de los estudiantes.
- Las configuraciones se han desarrollado en base a las respuestas de los alumnos que exponen una argumentación de tipo verbal o gráfico. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que podrían aparecer algunas más de las detectadas debido a que un porcentaje significativo de estudiantes no argumentan su respuesta (Tabla 6.4).
- Como se puede ver en la Tabla 6.6, el porcentaje de alumnos que no han respondido a las tareas 3 y 5 es elevado (19,75% y 19% respectivamente). Entre las posibles causas de estos resultados se descarta la variable tiempo (1 hora). Hemos observado que existen características de la tarea asociadas al porcentaje de sujetos que no responden y no sólo a la resolución de la misma (tipos de estrategias y procesos de resolución). El mayor porcentaje de sujetos que dejan el ítem en blanco no se corresponde directamente con el índice de dificultad de la tarea como se puede ver claramente en el caso del ítem 7. Esta tarea, que es una de las que resultaron más difíciles (en cuanto a porcentaje de respuestas correctas), tiene el segundo porcentaje más alto de estudiantes que lo respondieron (94,25%) y que lo argumentaron (93,5%). Estas características de la tarea implicadas no han sido investigadas.

Tabla 6.6. Porcentaje de estudiantes que no responden a cada uno de los ítems

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7
No sabe/No contesta	12,5	11,75	19,75	9,25	19	5,25	5,75

- Estos resultados corresponden a una muestra de sujetos específica (futuros profesores de primaria de las diferentes especialidades). Por tanto, se debe tener en cuenta que el grupo al que se le propone la tarea también influye a la hora de hablar de la efectividad de una configuración, tal y como expone Gorgorió (1998, p. 227).

6.5. ALGUNAS CUESTIONES ABIERTAS

- Entre las cuestiones que requieren nuevas investigaciones, directamente relacionadas con el trabajo realizado, destacamos las siguientes: en el análisis de la dualidad extensivo-intensivo (particular-general), en los modelos epistémicos, se han mostrado generalizaciones de las tareas y variaciones de las mismas sobre algunas de las variables de tarea implicadas. Sería interesante explorar estas modificaciones sobre las tareas y como influyen estas modificaciones en las variaciones de los resultados obtenidos, si aparecen nuevos conflictos y desaparecen los que había, etc.

- Los resultados del trabajo exponen un conjunto de configuraciones cognitivas para cada uno de los ítems. Sería necesario realizar un estudio de casos para varios sujetos con el fin de analizar si existe algún tipo de relación entre las configuraciones cognitivas que utiliza cada sujeto en cada uno de los ítems. Esto nos podría llevar a plantearnos si su pensamiento se mueve más en término visuales o en términos analíticos.
- En el Capítulo 2 se expone que toda configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada por un componente visual y uno analítico. Este componente visual puede ser o no clave para la resolución y comprensión de la tarea. Esto nos lleva hacia la idea de que se puedan establecer diferentes grados de visualización en función del papel que esta juega junto con los estilos cognitivos de cada estudiante.

Esta investigación se ha centrado en la faceta cognitiva de los procesos de formación de profesores de matemáticas de Educación Primaria, esto es, en caracterizar los aprendizajes logrados sobre el tema de visualización y razonamiento espacial por futuros profesores, tras los procesos formativos usuales en una Facultad de Educación. Los ítems seleccionados tienen en cuenta principalmente algunos componentes del conocimiento común y avanzado sobre el tema (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009). Queda abierto el problema de elaborar nuevos instrumentos que contemplen las componentes del conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes y la enseñanza.

Desde una perspectiva formativa nuestra investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes para maestro en cuanto a conocimiento común y avanzado del contenido de visualización y razonamiento espacial. Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos.

REFERENCIAS

Acuña, C. & Larios ,V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/193

Anderson, J. R. (1995). *Cognitive psychology and its implications* (4^{th} edition). New York: Freeman.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15 (3), 57-76.

Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación matemática,* 18 (1), 99-132.

Azorín, F. y Sánchez Crespo, J. L. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Universidad.

Badger, M. E. (1981). Why aren't girls better at maths? A review of research. *Educational Research*, 24(1), 11-23.

Balecheff, N & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barakat, M. K. (1951). A factorial study of mathematics abilities. *British Journal of Psychology Statistic Section*, 4, 137-156.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 9-24). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 47-60.

Battista, M. T. (1994). On Greeno's environmental/model view of conceptual domains: a spatial/geometric perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 86-94.

Battista, M. T. (1998). *Shape Makers: Developing geometric reasoning with the Geomter's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Battista, M. T. (2001). Shape Makers: A computer environment that engenders students' construction of geometric ideas and reasoning. *Computers in the Schools*, 17(1), 105-120.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. (2008a). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. (2008b). Development of the *Shape Makers* geometry microworld: Design principles and research. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1990). Constructing Geometric Concepts in Logo. *Arithmetic Teacher,* 38(3), 15-17.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1998). Student's spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.

Battista, M. T.; Wheatley, G. & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in Mathematics*, 16, 389-409.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25, 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 49- 59.

Berthelot, R. & Salin M.H. (1992). *Lénseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatorie*. These, Université de Bourdeaux.

Bills, C. & Gray, E. (1999). Pupils' images of teachers' representations. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th PME International Conference*, 2, 113-120.

Bishop, A. J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education, 9*, 43-49.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1986). What are some obstacles to learning geometry? En R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education. Teaching of Geometry*, 5, (pp. 141-160). Unesco.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Bishop, A. J. (1992). International Perspectives on Research in Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 710-723). New York: Simon & Shuster Macmillan.

Bishop, A. J. & Clements, M. A. (1978). *One hundred different Spatial Activities for Schools*. Unpublished paper Monash University.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: CEAC.

Blanco L, J. y Barrantes, M. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 241-250.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving:Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics,* 22(2), 183-203.

BOE (2000). Resolución de 6 de noviembre de 2000, de la Universidad de Santiago de Compostela, por la que se publica la modificación del plan de estudios conducente al título de Maestro.

Bondesan, M. G. & Ferrari, P. L (1991). The active comparison of strategies in problem-solving: An exploratory study. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference,* 1, pp. 168-175.

Borrow, C. (2000). *An investigation of the development of 6th grade student's geometric reasoning and conceptualizations of geometric polygons in a computer microworld*. Unpublished doctoral dissertation, Kent State University.

Branoff, T. (2000). Spatial visualization Measurement: A modification of the Purdue Spatial Visualization test-Visualization of Rotations. *Engineering Design Graphics Journal*, 64(2), 14-21.

Breen, C. (1997). Explorin imagery. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference,* 2, 97-104.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-I. Talence: IREM de Bordeaux.

Brown, D. L. & Presmeg, N. C. (1993). Types if imagery used by elementary and secondary school students in mathematics reasoning. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference*, 2, 137-144.

Brown, D. L. & Wheatley, G. H. (1993). Components of spatial sense and mathematics understanding. *Paper for National Council of Teachers of Mathematics Annual Meeting*. Seatle, WA.

Brown, D. L. & Wheatley, G. H. (1997). Components of imagery and mathematical understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 45-70.

Brown, D. L. & Wheatley, G.H. (1990). The role of imagery in mathematical reasoning. In G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference, 1*, 2-17.

Burden & Coulson, S. A. (1981). *Processing of spatial tasks*. Thesis, Monash University, Melbourne.

Canguro matemático (s.f.). Extraído el 4 de junio de 2004 Desde http://www.masquemates.com/canguro.html

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant du savoir enseign*é. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early education. En D. H. Clements y J. Sarama (Eds.), *Engaging your children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahawah, NY: Erlbaum.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1989). Learning of geometric concepts in a Logo environment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20, 450- 467.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1990). The effects of Logo on childrens' conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 356-371.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York : Macmillan Publishing Co.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (2001). Logo and Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*. Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

Clements, K. (1981). Visual Imagery and School Mathematics. Part I. *For The learning of Mathematics*, 2(2), 2-9.

Clements, K. (1982). Visual Imagery and School Mathematics. Part II. *For The learning of Mathematics*, 2(3), 33-38.

Clements, M. A. (1983). The question of how spatial ability is defined, and its relevante to mathematics education. *Zentralblatt fur didactic der Mathematik,* 15, 8-20.

Clements, M.A. & Del Campo, G. (1989). Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 25- 33.

Cobb, P.; Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 229-236.

Colmez, F. & Parzysz, B. (1993). Le vu et le su dans lèvolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde. In A. Bessot & P. Verrilon (Eds.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en didactique des Mathemátiques*, 25 (2), 151-186.

Cook, T. & Campbell, D. (1979). *Quasi-experimentation design and analysis issues for field setting*. Chicago: Rand McNally College Publishing Company.

Corberán, R.; Gutiérrez, A. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*. Colección *Investigación,* nº 95. Madrid: MEC.

Coren, S.; Ward, L. M. & Enns, J.T. (1994). *Sensation and perception*. For Worth, TX: Harcourt Brace College.

Cosío Amondo, J. (1997). *Diagnosis de la habilidad de visualizar en el espacio 3D con estudiantes de Bachillerato del Bilbao metropolitano*. Tesis Doctoral. Lejona: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 67-76). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Davis, Philip J. & Anderson, James A. (1979). Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education. *SIAM Review*, 21(2), 112-127.

De Guire, L. J. (1982). Mathematical abilities: The view from factor analysis. In S. Wagner (Ed.), *Proceedings of the fourth annual meeting of the North American Chapter of Psychology of mathematics education* (pp. 1-7). Athens, GA: Psychology of Mathematics Education- North American Chapter.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid: Ediciones Pirámide, S. A.

De Lange, J. (1988). ¿Geometría para todos? *Actas I simposio Galego de Educación Matemática*, 49-70.

De Villiers, M. (1994). The role and function of Hierarchical classification of Quadrilaterals. *For the learning of Mathematics*, 14(1), 11-28.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the 22nd PME International Conference,* 2, 248−255.

DeWindt-King, A. & Goldin, G. (2001). A study of children's visual imagery in solving problems with fractions. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2*, 345-352.

Del Grande, J.J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In Montgomery, M. Shulte, A. (Eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 14-20.

Del Olmo, M. A.; Moreno, M. F.; Gil, F. (1989). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Deliyianni, E.; Elia, H. & Gagatsis, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6), 696-705.

Diezmann, C. & Lowrie, T. (2009). Primary students´ spatial visualization and spatial orientation; an evidence base for instruction. En Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 2, 417-424.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 17-32.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In Furinghetti, F. (Ed.) *Proceedings of the 15th P.M.E. International Conference,* 1, 33-48.

Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagramas. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploting mental imagery with computers in mathematical education*, (pp. 3-9). Berlin: Springer.

Dunn, O, J. & Clarck, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression.* Nueva York: John Wiley.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* 3-26.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.

Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1989). Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 1- 5.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 25-37). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt fur Didactic der Mathematik*, 26(4), 109-113.

Fennema, E. & Carpenter, T. P. (1981). Sex-related differences in mathematics: Results from National assessment. *Mathematics Teacher*, 74, 554-559.

Fennema, E. & Tartre (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 184-206.

Fey, J.; Atchison, W.; Good, R.; Heid, M.; Johnson, J.; Kantowski, M. & Rosen, L. (1984). *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*. College Park, Md.: University of Maryland.

Fernández, Mª. T.; Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26 (42).

Filloy, E.; Puig, L. y Rojano T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Berlín: Springer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14* (1).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162.

Fischbein, E. (1998). Conoscenza intuitive e conoscenza logica nell' attività matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 365-401.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix*, 19, 33-36.

Font, V.; Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.007/s10649-010-9247-4.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problema of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 33-52.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formaciónde profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Holland: D. Reidel Publication Company.

Freudenthal, H. (1980). Four-cube houses. *For the learning of Mathematics*, 1, 12-13.

Gagatsis, A.; Panaoura, A.; Elia, I.; Stamboulidis, N. & Spyrou, P. (2008). The axis of reflective symmetry as representation in mathematics learning. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/198

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2), 163-183.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis doctoral, Centro de investigación del IPN México.

Gall, M. D.; Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Londgman Publishers.

Gardner, H. (1987). *Estructuras de la mente. La teoría de las múltiples inteligencias*. México: Fondo de cultura económica.

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. *Proceedings of the 9th PME International Conference*, 2, 53-71.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Extraído el 4 de junio de 2010 d*esde: http://www.ugr.es/local/ jgodino/indice_eos.htm*

Godino, J. D.; Cajaraville, J. A.; Fernández Mª. T. y Gonzato, M. (en prensa). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en Educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*.

Godino, J. D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (Especial), 133-156.

Goldin, G. A. (1992). On the developing of a unified model for the psycology of mathematics learning and problema solving. In W. Geeslin & K, Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 3, 235-261.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical learning and Problem Solving. In Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics*

Education (pp. 197-218). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gonzato, M.; Fernández, T. y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica. *Números* 77, 99-117.

Gorgorió, N. (1995): *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Gorgorió, N. (1996): Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference,* 3, 3-19.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.

Gray, E. & Pita, D. (1999). Images and their frames of reference: A perspective on cognitive development in elementary arithmetic. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 3, 49-56.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 115-141.

Guay, R. (1977). *Purdue Spatial Visualization Test - Visualization of Rotations*. W. Lafayette, IN. Purdue Research Foundation.

Guay, R. B. & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achivement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (3), 211-215.

Guay, R. B.; McDaniel, E. D. & Angelo, S. (1978). Analytic factor confounding spatial ability measurement. West Lafayette, IN, Purdue University: U. S. Army Research Institute for the Behavioral Sciences.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1996). Identificación of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. En L. Puig; A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 3, 3-34.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral, Universitat de València: España.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias,* 18(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias* 19(3), 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica. *Educación Matemática* 16(3), 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática,* 17(2), 117-152.

Guillén, G., Jaime, A., Cáceres, M. y Gutiérrez, A. (1992). *La enseñanza de la geometría de los sólidos en EGB.* Memoria final del proyecto de investigación. Valencia: Institución Valenciana de Estudios e Investigación «Alfonso el Magnánimo».

Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las práctica de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica.* Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela: España.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). México D.F.: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural topology*, 18, 31-48.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 1, 3-19.

Gutiérrez, A. (1996b). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. In Batturo, A.R. (Ed.), *New directions in geometry* *education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1996c). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A.R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1998a). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, 3(3), 193-220.

Gutiérrez, A. (1998b). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in "*Encuentro de Investigación en Educación Matemática*", TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscript.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1987). Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría. *Enseñanza de las ciencias*, nº extra, 365-366.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En Giménez, y otros (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998): On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20(2/3), 27-46.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.

Hadamard, J. (1954). *The Psicology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hart, K. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray.

Hart, L. C., Smith, S. Z, Swars, S. L. & Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3 (1), 26-41.

Hazama, S. & Akai, T. (1993). Pupil's development of graphical representations of 3-dimensional figures: On technical difficulties, conflicts or dilemmas, and controls in the drawing process. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigmatsu, & F.L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference*, 2, 161-168.

Healy, L. & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.

Hershkowitz, R. (1989). Visualitation in geometry- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61- 76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge U.P.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. In, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp. 161-204). London: Kluwer.

Hewitt, D. (2003). Notation issues. Visual effects and ordering operations. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 63-69.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Hirstein, J. J. (1981). The second national assessment in mathematics: Area and volume. *Mathematics Teacher*, 74, 704-708.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project. Geometry and visualization*. USA: Creative Publications: Palo Alto.

Holzl, R. Healy, L. Hoyles, C. & Noss, R. (1994). Geometrical relationships and dependencies in Cabri. *Micromath*, 10(3), 8-11.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of computers for Mathematical Learning*, 2, 27-59.

Hsu, H. (2008). Learning opportunities of reasoning: the interplay between gestures and diagrammatic properties. *ICME11.* Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/199

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the van Hiele model. Paper presented at the *Proceedings of the 13th PME International Conference*. Paris.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. In S. Llinares & M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Editorial Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano.* Colección Educación matemática en Secundaria, 13. Madrid: Síntesis.

Johnson, M (1987). *The body in the mind*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Johnson, M. & Meade, A. C. (1987). Development patterns of spatial ability: An early sex difference. *Child development*, 58, 725-740.

Johnson-Laird, P. N. (1998). Imagery, visualization and thinking. In J. Hochberg (Ed.), *Perception and cognition at century's end* (pp. 441-467). San Diego, CA: Academic Press.

Jones, K. (1998). Using Imagery to solve spatial Problems. In Bills, L. (Ed.), *Proceedings of the British Society form Research into Learning Mathematics*, 18(3), 83-88.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.

Kadunz, G. & Strässer, R. (2004). Image-metaphor-diagram: Visualization in learning mathematics. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 241-248.

Kaput, J. (1987). Representational systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Supporting concrete visual thinking in multiplicative reasoning: difficulties and opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 35- 47.

Knauff, M., Fangmeier, T., Ruff, C.C. & Johnson-Laird, P. (2003). Reasoning, models and images: Behavioral measures and cortical activity. *Journal of cognitive Neuroscience*, 15(4), 559-573.

Kopelman, E. & Vinner, S. (1994). Visualization and reasoning about lines in space: school and beyond. En J. P. Ponte; J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International* Conference, 3, 97-103.

Kosslyn, S.M. (1980). *Image and Mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kosslyn, S.M. (1983). *Ghost in the mind's machine*. New York: W. Norton.

Kosslyn, S.M. (1988). Aspects ofa a cognitive neuroscience of mental imagery. *Science*, 240 (4859), 1621-1626.

Kosslyn, S.M. (1994). *Image and brain*. Cambrige, MA: MIT Press.

Kotsopoulos, D. & Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (3), 259-274.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. & Mayer, R.E. (2002). Revising the visualizer – Verbalizer dimension: evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruccion*, 20, 47-77.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Laborde, C. (1992). Solving problems in computer based geometry environments: the influence of the features of the software. *Zentralbatt Didaktick der Mathematic*, 4, 128-135.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 121, 48-67.

Laborde, C. (1996). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. *Investigación y didáctica de las matemáticas,* 67-85.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry ina computer based environment. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 113-121). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

Lahrizi, H. (1984). Etude de l´habilité a visualiser des relations geometriques dans trios dimensions chez les éleves et les éleves-proffeseurs au Maroc. These, Quebec Université de Laval.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire and Dangerous Things: What Categories Reveal about the Mind*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Lappan, G.; Phillips, E. D. & Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, 77, 618-623.

Lawrie, C.; Pegg, J. & Gutiérrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed in responses on nets of solids, *Proceedings of the 24th PME International Conference* 3, 215-222.

Lean, G. A. & Clements, K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 267-299.

Lehrer, R.; Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research,* 60, 1-64.

Linn, M. C. & Petersen, A.C. (1985). Emergencie and characterization of sex differences: Ameta-analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.

Lurçat, L. (1979). *El niño y el espacio: la función del cuerpo*. México D.F.: Fondo de Cultura.

MacFarlane Smith. I. (1964). *Spatial ability. Its educational and social significance*. London: University of London Press.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.

Marcou & Gagatsis (2003). A theoretical taxonomy of external systems of representation in the learning and understanding of matehamtics. In A. Gagatsis & I. Elia, (Eds.), *Representations and geometrical models in the learning of mathematics*, 1, (pp. 171-178). Nicosia: Intercollege Press.

Mariotti, M A (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery With Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Oxford, UK: Springer Verlag.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 257-281.

Markopoulus, C. & Potari, D. (1996). Thinking about geometrical shapes in a computer environment. In L. Puig, L. & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Mathematics Education*, 337-334.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44(1/2), 87-125.

Maschietto, M. & Bartolini Bussi, M. G. (2005). Meaning construction through semiotic means: The case of the visual pyramid. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 3, 311-320.

Matsuo, N. (2000). States of understanding relations among concepts of geometric figures: Considered from the aspect of concept image and concept definition. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceeding of the 24th PME International Conference,* 3, 271-278.

McLeay, H. & Piggins, D. (1996). The mental manipulation of 2-D representations of knots as deformable structures. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-414.

McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

Meissner, H. (2001). Encapsulation of a Process in Geometry. *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, 359-366.

Mesquita, A.L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology, 18, 19-30.*

Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The journal of Mathematical Behaviour*, 17(2), 183-195.

Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental stages in children's representation of regular solid figures. *The Journal of Genetic Psychology*, 133, 229-239.

Mitchelmore, M.C. (1980a). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (2), 83-93.

Mitchelmore, M.C. (1980b). Three dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational studies in Mathematics*, 11, 205-216.

Mitchelmore, M.C. (1983). “Geometry and spatial learning: Some lessons from Jamaican experience. *For the learning of mathematics* 3(3), 2-7.

Mitchelmore, M. C. (1986). Geometrical foundations of children’s drawing. In N. H. Freeman & M.V. Cox (Eds.) *Visual order: the nature and development of pictorial representation* (pp. 289-309). Cambridge: The University Press.

Mitchelmore, M.C. (1992). Children’s concepts of perpendiculars. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 2, 120-127.

Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.

Moses, B. E. (1977). *The Nature of Spatial Ability and its Relationship to Mathematical Problem solving.* Unpublished Ph.D. dissertation, Indiana University.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9(2), 83-92.

Muñiz, J. (2002). *Teoría clásica de los test*. Madrid: Pirámide.

Murray, J. E. (1949). Analysis of geometric ability. *Journal of Educational Psychology*, 40, 118-124.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: National Council of Teachers of Mathematics. (Edición electrónica: http://standards.nctm.org/).

National Research Council (2006). *Learning to think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum*. Washington, D.C.: Author.

Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 99-131.

Olkun, K. (2003). Making Connections: Improving Spatial abilities with Engineering Drawing Activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning.* Extraído el 23 de septiembre de 2007 desde http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/sinanolkun.pdf

Orton, J. (1997). Pupil’s perception of pattern in relation to shape. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th PME International Conference*, 3, 304-311.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134, 181-216.

Owens, K. (1992). Spatial thinking takes shape through primary school experiences. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 2, 202-209.

Owens, K. (1993). *Spatial thinking processes employed by primary school students engaged in mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation, Deakin University, Australia.

Owens, K. (1999). The role of visualisation in young students' learning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference,* 1, 220-234.

Owens, K.; Reddacliff, C. & McPhail, D. (2003). Facilitating the teaching of space mathematics: An evaluation. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 1, 339-345.

Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal Processes*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Pallascio, R. Allaire, A. & Mongeau P. (1993). The development of Spatial Competencies through alternating analytic and synthetic activities. *For the learning of mathematics*, 13(3), 8-15.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

Parzysz, B. (1999). "Visualization and modeling in problem solving: From algebra to geometry and back. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 212-219.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Peirce, C. S. (1992). *The essential Peirce*, *Volume 1*. Edited by the Peirce Edition Project. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce*, *Volume 2*. Edited by the Peirce Edition Project. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1966). *L' Image mentale chez l'enfant*. Paris: Press Universitaires de France.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1971). *Mental imagery and the child*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry.* London: Routledge & Kegan Paul.

Pinker, S. (1997). *How the mind works*. New York: W.W. Norton.

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Andreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3D Geometry shapes. In C. Bardini, P. Fortin, A. Oldknow & D. Vagost (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Extraído el 2 de febrero de 2010 desde http://www.ictmt9.org/files/contributors/28f9525538800f9ebcdf852e2f425baa/PITTALIS_Dynamic%20visualisation_fullpaper.pdf

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 4, 385-392.

Poltrock, S. E. & Brown, P. (1984). Individual differences in visual imagery and spatial ability. *Intelligence*, 8, 93-138.

Potari, D. & Spiliopoulou, V. (2001). Patterns in children's drawings and actions whileconstructing nets of solids: the case of conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23 (4), 41-62.

Pratt & Davison (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 31-38.

Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in hight school mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph. D. dissertation, Cambrige University, England.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical gittedness. *Educational studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1989). Visualization in multicultural mathematics classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 17- 24.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. In Furinghettti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 3, 191-198.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in Mathematics,* 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (1994). The role of visually mediated process in classroom mathematics. *Zentralblatt fur Didactic der Mathematik*, 26(4), 114-117.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006a). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2006b). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. Plenary Paper. In J. Navotna, H. Moraova, M. Kratna & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the International Group for the Psycology of Mathematics Education*, 1, 19-34.

Presmeg, N. C. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. *ICME11.* Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/97

Presmeg, N. C. & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 3 58-65.

Pylyshyn, Z. W. (1986). *Computation and cognition.* Cambridge: MIT Press.

Rafi, A.; Samsudin, K. A. & Ismail, A. (2006). On Improving Spatial Ability Through Computer-Mediated Engineering Drawing Instruction. *Educational Technology & Society*, 9 (3), 149-159.

Raphael, D. & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 173-190.

Ricco, G., Vergnaud, G. & Rouchier, A. (1983). Representation du volume et arithmétisation. Entretiens individuelles avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (1), 27-69.

Rival, L. (1987). Picture puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *The Sciences*, 27, 41-46.

Roth, W. M. (2004). *Towards an anthropology of graphing: Semiotic and activity-theoretic perspectives*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Saads, S. Davis, G. (1997): Spatial Abilities, van Hiele levels & language use in three dimensional geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th PME International Conference*, 4, 104-111.

Sack, J. & Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: Children's non-convencional verbal representations. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlpeda, (Eds.), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the international Group for the psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX,* 4 (pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME.

Schultz, K. A. (1978). Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development. In Leshs, R.; Mierkiewicz, D. (Eds.), *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* (pp. 195-211). Columbus, USA: ERIC.

Senk, S. & Usikin, Z. (1983). Geometry proof writing: A new view of sex differences in mathematics ability. *American Journal of Education*, 91, 187-201.

Shepard, R. N. & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science,* 171, 701-703.

Shin, S-J. & Lemon, O. (2008). *Diagrams*. Stanford Encyclopedia of Philosophy.

Shoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale NJ: Erlbaum.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for research in Mathematics Education*, 25(5), 472-494.

Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. In N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proccedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Smith, E. E. (1995). Concepts and categorization. In D. N. Osheson & L.R. Gleitman (Eds.), *An invitation to cognitive science*, 3, Thinking. Cambrige, MA: MIT Press.

Son, Ji-Won. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. In J. Navotna, H. Moraova, M. Kratna, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the* ^{30th} *Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5 145-152.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible. *ICME11.* Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/771

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 498-505.

Springer, S. P. & Deutsch, G. (1981). *Left brain, right brain*. New York, NY: W.H. Freeman and Company.

Steffe, I. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strat*egies. New York: Springer-Verlag.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 133-162.

Stevens, R. & Hall, R. (1998). Disciplined perception: Learning to see in technoscience. In M. Lampert & M. L. Blunl (Eds.), *Talking Mathematics in School. Studies of Teaching and Learning* (pp. 107-148). Cambrige, England: University Press.

Stigler, J. W., Lee, S. Y. & Stevenson, H. W. (1990). *Mathematical Knowledge of Japanese, Chinese and American elementary school children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25*th *PME International Conference*, 4, 225-232.

Stylianou, D., Leikin, R. & Silver, E. (1999). Exploring students' solutions strategies in solving a spatial visualization problem involving nets. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 4, 241-248.

Suárez, J.; Rubio, R.; Gallego, R. y Martín, S. (2004). Desarrollo de un entrenador para la percepción espacial basado en realidad virtual mediante tecnologías de dominio público. En *XII Congreso Universitario de innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*. Barcelona.

Sutherland, R. & Mason, J. (1998). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Oxford, UK: Springer Verlag.

Suwarsono, S. (1982). *Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seventh Grade Students*, Unpublished PhD. Dissertation, Monash University, Melbourne.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics, 1*9 (pp. 105-119). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Tartre, L. A. (1990). Saptial Skills, gender and mathematics. In E. Fennema & G. Leder (Eds.), *Mathematics and Gender; Influences on teachers and students* (pp. 27-59). New York, NY: Teachers College Press.

Thomas, N.J.T. (2010). Mental imagery. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Extraído el 23 de marzo de 2011 desde *http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/*

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemas in school geometry. In M.M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds*.), Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook* (pp.17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasilachis de Gialdino, I. (coord.) (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed*.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 227-232). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 149-155.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 5 (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Mathematik*, 83(1), 20-25.

Von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psichologie*, 50, 191-218.

Von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, representation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience*, (pp.45-67). New York: Springer-Verlag.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. Cambrige, M.A: The MIT Press.

Wattanawaha, N. (1977). *Spatial Ability and Sex Differences in Performance on Spatial Tasks*. M. Ed. Thesis, Monash University, Melbourne.

Wheatley, G. H. (1978). *The Wheatley Test of Spatial Ability.* West Lafayette, IN: Purdue University, U.S.A.

Wheatley, G. H. (1991). Enhancing Mathematics Learning Through Imagery. *Arithmetic Teacher*, 39(1), 34-36.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning* (pp. 281-298). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Wheatley, G. H. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), 65-77.

Wheatley, G. H. & Brown, D. (1994). The construction and Representation of Mathematical Activity. *Proceedings of the 18th PME International*, 1, 81-90.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2003). Teaching angle by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 403-410.

Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 27(1), 77-120.

Wilson, B. (1993). The geometric Supposer in the classroom. . In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 17-22). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York, NY: The MacMillan Company.

Woolner, P. (2004). A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 449-456.

Wrigley, J. (1958). The factorial nature of ability in elementary mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 1, 61-78.

Yakimanskaya I. S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren,* 3. Reston, Virginia: National Council of Mathematics.

Yerushalmy, M . (1993). Generalization in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 57-83). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1993). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 25-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Yerushalmy, M. Shternberg, G. & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problema solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 197-211.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

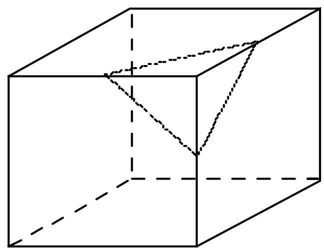
Zykova, V.I. (1969). Operating with concepts when solving geometry problems. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics education* 1 (pp. 93-148). Chicago: University of Chicago.

ANEXO 1:

CUESTIONARIO PILOTO 1 (CP1)

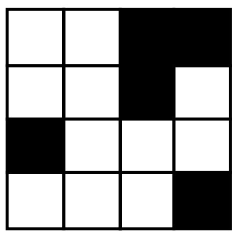
1. Córtanse tódalas esquinas dun cubo de 2 cm. de lado como se indica na figura, a distancia de 1 cm. sobre cada aresta. Cántos vértices ten o sólido así obtido?

   a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24

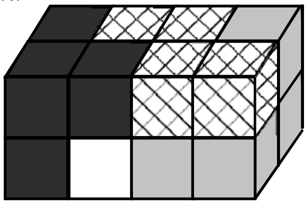


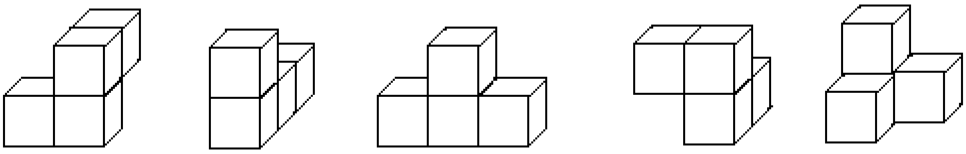
2. Cál é o menor número de cadradiños que é necesario sombrear para que a figura resultante teña alomenos un eixe de simetría?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5



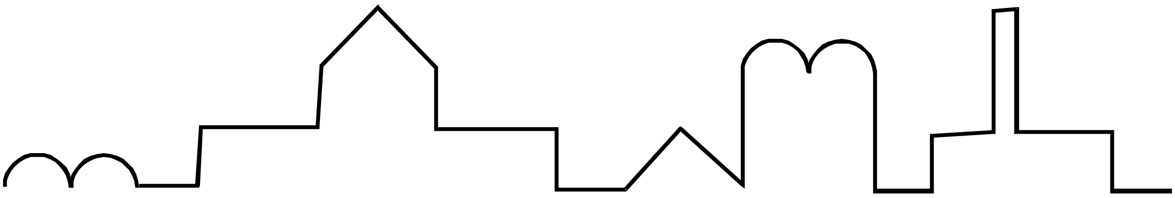
3. Fórmase un paralelepípedo rectángulo usando 4 pezas, cada unha delas formada por 4 cubos (ver a figura da dereita). Tres das pezas vense por completo; a branca só parcialmente. Cál das 5 pezas seguintes é a branca?



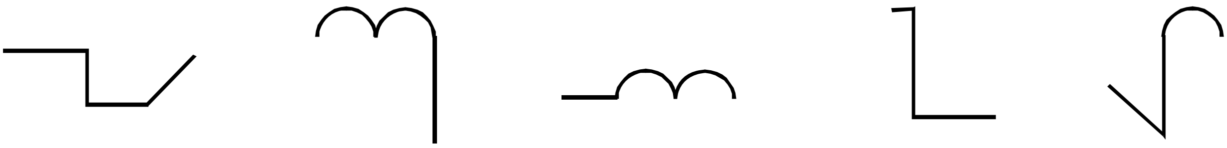


(A) (B) (C) (D) (E)

4. Ao lonxe vese a liña do horizonte

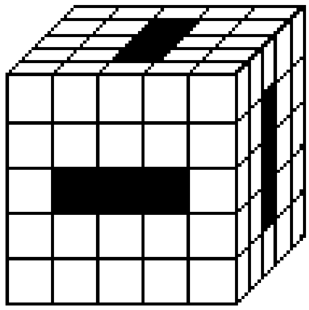


Cal dos seguintes anacos non pertence á devandita liña?



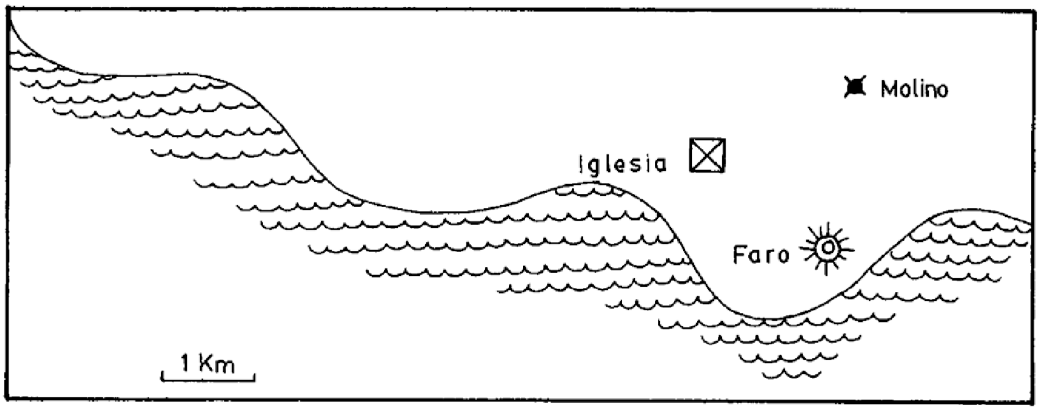
(a) (b) (c) (d) (e)

5. Fanse túneles que atravesan un cubo grande como se indica na figura. Cantos cubiños pequenos quedan?

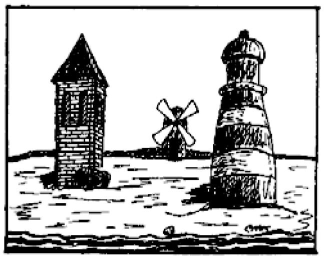


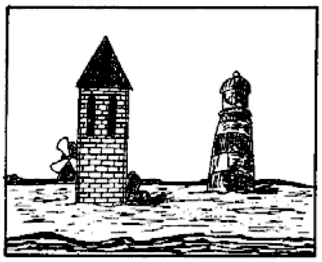
a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85

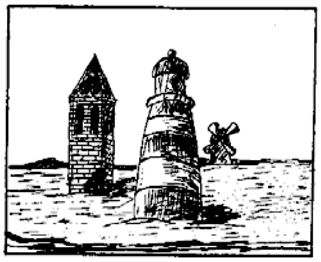
6. O seguinte mapa representa unha parte da costa de Galicia.

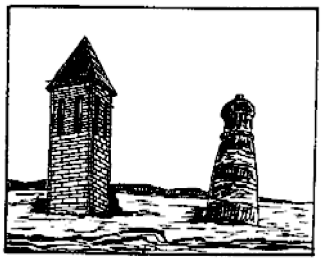


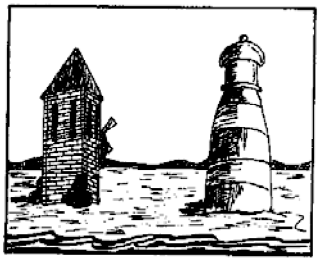
O capitán dun barco que navegaba preto da costa tomou unha serie de fotografías das construcións que lle gustaron. Sen embargo as fotos caéronse e mesturáronse. Poderías dicir a orde na que foron tomadas estas fotografías? Suponse que o barco viaxaba de esquerda a dereita no mapa.

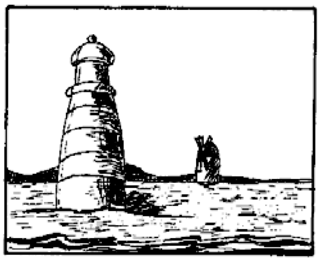

1


2


3


4


5

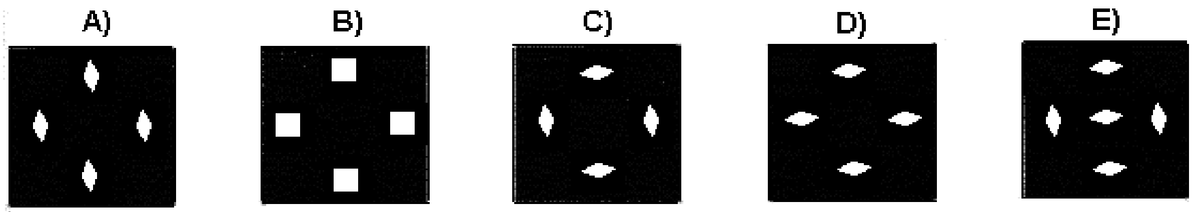

6

SOLUCIÓN

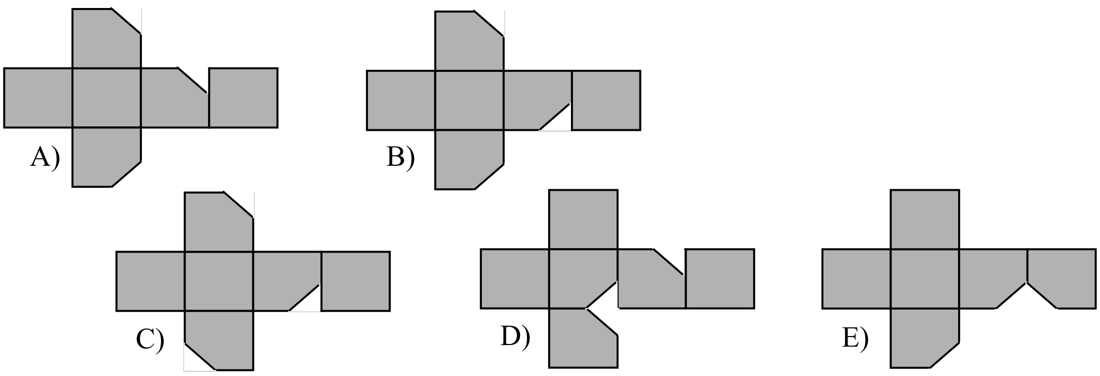
ANEXO 2:

CUESTIONARIO PILOTO 2 (CP2)

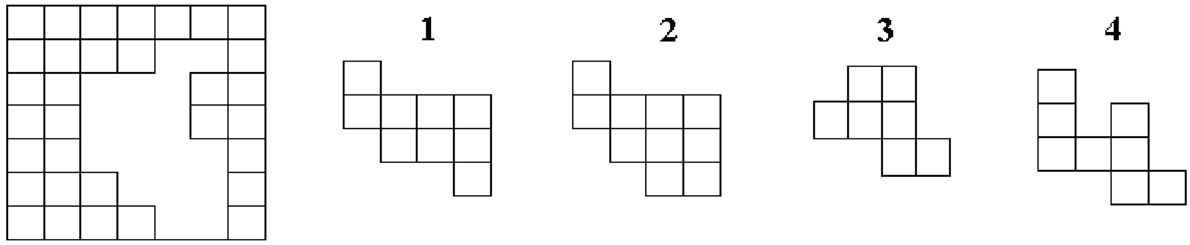
1. Dobramos unha folla de papel e facemos nela os cortes que se ven na figura da dereita. Logo despregamos a folla. Que é o que se ve?



2. Cortamos o vértice dun cubo. Cal dos desenrolos planos que se amosan corresponde ao corpo resultante?

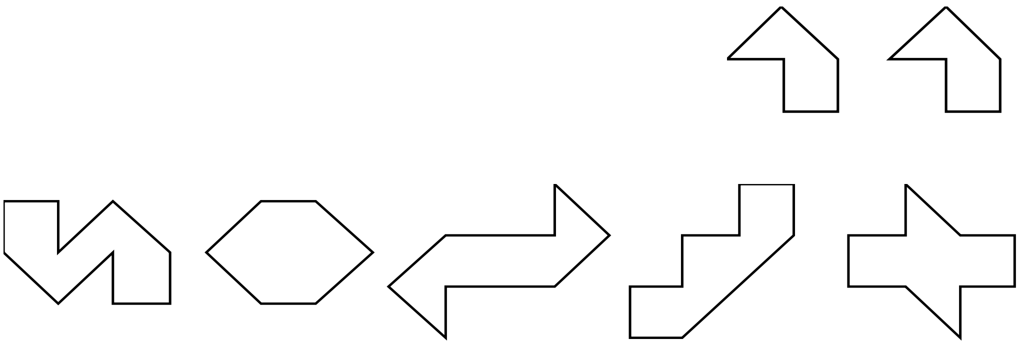


3. Que dúas pezas da dereita teremos que usar para cubrir exactamente a superficie non cuadriculada da figura da esquerda?



A) 1 y 3 B) 2 y 4 C) 2 y 3 D) 1 y 4 E) 3 y 4

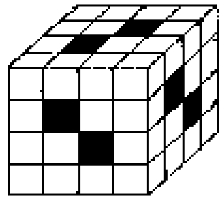
4. Temos dúas pezas idénticas que podemos mover, sen levantar da mesa. Que figura NON poderemos formar con estas dúas pezas?



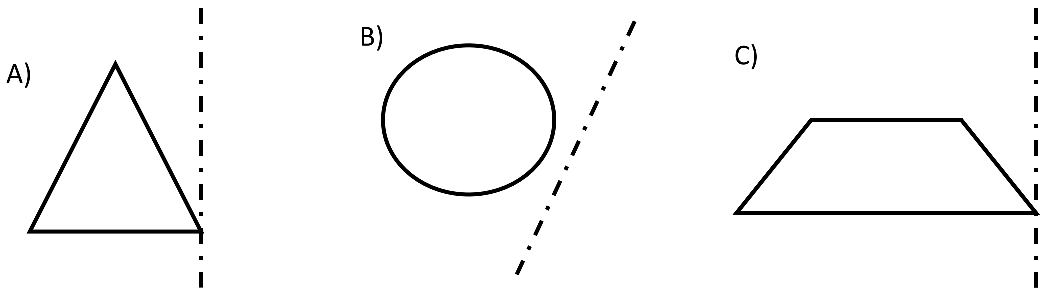
A B C D E

5. Temos un cubo $4 \times 4 \times 4$ formado por 64 cubiños $1 \times 1 \times 1$. Facemos seis buratos no cubo atravesándoo como se indica na figura. Cantos cubiños quedarán do cubo inicial?

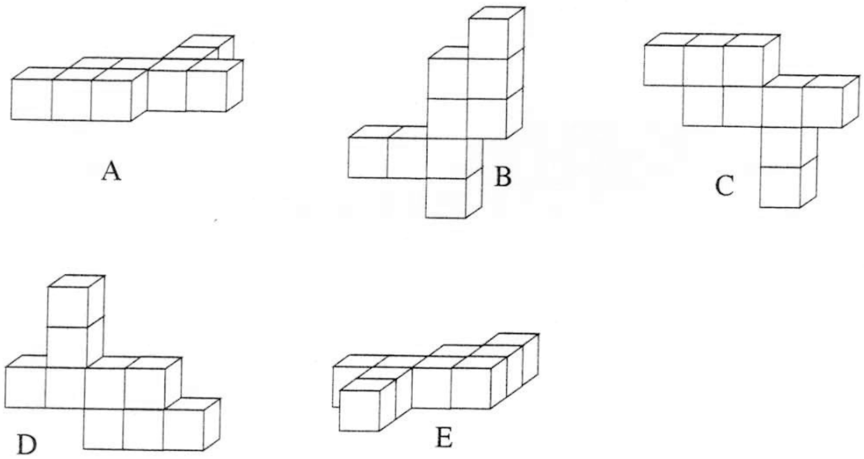
   A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 50



6. Debuxa, de xeito aproximado, qué corpos obteremos ao facer xirar as seguintes figuras respecto dos eixes que se indican.



7. Os debuxos A, B, C, D e E representan construcións con cubos de madeira do mesmo lado. Nestas cinco construcións hai unha que é imposible conseguir xirando no espacio algunha das outras catro. Di cal de elas é.

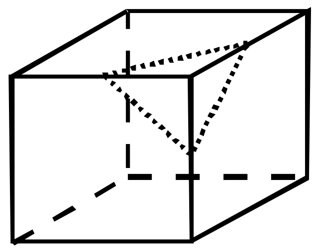


ANEXO 3:

CUESTIONARIO DEFINITIVO

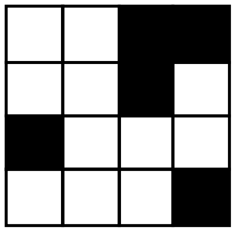
1. Córtanse tódalas esquinas dun cubo de 2 cm. de lado como se indica na figura, a distancia de 1 cm. sobre cada aresta. Cantos vértices ten o sólido así obtido?

   a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24



Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

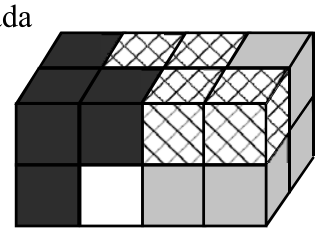
2. Cal é o menor número de cadradiños que é necesario sombrear para que a figura resultante teña alomenos un eixe de simetría?. Indica no debuxo cales serían eses cadradiños.

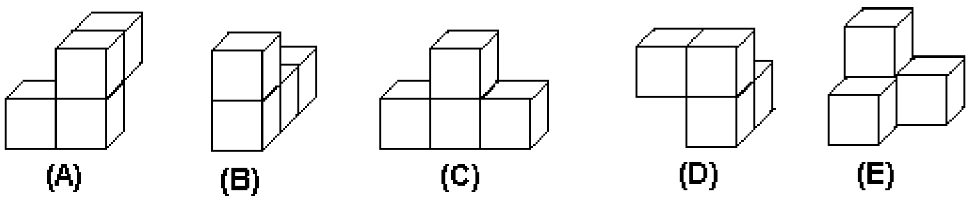


a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

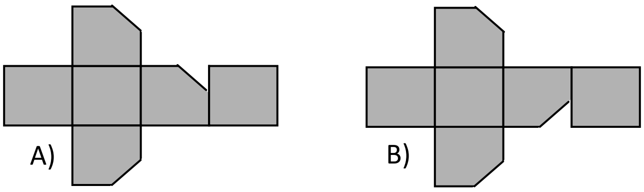
3. Fórmase un paralelepípedo rectángulo usando 4 pezas, cada unha delas formada por 4 cubos (ver a figura da dereita). Tres das pezas vense por completo; a branca só parcialmente. Cal das 5 pezas seguintes é a branca?

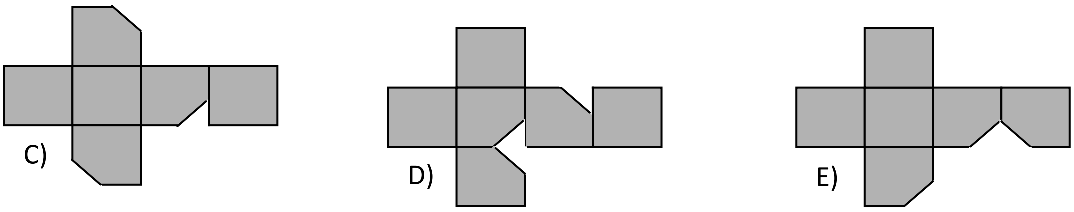




Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

4. Cortamos o vértice dun cubo. Cal dos desenrolos planos que se amosan corresponde ao corpo resultante?

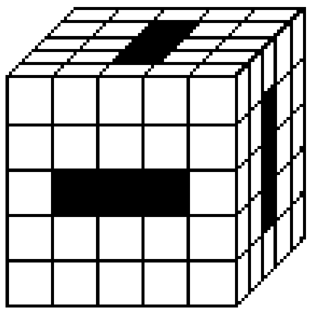




Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

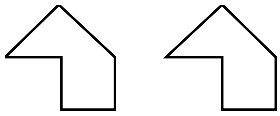
5. Fanse túneles que atravesan un cubo grande como se indica na figura. Cantos cubiños pequenos quedan?

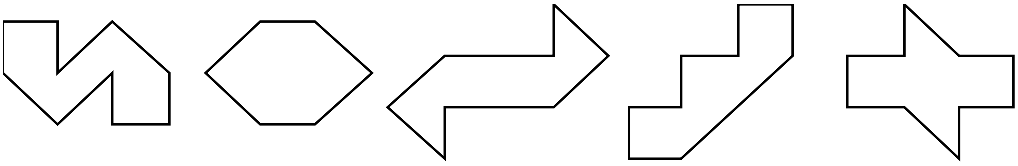
   a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

6. Temos dúas pezas idénticas que podemos mover, sen levantar da mesa. Que figura NON poderemos formar con estas dúas pezas?



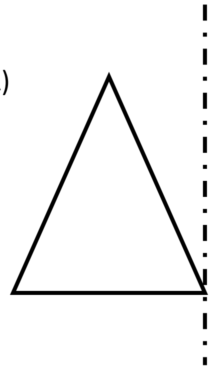


A B C D E

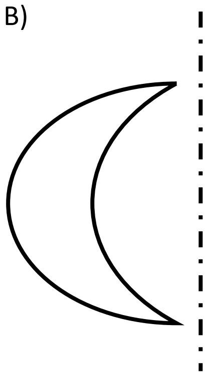
Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

7. Debuxa, de xeito aproximado, qué corpos obteremos ao facer xirar as seguintes figuras respecto dos eixes que se indican.

A)

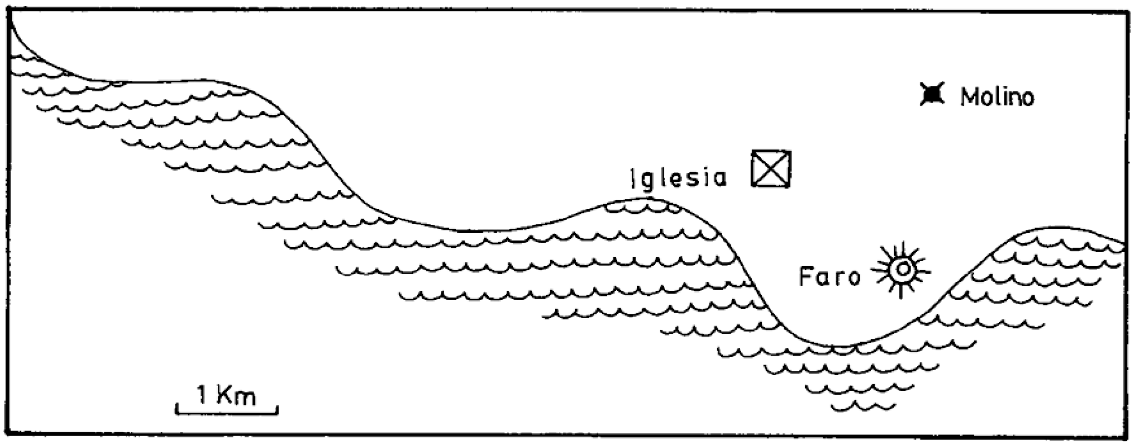


B)

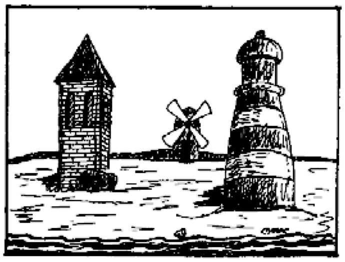


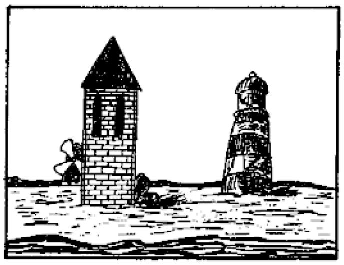
Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

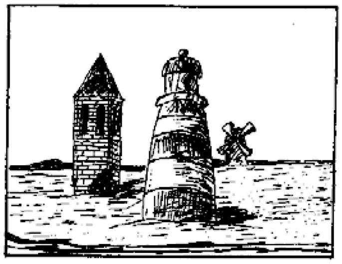
8. O seguinte mapa representa unha parte da costa de Galicia.

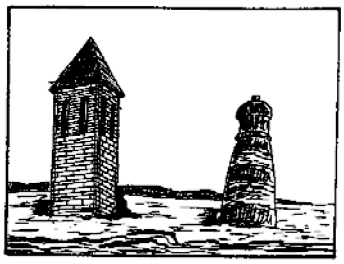


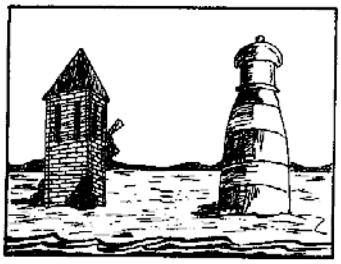
O capitán dun barco que navegaba preto da costa tomou unha serie de fotografías das construcións que lle gustaron. Sen embargo as fotos caéronse e mesturáronse. Poderías dicir a orde na que foron tomadas estas fotografías? Suponse que o barco viaxaba de esquerda a dereita no mapa.

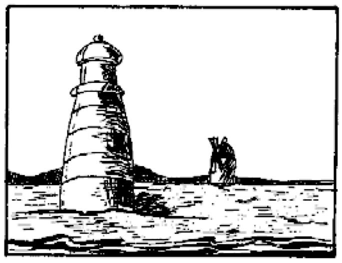

1


2


3


4


5


6

SOLUCIÓN: ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Describe o procedemento ou estratexia que utilizas para chegar a túa resposta

ANEXO IV

Tareas de las investigaciones:

- Tareas en el espacio 3D: E1-E34
- Tareas en el espacio 2D: P1-P18

Tareas **E01**

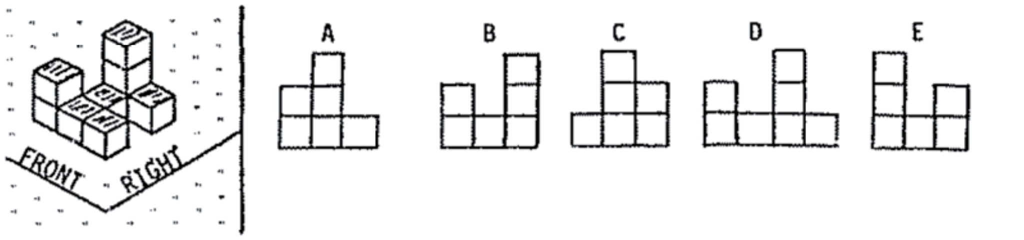
Identificar representaciones planas (o diferentes vistas) de sólidos (en perspectiva, proyección isométrica, vistas ortogonales, vistas ortogonales codificadas).

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1985, p. 399) y

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 56)

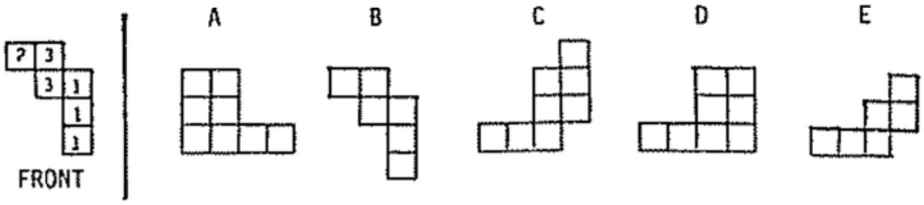
2. You are given a picture of a building drawn from the FRONT-RIGHT corner.

   Find the BACK VIEW.



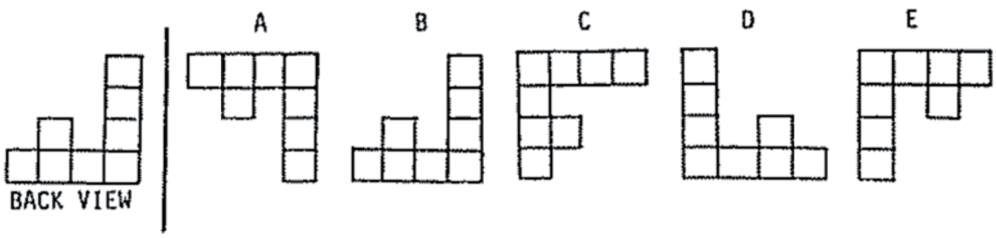
3. You are given the mat plan of a building.

   Find the RIGHT VIEW.

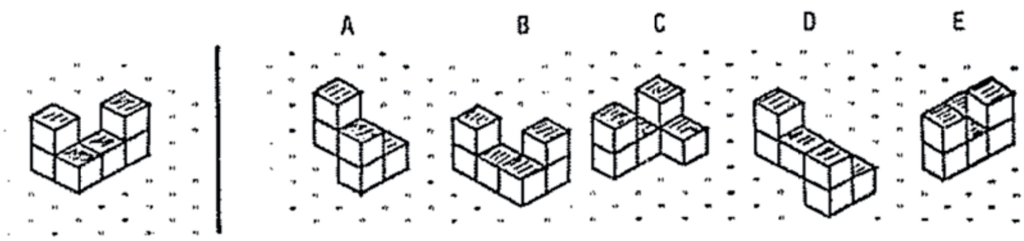


8. You are given the BACK VIEW of a building.

   Find the FRONT VIEW.



29. Find another view of the first building.



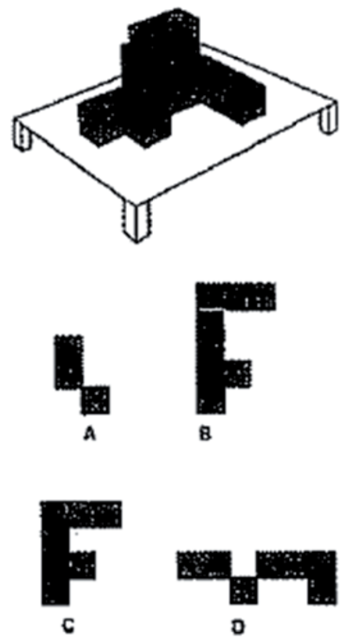
(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 57)

Type VIII. Given the map plan of a building, the task is to identify a three-dimensional corner view of the same building.

Type IX. Given three-dimensional corner views of two different solids, the task is to identify a three-dimensional corner view of a building made from the two solids.

(Diezmann & Lowrie, 2009, p. 418)

What does this model look like from above?



Queensland Studies Authority, 2002, p. 10.

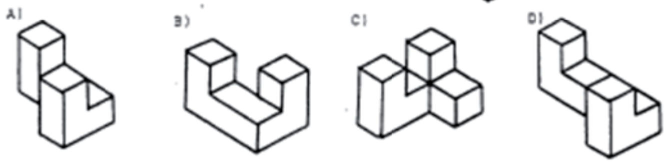
Figure 2: Model task (spatial orientation).

(Guay & McDaniel, 1977, p. 212)

Coordination of Viewpoints (Guay, 1975). This is a 16-item individually administered test designed to measure the ability to visualize the shape of three-dimensional objects from various viewpoints. Children are seated at a round table and observe a particular three-dimensional geometric object (e.g., cube, pyramid). The children are asked to imagine themselves sitting at another position around the table. Three line drawings are then projected onto a screen. The children must select the one drawing that represents the object's appearance as seen from the specified viewing position around the table.

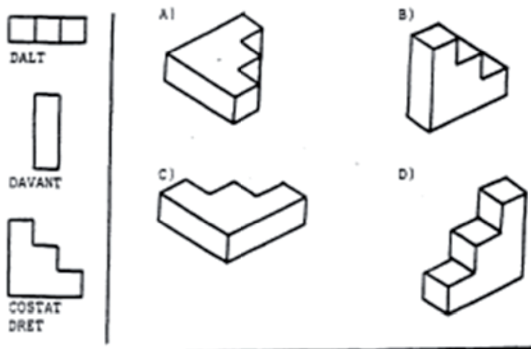
(Gorgorió, 1995, Anexo VII)

18 Quina de les figures A, B, C o D pot ser la representació, des d'un altre punt de vista, de l'objecte de la figura de la dreta?



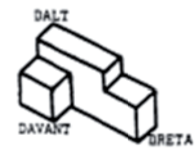
26 Si ens mirem l'objecte de la figura des de dalt, des de davant i des del costat obtenim les següents vistes.

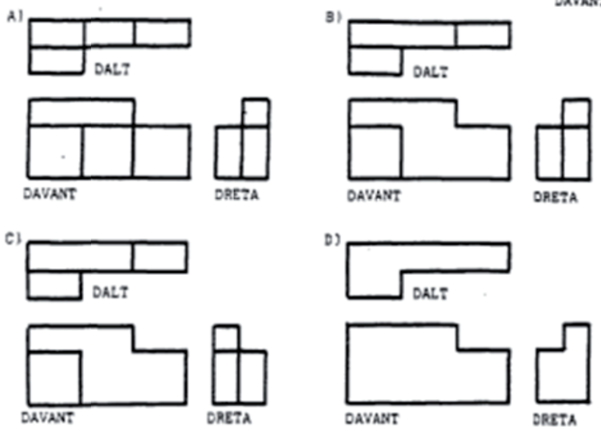
Determina quin dels objectes de la dreta A, B, C o D correpon al grup de vistes de l'esquerra.



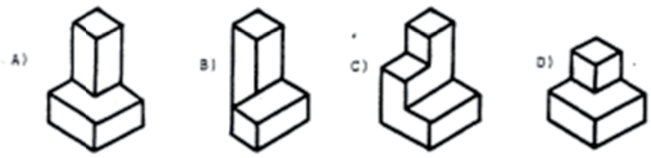
27 La figura de la dreta representa un objecte que té la part del davant on s'indica. Quina figura A, B, C o D representa la vista dreta de l'objecte?

28 Quin dels grups de vistes A, B, C o D, correspon a l'objecte representat a la figura de la dreta?

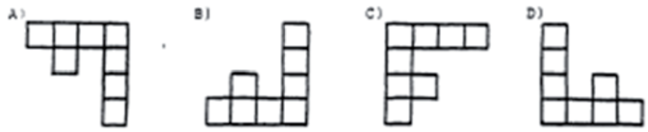




29 Per a construir l'objecte de la figura de la dreta ens han fet falta 8 cubs. Si treien els que estan marcats amb •, quin objecte A, B, C o D obtenim?



37 L'esquema de la dreta correspon a la vista des del darrera d'un objecte. Quina de les següents A, B, C o D és la vista <u>des del davant</u> del mateix objecte?



(Gutiérrez, 1991, p. 48)

A) Identificar representaciones planas de sólidos: Dados un sólido (real o en el ordenador) y varias representaciones planas de ese sólido y de otros parecidos, los estudiantes tenían que determinar qué representaciones correspondían a dicho sólido y cuáles no.

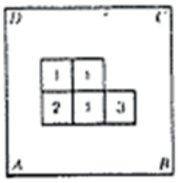
(Gutiérrez, 1992, p. 18)

to check whether a certain representation corresponded to a given module.

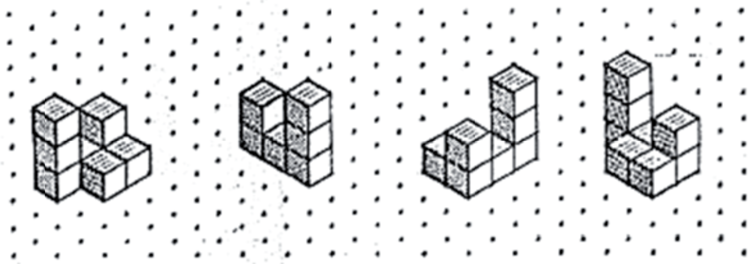
(Lappan, Phillips & Winter, 1984, p. 621)

Build a solid on a piece of paper using the following plan:

- Label the corners of the paper *A*, *B*, *C*, and *D*.
- Position the paper as shown, with corners *A* and *B* at the bottom.
- Build the solid using cubes. The numbers tell you how high each stack of cubes should be.



The following drawings represent the four corner views of the solid you built. Turn the paper on which your solid is built and look at the solid from each corner. Match the letter of each corner to the appropriate drawing.

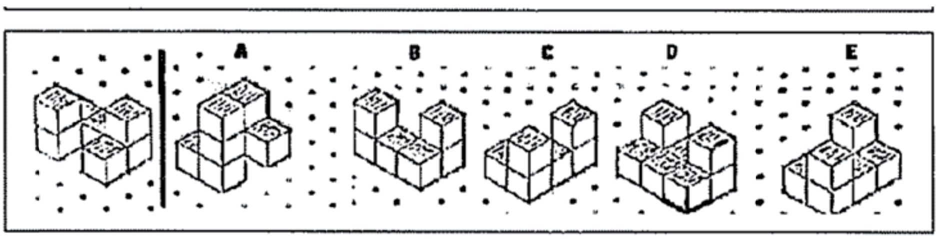


Corner ______ Corner ______ Corner ______ Corner ______

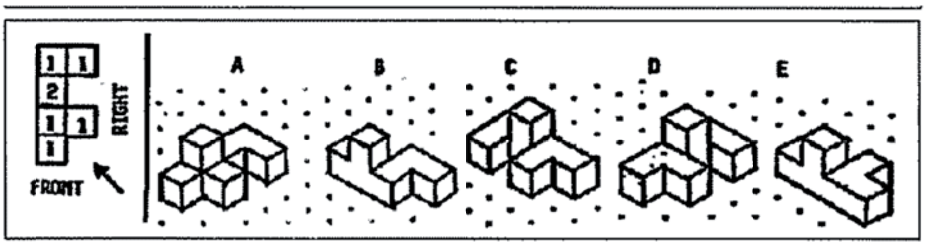
(Olkun, 2003, pp. 6-8)

Son las mismas que en E05 ya que manda hacerlas e identificar las vistas.

(Olkun, 2003, p. 10)



3D Mental Rotation (SR)



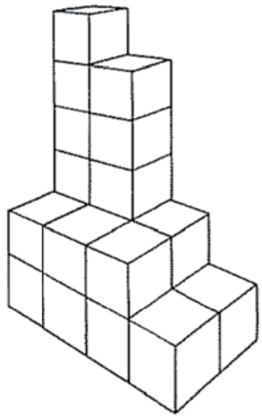
2D to 3D transformation (SV)

Tareas **E02**

Realizar/comunicar la representación en perspectiva de un sólido.

(Bishop, 1983, p. 192)

10 Block drawing. *The student was presented with a small wooden block made of 1-cm cubes. Twenty-one cubes were used and the student viewed the block in this orientation presented in Schema 6 6 The student was first asked to sketch the block as it appeared to him. Then he was asked to sketch how it would look to the experimenter sitting on the opposite side of the table*



SCHEMA 6 6

(Colmez et Parzysz, 1993, p. 39)

La tâche demandée est le dessin soigné de la pyramide présentée par l'enseignant, la consigne étant: *Faites un dessin soigné d'une pyramide comme celle qui est sur le bureau, de façon qu'un de vos camarades, en voyant le dessin, puisse reconnaître un tel objet parmi d'autres solides posés sur une table.* Tous les instruments de dessin sont autorisés.

(Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991, pp.242-243)

Activity 3 had two parts. First, students were asked to draw a solid (different from those of the collection) that satisfied the following conditions and to describe it with words.

1) It has exactly 8 short equal edges and 4 long equal edges.
2) There are exactly 3 different-sized angles formed by the edges.
3) At least 2 of the short edges are parallel.
4) Every face is parallel to another face.
5) All the long edges are parallel.

Then, the students were asked to identify the smallest set of the conditions that determined the figure and to justify their answer.

(Hazama & Akai, 1993, pp.161-162)

Tasks: Pupils were asked to represent each of 4 types of models of 3D-figures and to convey spatial information of each of them to his/her friends staying far from here.

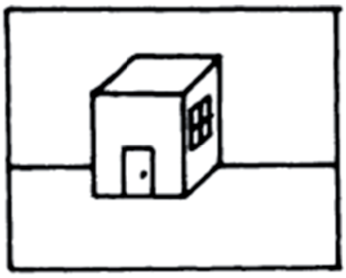
Instruction to pupils: "Here is a set of 4 types of models for each of you. You will receive them one after another. You would like to represent what you have on a sheet of paper and
transmitir
to convey the suitable representations so as to identify them to one of your friends staying far from here. You may give your explanations using drawings, words or symbols, as you wish."

Material: (1) wooden cylinder-models with a diameter of 5 cm and hight of 8 cm,
(2) wooden cuboid-models with edges of 5 cm, 5 cm and 8 cm,
(3) wooden regular-pyramid-models with edges of the base of 5 cm and hight of 8 cm,
(4) for 1st and 2nd grades: framed unit cube made of steel sticks and rubber holders,
for 3rd and 4th grades: framed cubes which 2×2×2 unit cubes will fit into,
for 5th and 6th grades: framed cubes which 3×3×3 unit cubes will fit into.
(Latter two models were called "jungle-gym" by pupils.)

Procedure: First each pupil received a cylinder-model. After he/she perfomed the task, he/she received a cuboid model, and so on.
Whole time for performing all tasks: about 50 minutes.

(Mitchelmore, 1978, p. 231)

She gave 27 classes of elementary school children the task of drawing a model house which was in the form of a cube.



(Mitchelmore, 1978, pp. 232, 235) y (Mitchelmore, 1980a, pp. 83-84)

Five wooden models were constructed: a cuboid (rectangular prism) measuring 10 cm × 5 cm × 2½ cm, a cylinder of height 5 cm and diameter 5 cm, a square pyramid of height 5 cm and base side 5 cm, a cube of side 5 cm, and a cone of height 5 cm and diameter 5 cm. The models were positioned in that order in a box 70 cm long and fixed to the base. The solids were in separate compartments, each with its own lid, and the numbers 1 to 5 were painted on the outside of each lid. The models were painted in various enamel colors; the box was painted matt white inside and out. By means of chin rests attached to extension arms, the viewing distance was kept near 50 cm (for the closest solid) and the angle of elevation near 30°. From this position, four of the five models appeared as shown in the last row of Figure 2; the cone had its axis vertical and its vertex at the top.

3. *Procedure*

Two conditions were used. In Condition 1, *S* saw each solid for about one second and then drew it from memory. In Condition 2, each solid was displayed while *S* drew it, with no time limit. Each *S* drew all models under Condition 1 and then without a break drew them all again under Condition 2. In both conditions, *S*s were instructed to draw each block exactly as they saw it and to make their drawings "look solid, like a photograph."

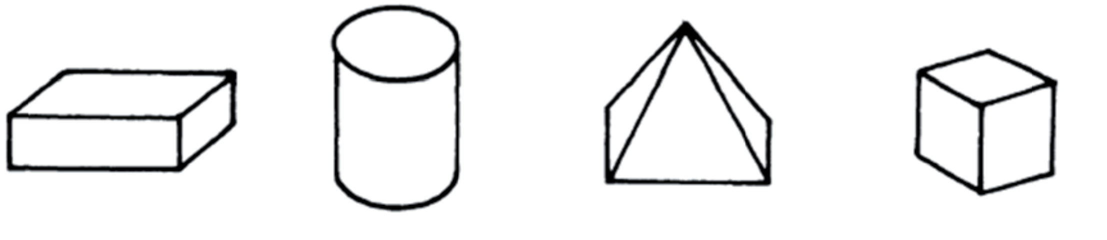


FIGURE 2

(Parzysz, 1988, p.84)

A close representation of a square-based regular pyramid is used, consisting of a 'skeleton' made out of wooden sticks (the edges were 15 cm long, the height 20 cm, and the square section of the sticks 4 mm). The teacher describes it, and asks the pupils (after having removed it from their sight) to make a drawing

(Pittalis, Mousoulides & Christou, 2009, p. 387)

Task 2: A plastic cube was placed in front of students and they were asked to observe it and draw it. Based on students' drawings, appropriate questions were raised. For example, in the case that a student drew the cube in a transparent view, we asked him/her whether he/she could match the edges that appeared in the drawing with the edges of the concrete cube. In addition, students had to identify parallel and perpendicular edges in the drawing and explain why some edges that intersect perpendicularly appear in a different way in the drawing.

Tareas **E03**

Dibujar/completar representaciones planas de sólidos. Dado un sólido (representaciones física, papel, o en la pantalla del ordenador) dibujar una representación plana (vistas laterales, vistas laterales codificadas, isométrica, etc.) Dado un tipo de representación plana hacer otra representación, o dada una de las vistas del objeto dibujar/completar otra diferente.

(Battista & Clements, 1996, p.270)

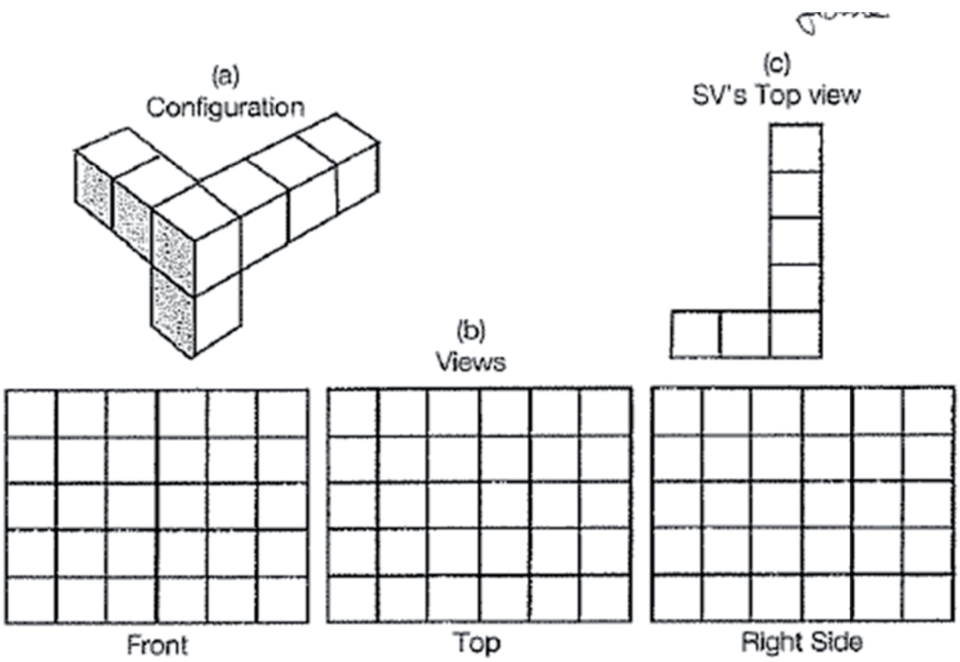


Figure 5 **SV's drawing of the top view of a cube configuration**.

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 55)

Type V. Given the base and the two-dimensional front and right views of a building, the task is to find the map plan that can be completed to fit the building or that fits the building with a maximum or minimum number of cubes.

(Cosío, 1997, p. 209, 211)

Ítem nº3

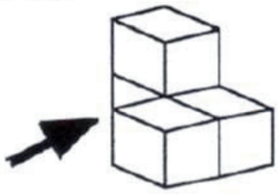
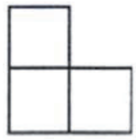


Fig. 1

Supongamos que tu observas la forma de la Fig. 1, mirando en la dirección que indica la flecha. Tú vas, entonces, a percibir la figura siguiente :



Supongamos ahora que tú observas la forma de la figura A, de manera que tus ojos miren en la dirección de la flecha. En el rectángulo de respuesta dibuja con el lápiz la figura que tú observas ahora.

RESPUESTA

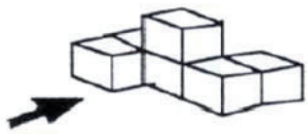


Fig. A

Ítem nº7.

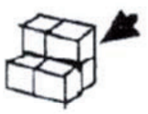
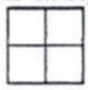


Fig. 1

Supongamos que tú observas la forma de la fig.1 mirando según la dirección de la flecha.Tu vas entonces a percibir la figura siguiente :



Supongamos que tú ahora observas la forma de la fig.A, de manera que tus ojos miran en dirección de la flecha Dibuja la figura que tú percibes en el cuadro de respuesta.

RESPUESTA

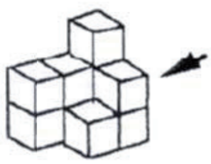


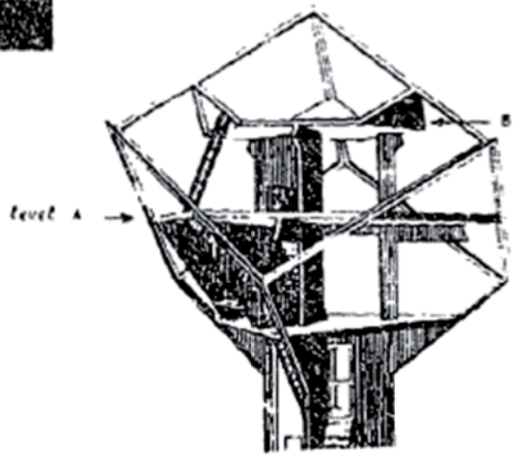
Fig A

(Gaulin, 1985, p. 65)

Cubehouses do exist. In different towns in Holland (Rotterdam, Helmond) you can find them.
Some inmates of these houses suffer from balance-problems, but otherwise these houses are very comfortable and cozy.

a. Draw the top-view of such a house.
b. As you can see: there are three floors.
   Draw the top-view of the floor of the cube at the A-level.

Cubehouses
architect P. Blom)



(Gutiérrez, 1991, p. 49)

C) <u>Dibujar representaciones planas de sólidos</u>: Los estudiantes debían dibujar sobre papel representaciones de sólidos dados (reales o del ordenador). Las representaciones isométricas se dibujaban sobre papel punteado, con el fin de hacer el trabajo de dibujar más fácil a los niños, mientras que los otros tipos de representaciones se dibujaban sobre papel blanco.

(Gutiérrez, 1992, p.38)

C) A set of Multilink cubes and several modules made of such cubes, used to study the three plane representations: Isometric, side views, and numerical views (**Figure 6**).

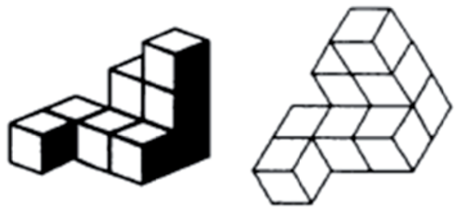


Figure 6

(Gutiérrez, 1996c, p. 36)

- Given several modules, the students had to draw the different types of their plane representations. Usually we provided students with real modules, although some times we provided them with perspective views of modules on the computer; in this case, the modules could be freely rotated, so students were able to watch the modules from any position they liked.

We proposed to our pupils a third kind of activity, in which they had to relate two different types of representations, without building the module. For instance, given the isometric view of a module, students were asked to draw the representation of the module by layers.

(Gutiérrez, 1998a, p. 199)

La siguiente transcripción corresponde al diálogo mantenido con una estudiante de 6° curso cuando ésta intenta dibujar el módulo multicubo de la Figura N° 19, que está apoyado en la mesa delante de ella (los números identifican los cubos del módulo durante el diálogo).

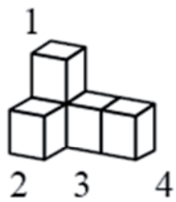


Figura N° 19

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 186-187)

Students are told: 'Here is a view from above (Figure 15). It is a building, made from cubes. The number in each square tells you how many cubes. Draw views from two sides'.

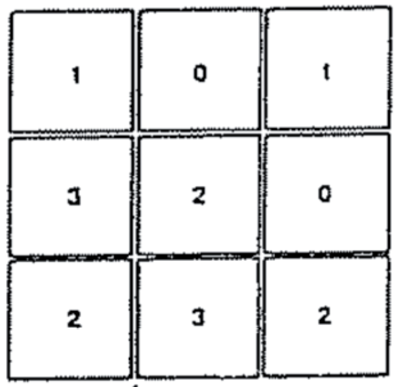


Figure 15. Cube building

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 191)

'Draw views from the front and from the left. How many square tiles with side of 0.5 meter are needed to pave the floor?'

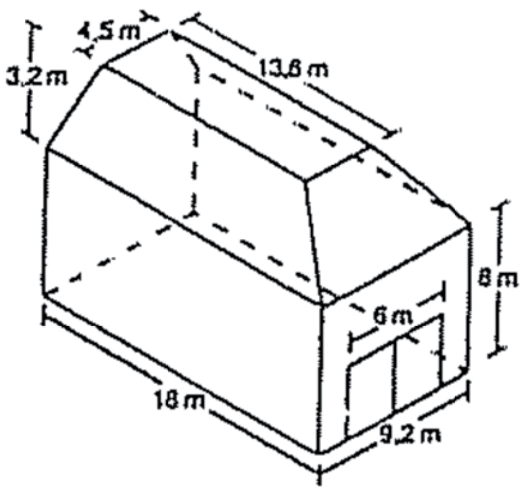
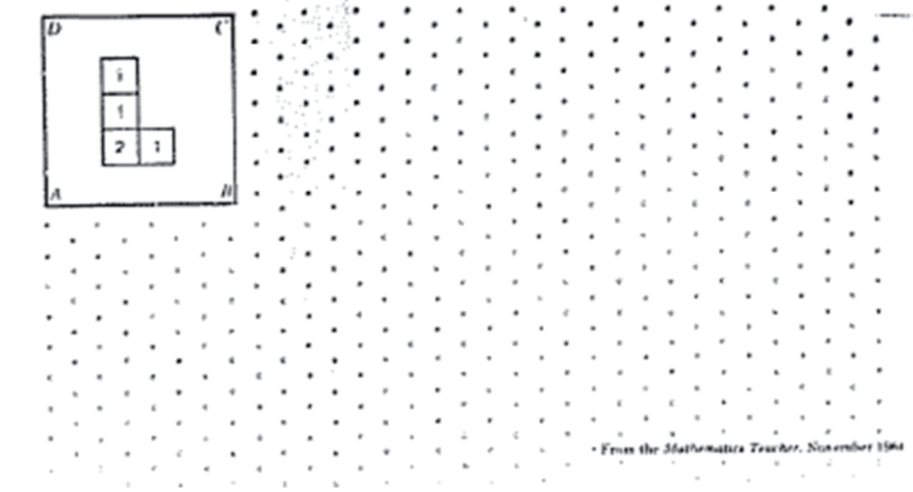


Figure 21 A Barn

(Lappan, Phillips & Winter, 1984, p. 621)

Build the solid shown below and draw views of it from two different corners. For each drawing, indicate the letter of the corner that it represents.



• From the *Mathematics Teacher*, November 1984

(Malara, 1998, p. 242)

(d) Mental reconstruction of the vision of an object and consequent representation

Here are three views of a power station

From the north From the west From the east

Draw what it looks like from the south.

(Olkun, 2003, p. 8)

Then, you can start having them draw the views of their own buildings using squared papers.

(Pallascio, Allaire & Mongeau, 1993, p. 10)

For example, in one activity which involved parallel and central projections (see Figure 8), the model served as a point of reference and a means of verifying the various projections sought (synthetic ◄-► analytic). The students completed their drawings while looking at the model (see Figures 5, 8 and 9).

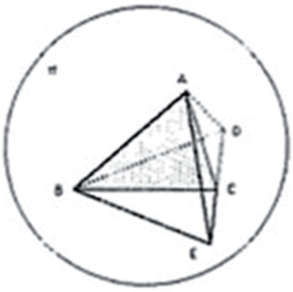


Figure 5
Isometric three-dimensional figures created by reflection

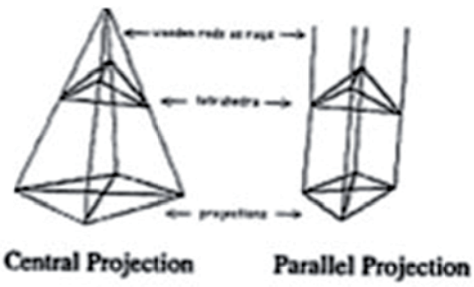


Figure 8
Single-plane projections of three-dimensional figures

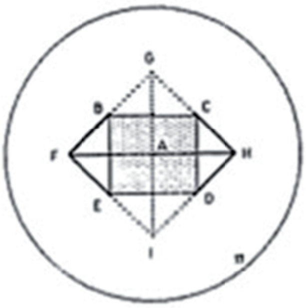


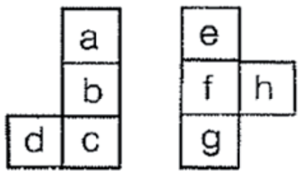
Figure 9
Creation of isometric three-dimensional figures by means of combined symmetry

Tareas **E04**

Construir un sólido a partir de una representación plana dada físicamente o en el ordenador.

(Battista & Clements, 1996, p. 271)

Int: [Pointing to a drawing that looked like the figure below on the left, with the letters deleted] I've put some cubes together to make an object that looks like this if you look at it straight on—like you could see it through my hand [illustrating with his hand]—and like this [pointing to the figure on the right] if you turn it [turning his hand 90°].



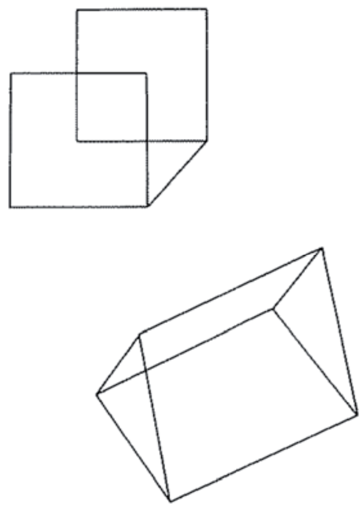
Int: Can you use cubes to make a copy of the figure I have in my hand?

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 55)

Type IV. Given a three-dimensional corner view of a rectangular solid built from smaller cubes, the task is to find the number of cubes needed to build the solid.

(Bishop, 1983, pp. 189-190)

4. Models. *The student was asked to make models from drawings using plasticene "corners" and toothpicks. The drawings were similar to those used by Deregowski (1974)*



SCHEMA 6 3

(de Lange, 1988, p. 49)

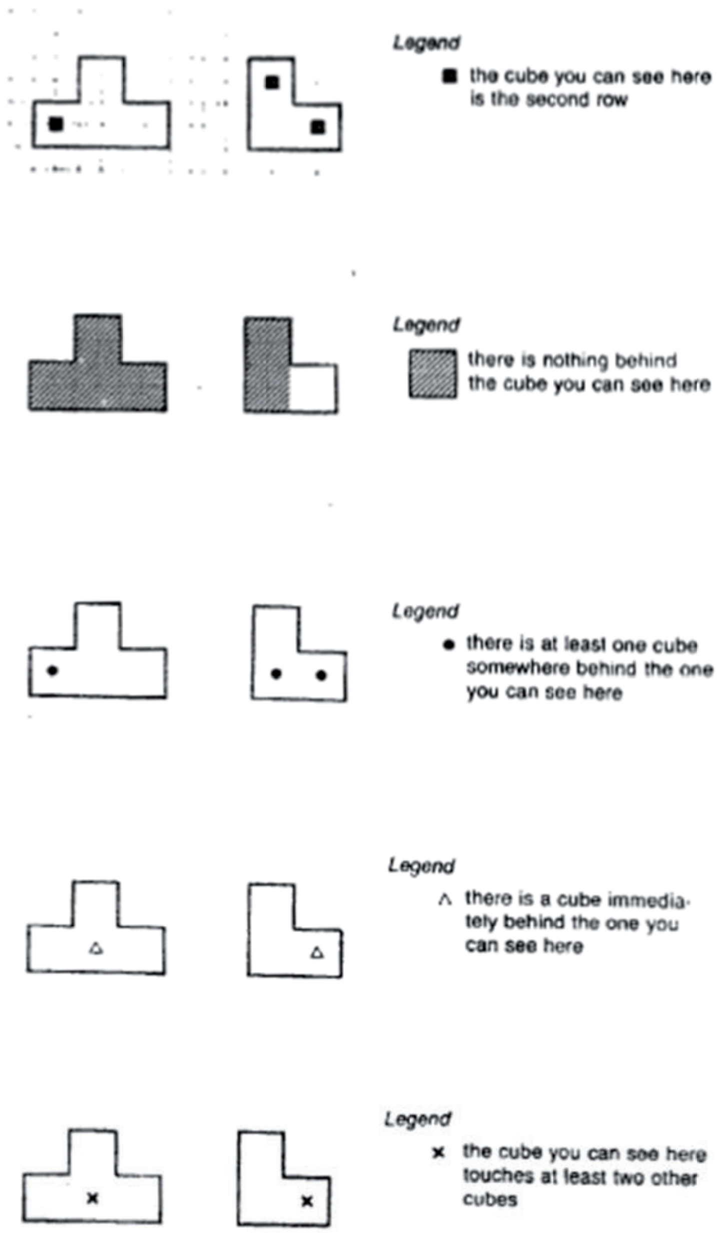
a) Vista frontal b) Vista Lateral

¿cuál es el mismo número de cubos necesarios para hacer esto?

(Gaulin, 1985, p. 56)

EXAMPLE 3: A whole unit is devoted to the representation of polycubicial solids by means of orthogonal projections. In order to make the representation univocal, it is generally necessary to supplement the front or top or side views with more information conveyed via some code. Instead of readily introducing the well known standard code using continuous and dotted lines, we let the students first interpret various non-conventional codes and create their own! For example, using a set of congruent material cubes, they have to try and build the solid corresponding to the two given coded orthogonal views.

56 CLAUDE GAULIN



(Gorgorió, 1995, Anexo p. 11)

Cadascun dels següents dibuixos és l'esquema de construcció d'un objecte a partir de cubs i representa la base de l'objecte. Els números que hi ha a cada quadrat indiquen la quantitat de cubs que s'han d'apilar a cada lloc, "Davant" indica la part de davant de l'objecte. Construeix els dos objectes següents:

4	3	2
3	2	1
2	1	

DAVANT

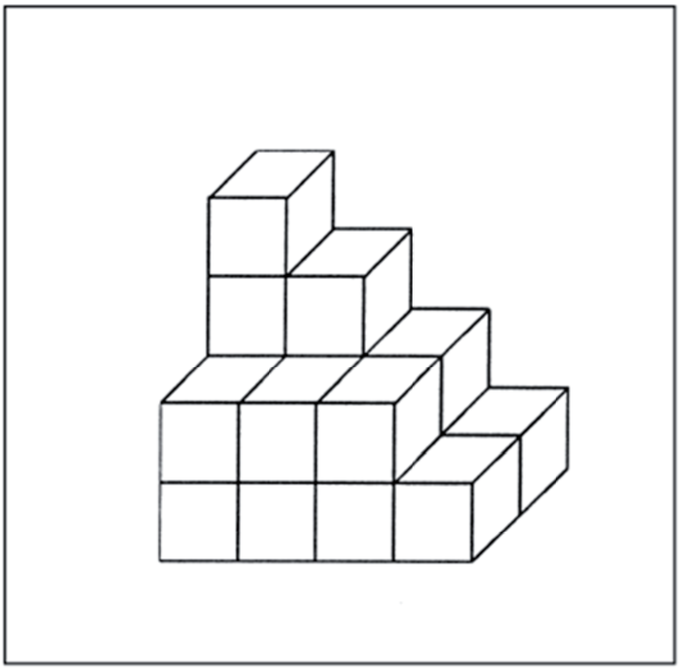
1	3	2
1	2	1

DAVANT

(Gorgorió, 1998, p. 216)

Construct, with the wooden cubes,
the object presented in the figure, as it would remain
after rotating it 180° on its base.

Figure 2.



(Gutiérrez, 1991, p. 49)

D) Construir sólidos: Los niños debían construir con cubos encajables diversos módulos a partir de alguna de las diferentes representaciones planas mencionadas antes, presentadas en papel o en el ordenador.

(Gutiérrez, 1992, p. 17)

C) Activities asking to build modules made of Multilink cubes from given plane representations (isometric, side views, or numerical views).

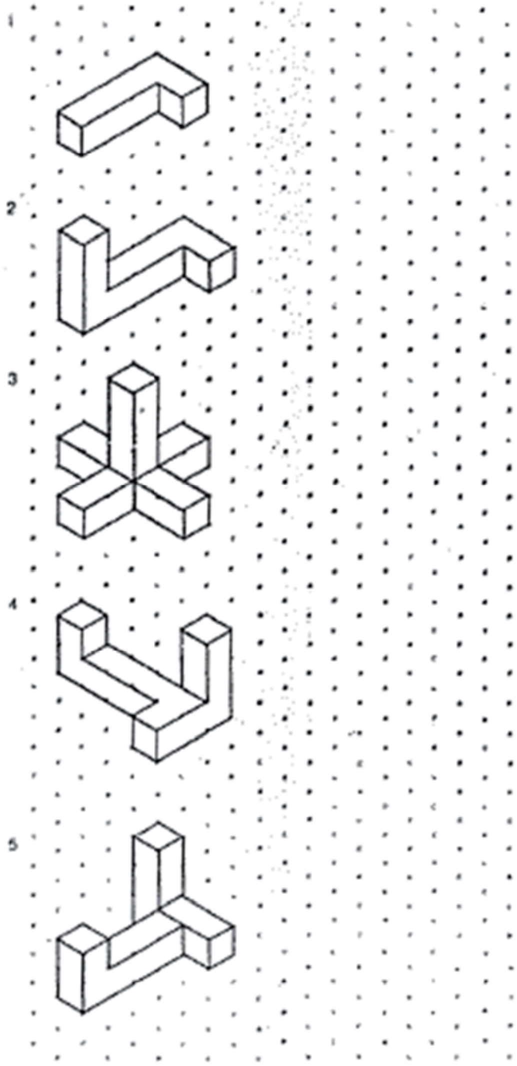
(Gutiérrez, 1996c, p. 36)

- Given different plane representations of modules, the students had to build the corresponding physical modules.

(Lappan, Phillips y Winter, 1984, p. 619)

For each solid shown, do the following:

- Build the solid from cubes.
- Copy the drawing.
- Count the number of cubes used in the drawing.
- Check your count from the solid.



Number of cubes ______

Number of cubes ______

Number of cubes ______

Number of cubes ______

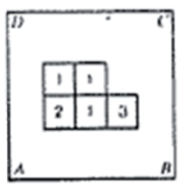
Number of cubes ______

From the Mathematics Teacher, November 1984

(Lappan, Phillips & Winter, 1984, p. 622)

Build a solid on a piece of paper using the following plan:

- Label the corners of the paper *A*, *B*, *C*, and *D*.
- Position the paper as shown, with corners *A* and *B* at the bottom.
- Build the solid using cubes. The numbers tell you how high each stack of cubes should be.



Build the solid shown below and draw views of it from two different corners. For each drawing, indicate the letter of the corner that it represents.

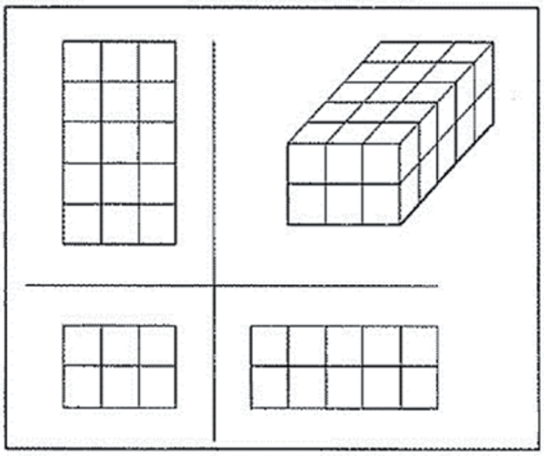
(Olkun, 2003, pp. 6-8)

Activity 1. Let's make a rectangular building

By using small cubes, have the students build the rectangular solid shown in Figure 3. Tell them this is a solid building with no space in it. Have them discuss and decide which view was taken from which side.

Figure 3

Building a rectangular solid

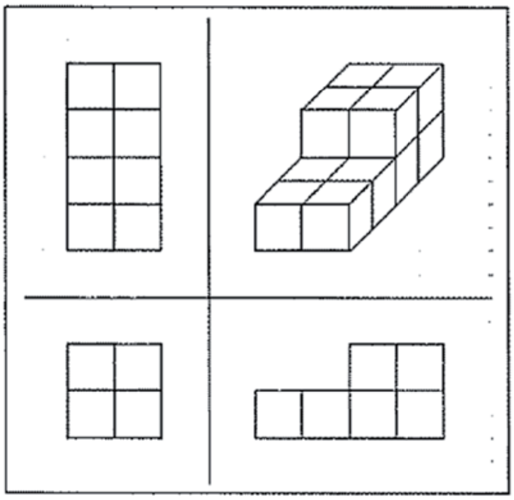


Activity 2. Let's try to make a car

Remove some of the parts from the building to make it look like a car, a very familiar object to many students. Then, take a look at the perspective and the corresponding views. Have the students discuss what changed and what remained the same. Destroy the car and have them rebuild it as in the Figure 4.

Figure 4

Make a car

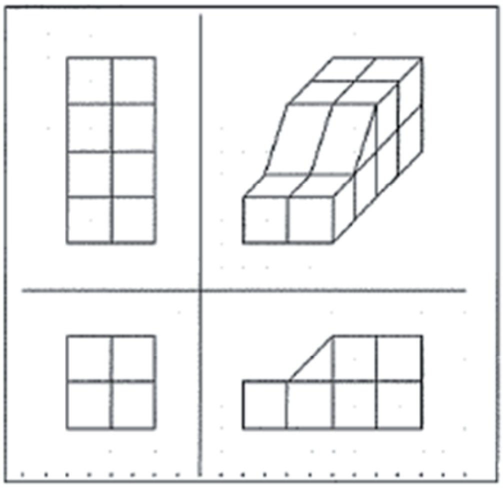


Activity 3. Let's try to make the car nicer

This time try to use triangular prisms to make the front window of the car (see Figure 5). Have the students direct their attention to the fact that an object can be seen differently from different angels. Encourage them to rebuild the car using its drawings.

Figure 5

Make a nice car



After examining concrete buildings and the drawings, students will see that a square face in the orthographic views look like a rhombus in the perspective drawing if it is on the oblique side. Similarly, a rectangular face looks like a parallelogram. An inclined surface in the perspective drawing will look like a little smaller in the orthographic views depending on its slope. In order for students to discover these geometrical transformations, have them find a specific part of the building first in the solid building, then in the perspective and in the orthographic views respectively.

More sophisticated examples: After having students become familiar enough with the conventions, challenge them to build some more sophisticated ones. Some examples are provided below (Figure 6 and 7).

Figure 6

Make a truck

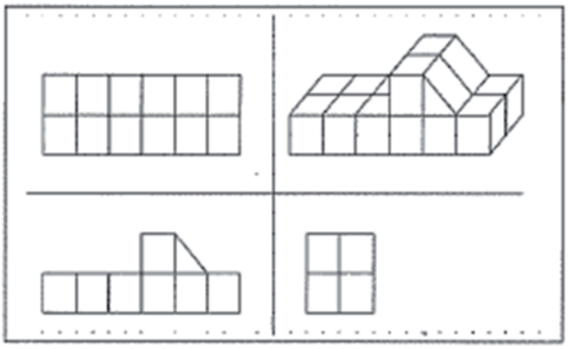
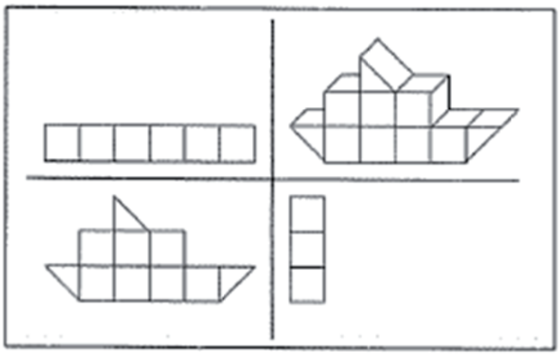


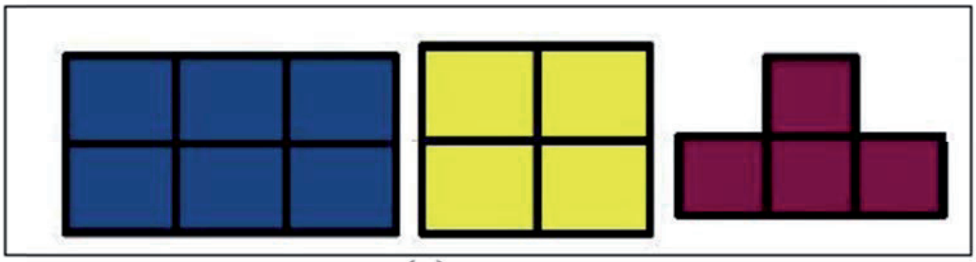
Figure 7

Make a ship



(Pittalis, Mousoulides & Andreou, 2009, pp. 2-3)

The first activity required the students to construct a 3D shape that corresponded to the orthogonal view presented at Figure 1a (with Cubix Editor) and then create its net with the use of Origami Nets.



(a)

(Pittalis, Mousoulides & Christou, 2009, p. 387)

Task 1: The orthogonal view of a 3D object was presented to students (see Figure 1) and they were asked to build a 3D object by using multilink cubes. Before working with the cubes, we asked them to visualise the object and describe it. While working with the cubes, students had to explain their actions. Finally, after the completion of the construction, students had to decide whether they could remove one cube from the construction without altering the orthogonal view of the object.

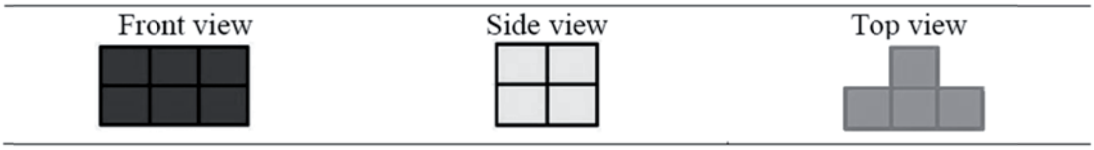


Figure 1: The orthogonal view of the 3D object

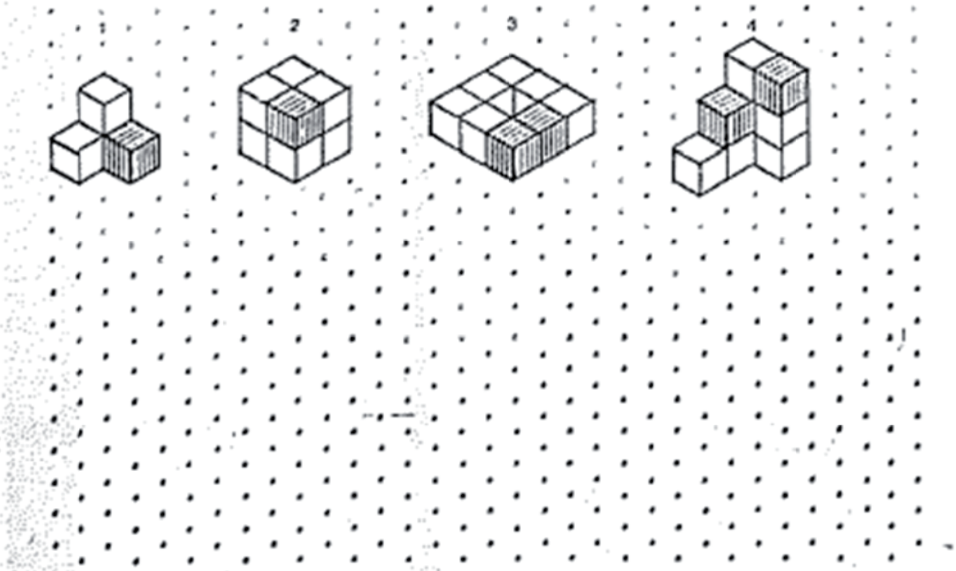
Tareas **E05**

Dada una representación plana de una estructura muticubos, quitar/añadir algunos de ellos e identificar/dibujar/construir el sólido resultante.

(Lappan, Phillips y Winter, 1984, p. 620)

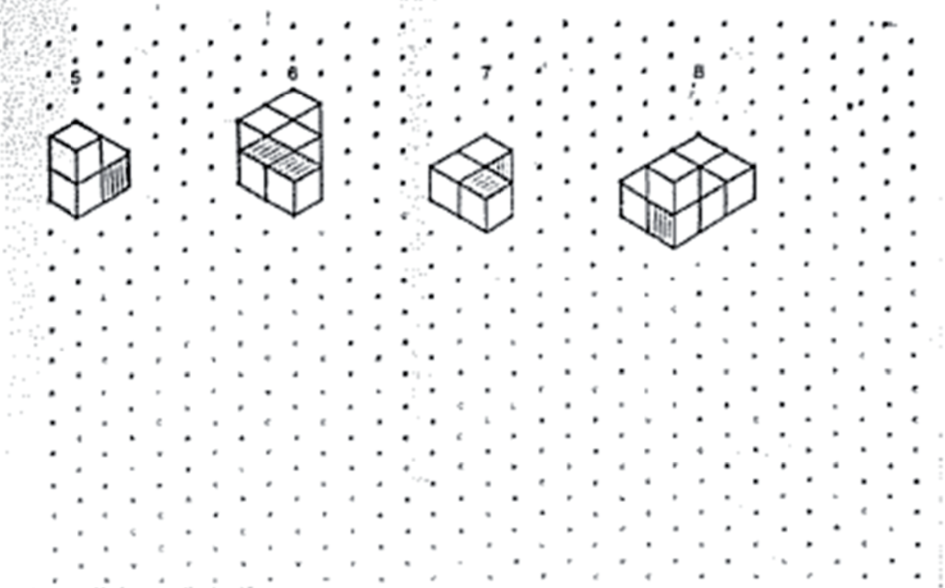
For each of the four solids 1–4, do the following:

- Build the solid.
- Take away the shaded cube or cubes and then draw the remaining solid.



For each of the solids 5–8, do these steps:

- Build the solid.
- Add a cube to each shaded face and then draw the new solid.



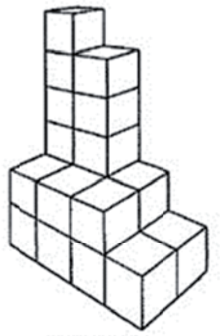
From the *Mathematics Teacher*, November 1984

Tareas **E06**

Realizar/reconocer simetrías de sólidos. Dado un sólido, dibujar/hacer/reconocer una representación plana de su simétrico.

(Bishop, 1983, p. 192)

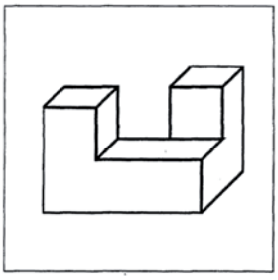
10 Block drawing. *The student was presented with a small wooden block made of 1-cm cubes. Twenty-one cubes were used and the student viewed the block in this orientation presented in Schema 6 6 The student was first asked to sketch the block as it appeared to him. Then he was asked to sketch how it would look to the experimenter sitting on the opposite side of the table*



SCHEMA 6 6

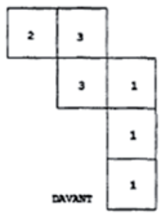
(Gorgorió, 1995, Anexo 11, pp.11-12)

Donat l'objecte 3-A, dibuixa'l tal com el veuria una persona que estes asseguda davant teu.



Objecte 3—A.

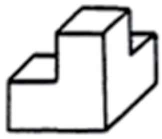
La figura representa l'esquema de construcció d'un objecte a partir de cubs.



Dibuixa l'esquema de construcció que hauriem de donar a una persona asseguda davant teu per que puguessiu construir entre tots dos i al mateix temps l'objecte.

(Gorgorió, 1995, Anexo 7)

20 Quin dels objectes A, B, C o D representa la imatge reflectida en un mirall de l'objecte representat a la figura de la dreta?



A)

B)

C)

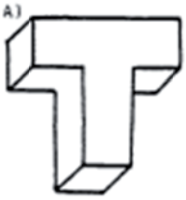
D)

---

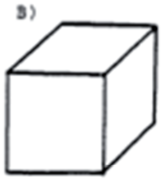
21 Un objecte diem que és simètric respecte d'un pla si aquest pla el divideix en dues meitats de manera que una és la imatge per un mirall de l'altra. El pla s'anomena pla de simetria.

Quin d'entre els següents objectes A, B, C o D <u>no</u> és simètric respecte de cap pla?

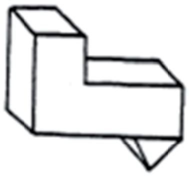
A)



B)



C)



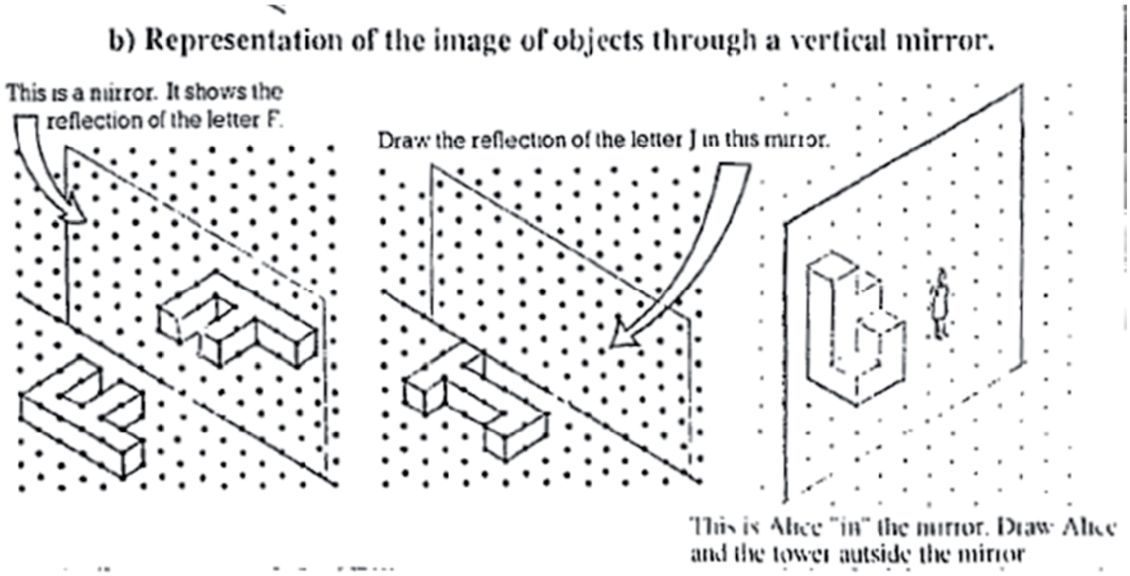
D)

---

22 Quants plans de simetria té l'objecte representat a la figura?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

(Malara, 1998, p. 241)



(Pallascio, Allaire & Mongeau, 1993, pp. 10-11)

For example, using "D-Stix" and rubber joints, an activity was to construct a tetrahedron ABDE symmetrical with respect to a given plane π (see Figure 5, where the triangle ABC is in the plane π), to determine how long the sticks should be, to draw the faces of the resulting object, and to complete the drawing on the basis of the model

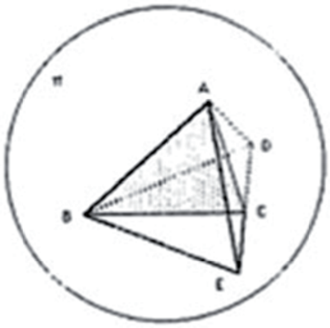


Figure 5
Isometric three-dimensional figures created by reflection

(Sack & Vázquez, 2008, p. 222)

Look at the figure.

When you place a mirror against the structure, you see the structure's reflection in the mirror.

The heavy line shows you where the mirror is placed.

How do you think the structure will look when you see it in the mirror?

Write the numbers for the figure and its mirror image in the grid to the right.

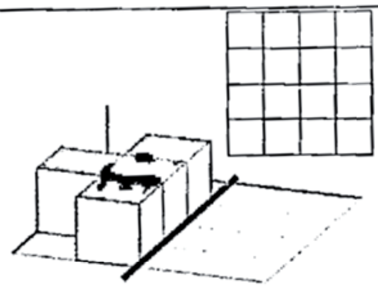


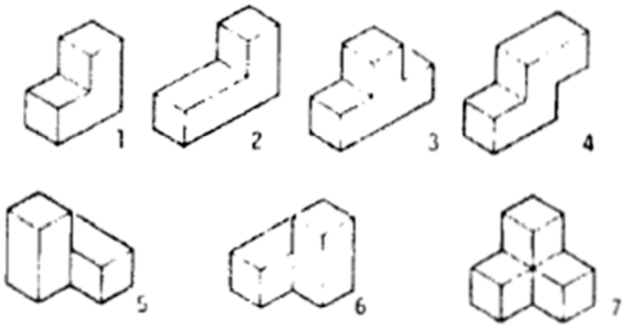
Figure 3. Abbreviated Task 2 from the Geocadabra manual.

Tareas **E07**

Inventar códigos para la representación de formas ortoédricas

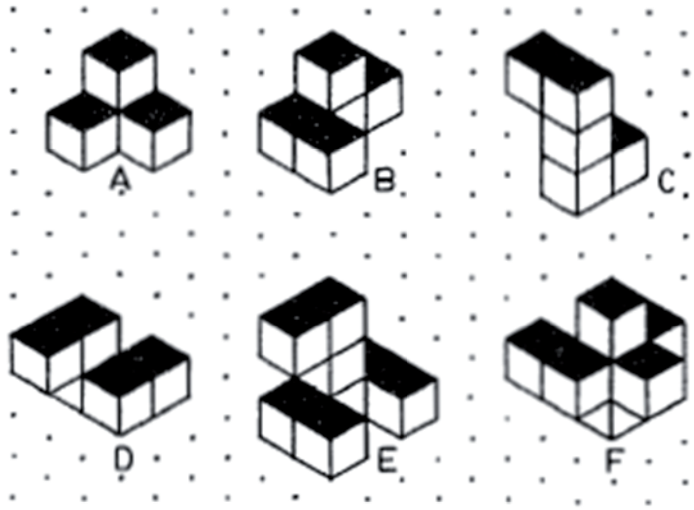
(Gaulin, 1985, p. 53)

EXAMPLE 1: As is well known, the following seven polycubical shapes can be put together to form a 3 × 3 × 3 cube (SOMA cube puzzle, invented by Piet Hein).



After a few exploratory activities, students are shown SOMA cubes already constructed and asked: *Suppose that after long pains you have finally succeeded in assembling the seven pieces into a cube. How could you record your solution on a sheet of paper so that you may easily reconstruct the cube at any time you wish in the future?* This problem

(Gaulin, 1985, pp. 58-59)



years old) and 11th grade (17 – 18 years old). The following task was administered in each of the 21 classes.

Every subject received *one* geometrical solid made of congruent plastic cubes glued together. The six shapes illustrated above were distributed about equally among the pupils of each class.

In addition to one plastic shape, each subject was given a sheet of paper with a brief instruction and plenty of space to answer. Half of the pupils got the following ('algorithmic') instruction:

Imagine that one of your friends lives in France and that he has got a whole box of plastic cubes, all of the same size. Now you would like your friend to build a shape like the one you have in front of you. Prepare a message you could send him so that he can build it. You may give your explanations using words or drawings, as you wish.

while the other half got the following ('descriptive') instruction:

Imagine that one of your friends lives in Ottawa. Near his home, there is a store selling all kinds of shapes made of plastic cubes. Now you would like your friends to go to that store and buy you one shape like the one you have in front of you. Prepare a message you could send him so that he can recognize that shape You may give your explanations using words or drawings, as you wish.

Tareas **E8**

Identificar diferentes vistas de una situación donde intervienen varios elementos. La diferencia con las tareas del punto E01) es que aquí se representan diferentes objetos de una situación (real o imaginaria) y en la otra sólo un objeto.

(Bishop, 1983, p. 191)

8. Camera location *The Eliot–Price test (Professor J Eliot, University of Maryland) consists of a series of photographs taken of a set of small abstract objects placed on a shaped mat. The student was asked to identify the place from which the camera took the photograph*

(De Lange, 1988, p. 55)

Pregunta: ¿ Qué cámara presenta la imagen de la cantante de ópera que se muestra en el cuadro inferior?.

(de Lange, 1988, pp. 55-56)

Se muestra un mapa de parte de las Islas Bermudas:

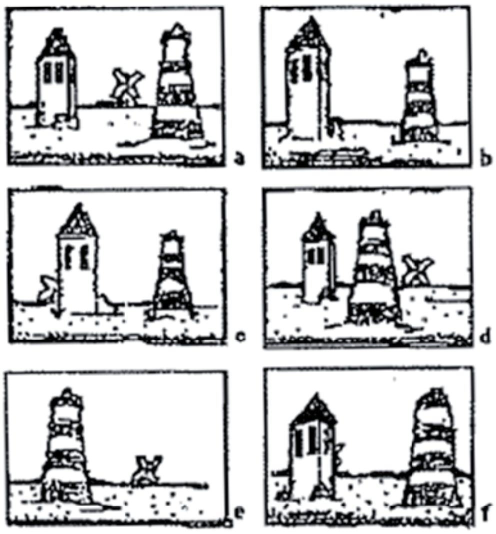
Luego se presentan tres láminas:

Pregunta: ¿Qué dibujo muestra la situación tal y como se ve desde las Bermudas?.

(de Lange, 1988, p. 56)

"El remolcador lleva el yate al puerto. Pasan por la costa cerca del pueblo de Wemelringe. El capitán de las Bermudas reconoce una serie de puntos: La iglesia, el faro, y en la distancia, sobre una duna, ve el molino."

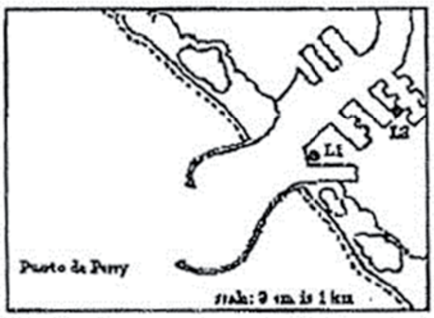
Ahora se presenta una transparencia con 6 fotos.



Son fotos tomadas por el capitán cuando pasaba frente a Wemelringe. Desgraciadamente las fotos cayeron y se mezclaron. ¿En qué orden fueron tomadas?.

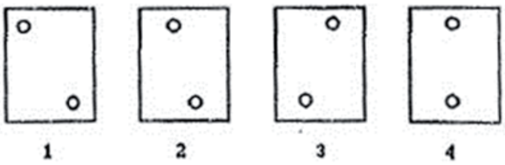
(de Lange, 1988, p. 58)

En la figura vemos un mapa de un puerto. L_1 y L_2 son luces. L_1 está mucho más alta que L_2.



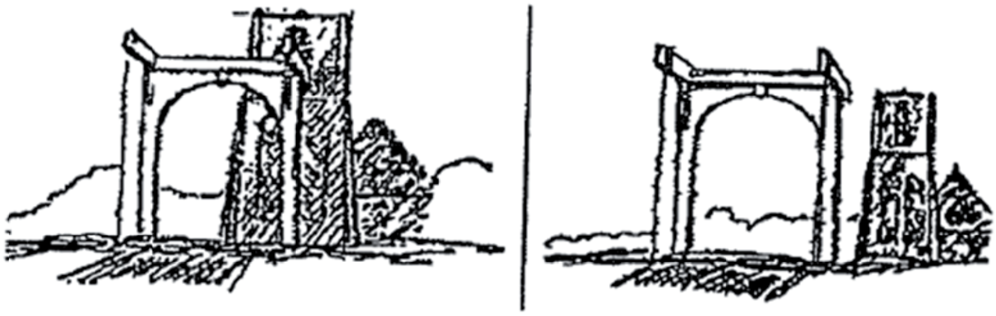
El remolcador Constance y su remolque están llegando al puerto de Perry. El capitán del Constance estima que llegarán a puerto en 15 minutos. Observe de cerca las luces del puerto, epecialmente L_1 y L_2.

Durante los últimos minutos las ve de la siguiente forma:



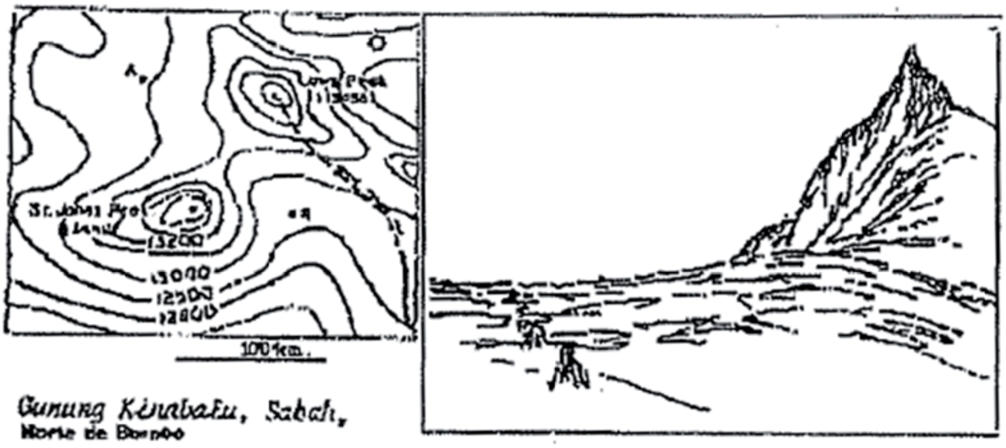
(de Lange, 1988, p. 60)

Dos dibujos:



¿Es la torre más alta que el puente?. Justifica tu respuesta.

(de Lange, 1988, p. 56)

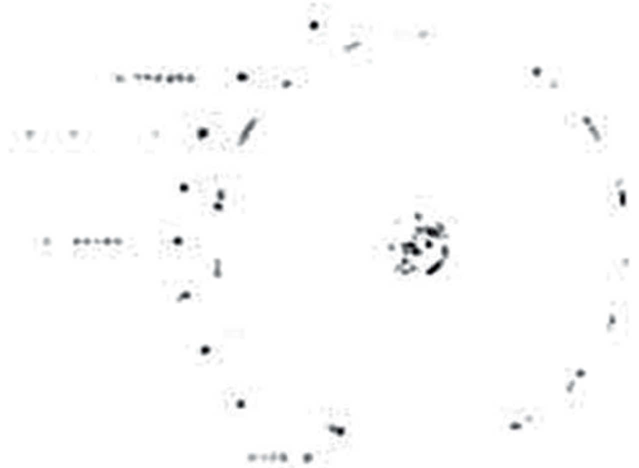


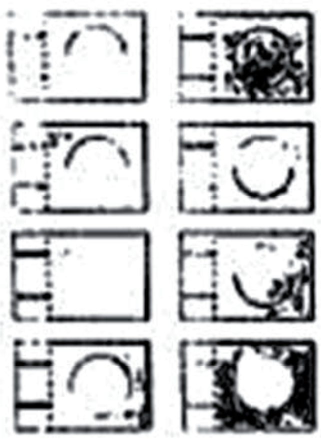
Gunung Kinabalu, Sabah,
Norte de Borneo

-El camino de la foto es Lows Peak
¿Dónde se tomó la foto?.
¿Dónde está el punto más pendiente en el camino hacia la cima?.
-Dibuja la intersección de A con B.
¿Hay un puerto en la zona?.
¿Cómo se haría un camino hacia la cima menos empinado?.

(Gaulin, 1985, p. 59)

▶5▪ On the following page you see the earth from above. The short arrows indicate the journey which the moon covers every 29 days. Cut out the eight faces of the moon from the next page and fold them as shown in the drawing. Pick a spot in the moon's journey and place there the correct moon-face as seen from the earth. Do this carefully for all eight moon-faces. Show it to the teacher and then glue them in place.





"Activities from Shadow and Depth" (OW & OC), Utrecht, 1980.

(Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p. 178)

Objects on the table

Some objects are put on the table and the students are given three photographs of these objects. Each photograph is taken from another direction, but all with the lens on the same height as the table. Students are asked to decide where the photographer stood when each of these pictures were taken.

The singer

A picture is given of a television studio (Figure 7). One sees a singer and four television cameras. Camera A is in front of the singer, camera B looks from the right, camera C from the back and camera D from the left.

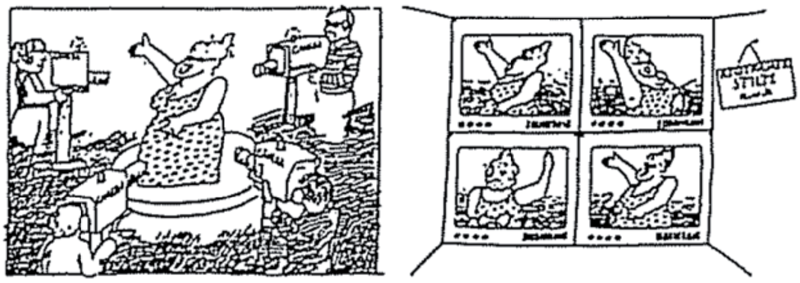


Figure 7. Singer.

There is also a picture of the four monitors in the director's room. Students are asked to play the director and as such they have to know which monitor belongs to which camera.

The viaduct

The students are given a photograph on which we see a viaduct and some persons standing on top of the viaduct. The photograph is taken from the road on one side of the viaduct. We see cars approaching, one of them a big, high van. Some cars are just passing under the viaduct and some are already on our side.

Students are asked questions like: If you were the photographer, would you be able to predict whether the van can pass under the viaduct?

Tareas **E9**

Realizar algún tipo de representación plana (mapas) de una construcción o composición de varias. Se incluye aquí la representación de espacios reales con sus elementos.

(Bishop, 1983, p. 188)

1 Map drawing

a *The student was asked to sketch an outline map of Papua New Guinea and to indicate on it his home, the main towns, and the cardinal directions. Questions were also asked about directions of towns from each other*

b *The student was asked to sketch a map of the university campus showing the route from the student's room to the testing office.*

(Gaulin, 1985, p.57)

EXAMPLE 2: Students are given the topographical map of a familiar area near Quebec City (see page 57). Various questions are asked which require the visualization of peaks, valleys, steep portions of some trails, etc. by means of countour lines and other codes. One of the questions reads: *Imagine that you take a walk from LA DETENTE and that you suddently discover water springing from the ground at the location marked X. Try to draw on the map the path followed by the water. Compare your answers with those of your neighbours and try to agree with them about the path which is the most likely ...* (Subsequently, students are asked to answer the same question supposing that water springs at location 0 instead of X.)

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 180)

In almost the same situation as in the first example, the students are given three photographs, but this time they get the objects in hands and are asked to put them on the table in their relative position They are also asked to draw a map (view from above) of the table with the objects. Then they are asked to indicate on the map where the observer stands in each case of the three pictures and other questions like: Draw what someone would see from one side Where on that drawing would she or he be in order to see the photographer?

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 185)

Students are given a (perspective) picture of a farmhouse (Figure 12) and are asked to draw views from front, right and above like in the singer situation.

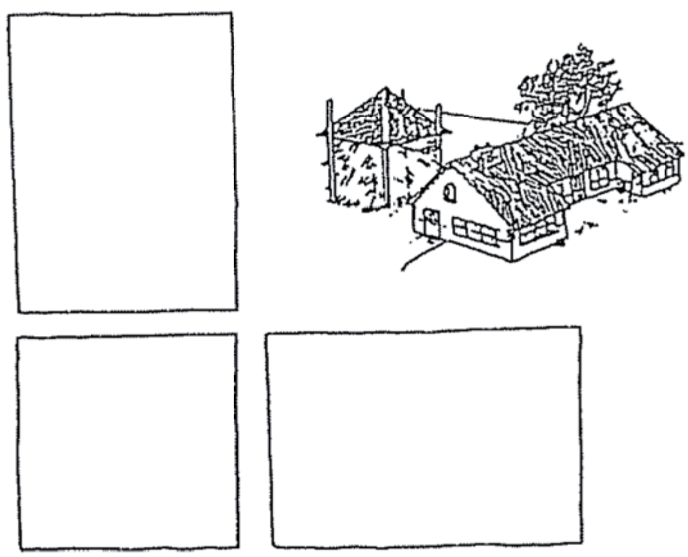


Figure 12. Farmhouse

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 185-186)

Through binoculars, you see from the north and from the south-east, that there are radio-masts on the island. On the map of the island, mark places of the masts with points.

Also draw what you can see through binoculars from the south-west '

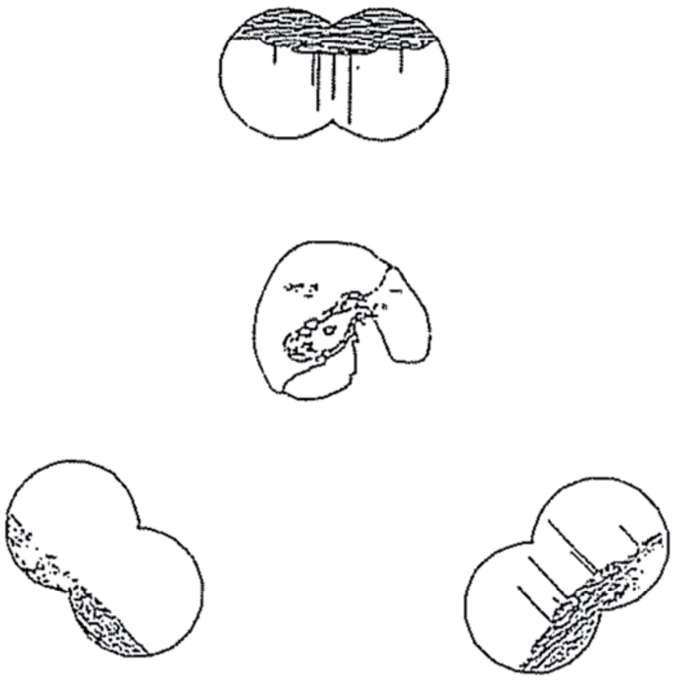


Figure 13 Spying on an island

Tareas **E10**

Reconocer figuras en diferentes posiciones o desde diferentes puntos de vista. Dadas diferentes representaciones, en cualquier tipo de perspectiva, reconocer cuales representan a una figura determinada.

(Gutiérrez, 1992, pp. 39-40)

A typical activity of kind (A) was: *"Open the file "Straw Tetrahedron." Write YES or NO in the following views of solids* **(Figure 10)**, *depending on whether they correspond to the tetrahedron on the screen or not. You can move the tetrahedron if you like."*

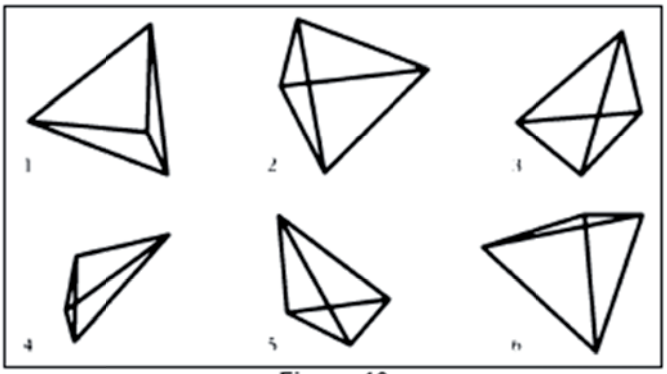


Figure 10

(Gutiérrez, 1996b, pp. 23-24)

Therefore, in order to learn, from a textbook, what is a new kind of polyhedron, students have to create in their minds several images (several "pictures" of the solid, like those in Figure 1) and try to link them,

Figure 1. Independent images of a cube.

Figure 2. Linked images of a cube.

they would be able, for instance, to recognise those pictures in Figure 4 as representations of the same pyramid.

Figure 4. Infrequent images of a pyramid.

(Parzysz, 1991, p. 580)

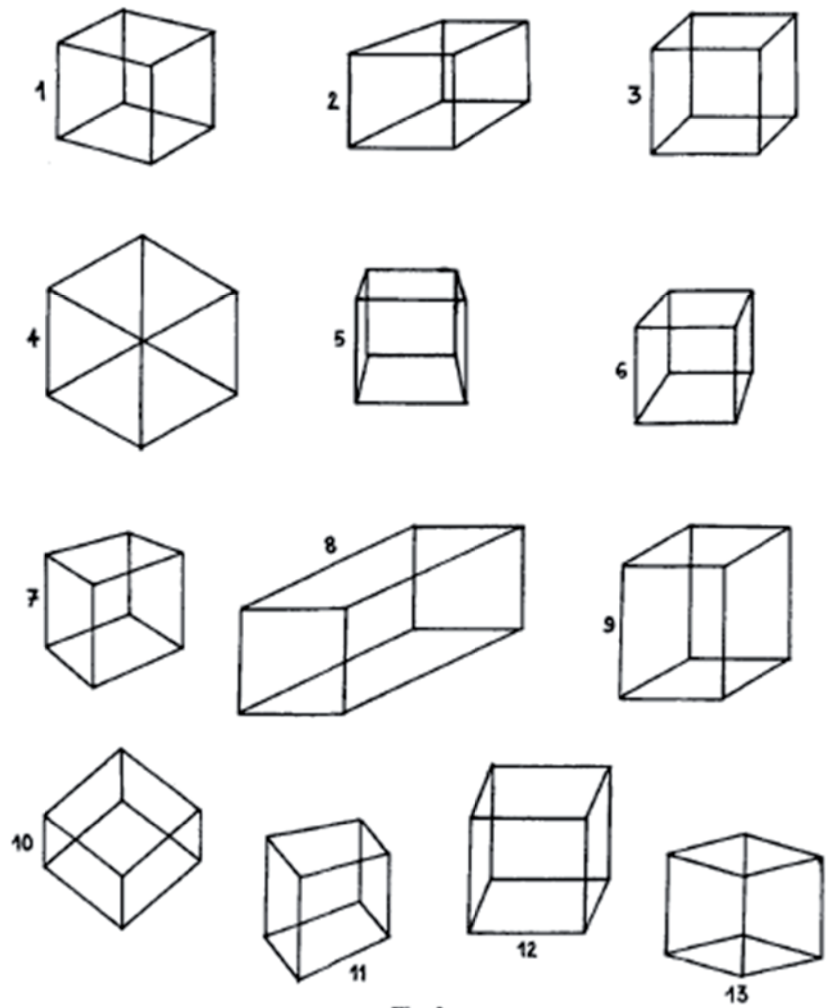


Fig. 3.

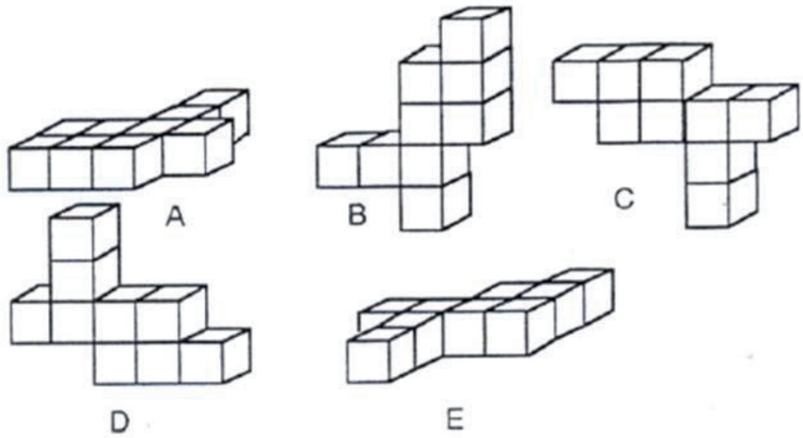
In order to understand what they consider as a "good" drawing of a cube, we presented some to them (Fig. 3), and for each dawing we asked whether they thought it was a suitable representation of a cube or not (the instructions were: "Among the drawings below, point out which ones, according to you, CANNOT represent a cube (reduced to its edges). In each case, please justify your opinion").

Tareas **E11**

Rotar/Mover (mentalmente, físicamente o en un ordenador) un sólido desde una posición actual a otra dada.

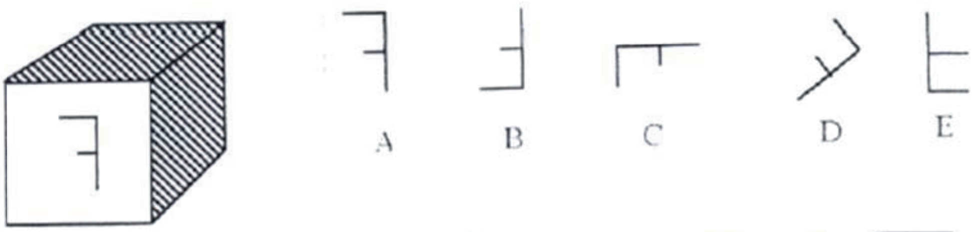
(Cosío, 1997, p. 212)

Ítem nº10. Los dibujos A,B,C,D,E representan formas construidas con cubos de madera del mismo tamaño. Entre estas 5 formas hay una que es imposible de hacer girar en el espacio y llevarla a la posición de las otras cuatro ¿Cuál es esta forma?



RESPUESTA: ☐

Ítem nº12. ¿Cuál de los dibujos A,B,C,D,E pueden ser impreso con la ayuda del tampón de la figura 1.



RESPUESTA: ☐

(Gorgorió, 1995, Anexo VII, p.5)

36 Els daus dibuixats a continuació tenen les cares marcades col.locades de diferents maneres. D'entre les següents parelles només n'hi ha una en la que fent girar un dels dos daus es pot posar en la posició de l'altre. Quina és A, B, C o D?

A)

B)

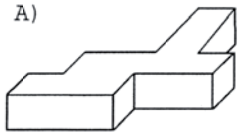
C)

D)

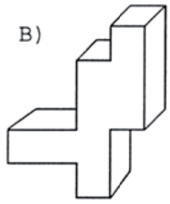
(Gorgorió, 1998, p. 215)

Among the following figures, there are three which represent the same object on different positions. There is one representing an object that, even changing its position, is different from the other three. Which one is it, A, B, C or D?

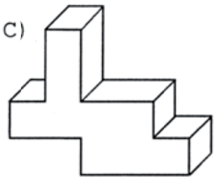
A)



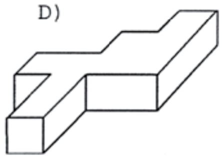
B)



C)



D)



(Gutiérrez, 1991, p. 49)

B) Mover sólidos: Los estudiantes debían mover un sólido (real o en el ordenador) desde su posición actual a una posición dada por otra copia (real, en el ordenador o en papel) de ese sólido. Cuando el sólido que debía moverse era uno real, no había ninguna restricción en el tipo de giros que los estudiantes podían realizar. Cuando se trataba de mover un sólido en el ordenador, el software utilizado marcaba algunas restricciones que comentaré más adelante en detalle.

En un tercer tipo de actividad realizada con estos cubos, se daban a los estudiantes láminas de papel con una vista de un cubo y con varias vistas más de ese cubo en las que había caras en blanco, debiendo los estudiantes dibujar las figuras que faltaban en las caras (figura 7).

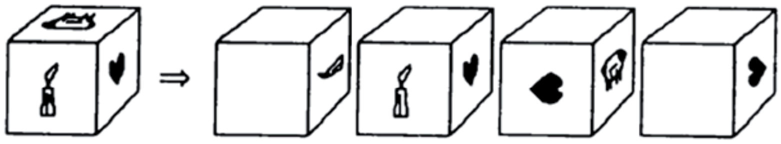


Figura 7.

(Gutiérrez, 1992, pp. 43-44)

In another activity, María had to move a cube on the screen from the position in Figure |16a to the one in Figure 16b. She showed her strategy:

MARÍA: *Of course.*

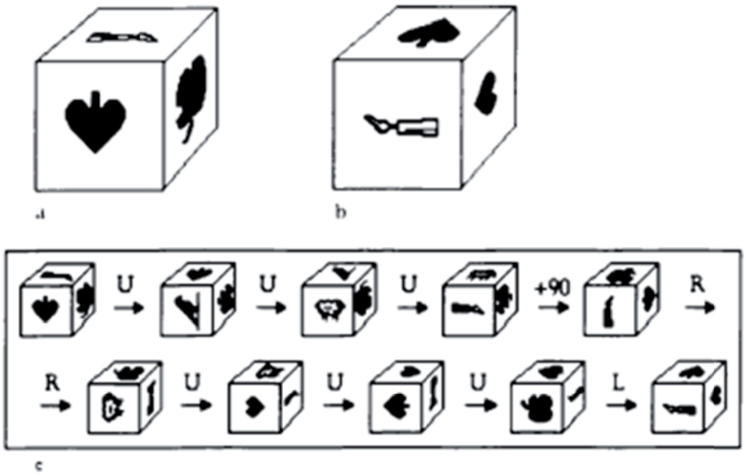


Figure 16

Carmen and Enrique had to move the module from the position in Figure 17a to the one in Figure 17c.

Figure 17

Now she had to move the prism from the position in Figure 18a to the one in Figure 18c;

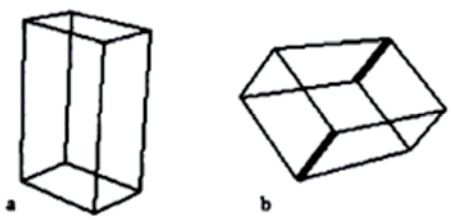


Figure 18

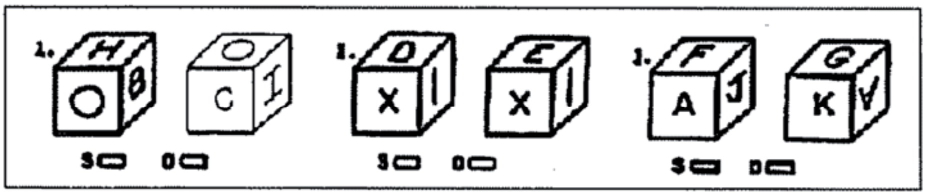
(Gutiérrez, 1996a, p. 13)

One of the tasks presented to the students was to rotate a given figurative cube from its current position to match exactly a picture shown on a sheet of paper. The students were also asked to make the movement with the minimum number of rotations.

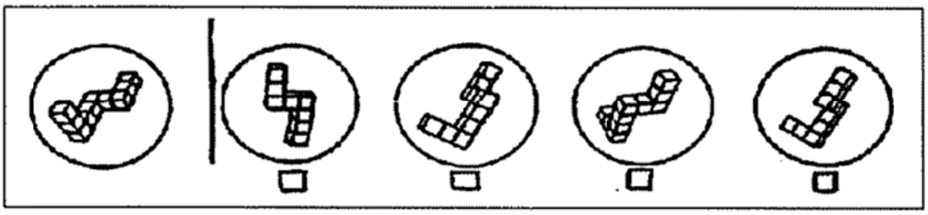
(Gutiérrez, 1996b, p. 29)

Given a polyhedron on the computer and a picture on paper of that polyhedron in a different position, students had to move the solid on the screen to match exactly the position show by the picture.

(Olkun, 2003, p. 10)



Cube Comparison (SR)



3D mental Rotation (SR)

Tareas **E12**

Identificar elementos en la línea de visión de otro.

(Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p. 180)

Cat and mouse

Here is a view from above of a cat and a mouse that tries to hide (Figure 8).

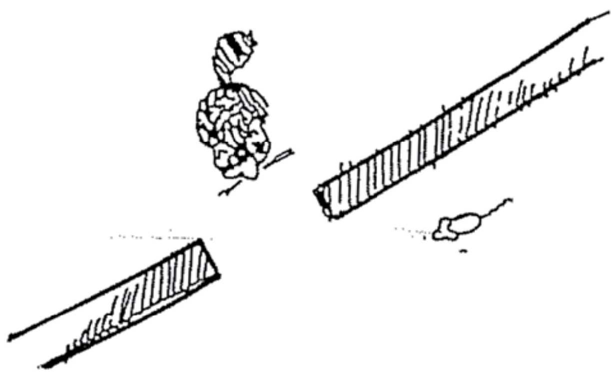


Figure 8 Cat and mouse

- Can the cat see the mouse?
- Where can the mouse better not be?
- If the cat cannot see the mouse, from where should it be possible to see it (assuming that the mouse does not move, of course).

Tareas **E13**

Describir/Realizar trayectos

(Bishop, 1983, p. 188)

The student was asked to sketch a map of the university campus showing the route from the student's room to the testing office.

(Gaulin, 1985, p. 55)

EXAMPLE 2: Students are given the topographical map of a familiar area near Quebec City (see page 57). Various questions are asked which require the visualization of peaks, valleys, steep portions of some trails, etc. by means of countour lines and other codes. One of the questions reads: *Imagine that you take a walk from LA DETENTE and that you suddently discover water springing from the ground at the location marked X. Try to draw on the map the path followed by the water. Compare your answers with those of your neighbours and try to agree with them about the path which is the most likely* ... (Subsequently, students are asked to answer the same question supposing that water springs at location 0 instead of X.)

(Gorgorió, 1995, Anexo 11)

A continuació tens una part del plànol de Sant Cugat. Quines instruccions donaries a algú que situat a la casa del punt A et preguntés com es pot anar caminant fins a la casa del punt B.

(Gorgorió, 1998, p. 215)

In the fourth interpretation task, 4–I, given a part of a map of a town, the student had to describe the route from a given point on the upper part of the map to another given point on its lower part.

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 187)

There are beacons on the banks of a river A ship has to navigate in such a way as to evade sand banks (Figure 14). The captain has to follow a course in which he sees two beacons as one. He has to change course as soon as he sees the next pair of beacons as one. Draw the course of the ship on the map.

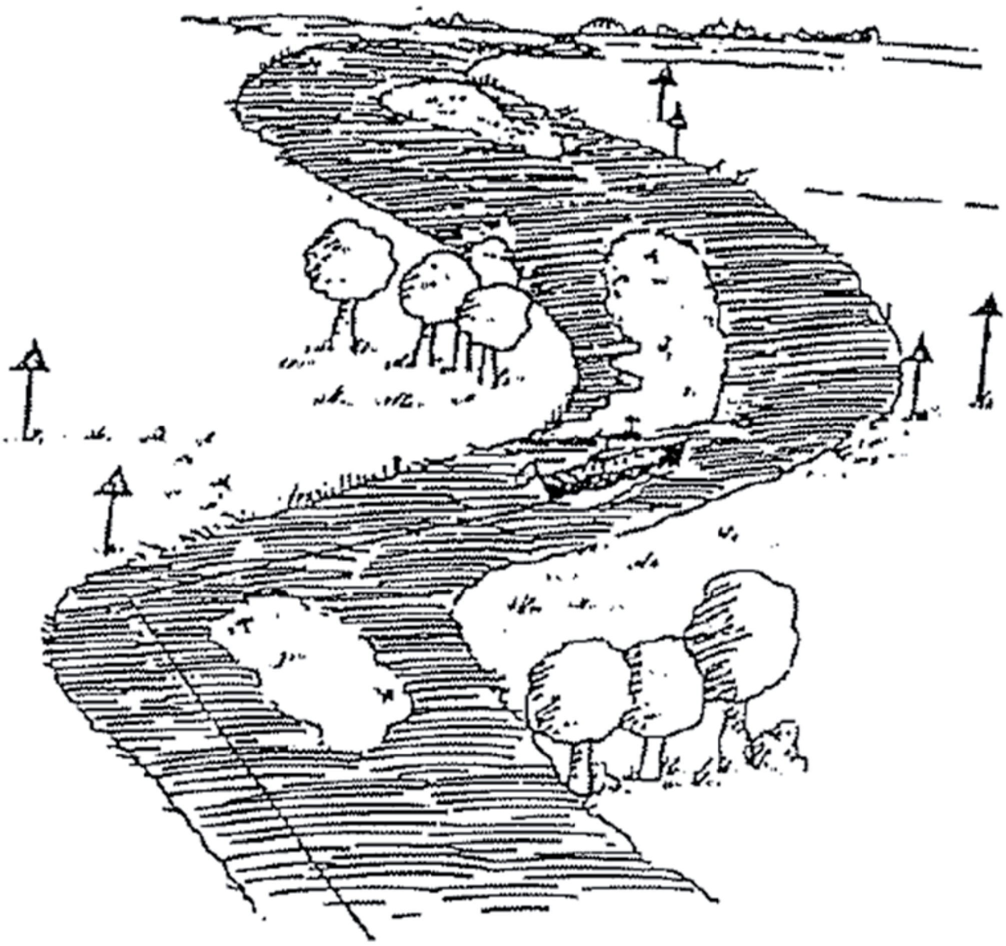


Figure 14. Ship on the river

Tareas **E14**

Componer/Descomponer en partes: dadas dos o más piezas componerla para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes

(Bishop, 1983, p. 192)

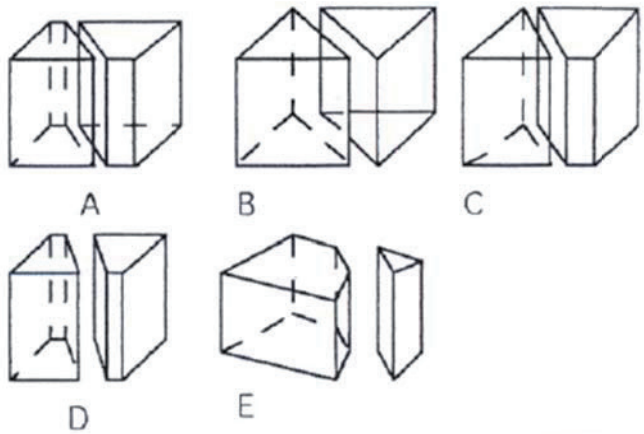
11. Embedded figures. *The subtest "Form Recognition" from Spatial Test I produced by the National Foundation for Educational Research United Kingdom. was used. Fifteen items (untimed here) required the student to identify which of four simple figures were embedded in the more complex ones* This was

(Cosío, 1997, p. 211, 213)

Ítem nº8.

Supongamos que el cubo de la figura 1 se corte en dos trozos siguiendo la línea negra ¿Cuál de las figuras A,B,C,D,E contiene los dos trozos que se pueden obtener?

Fig. 1



RESPUESTA: ☐

Ítem nº14.

Supongamos que se corta un prisma en tres trozos siguiendo las líneas marcadas en la Fig. 1

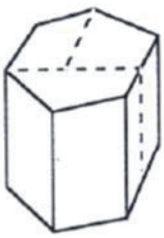
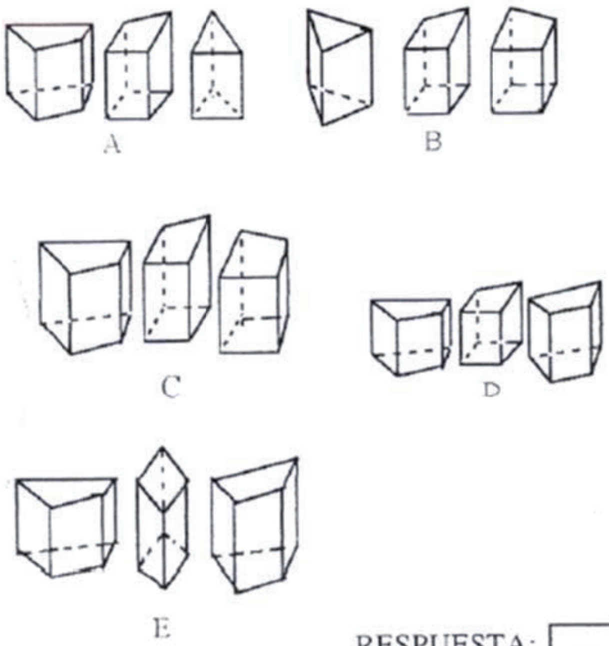


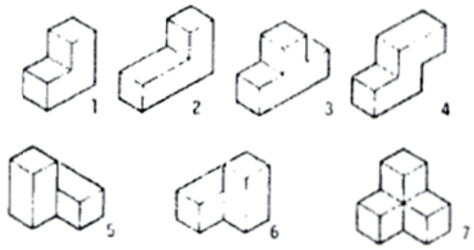
Fig. 1



RESPUESTA: ☐

(Gaulin, 1985, p. 53)

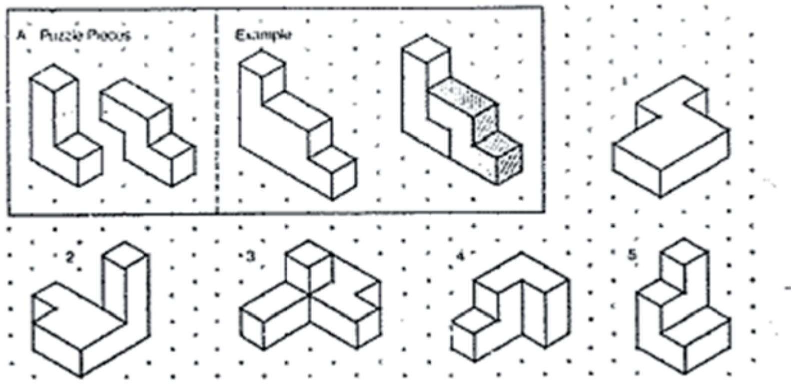
EXAMPLE 1: As is well known, the following seven polycubical shapes can be put together to form a 3 × 3 × 3 cube (SOMA cube puzzle, invented by Piet Hein).



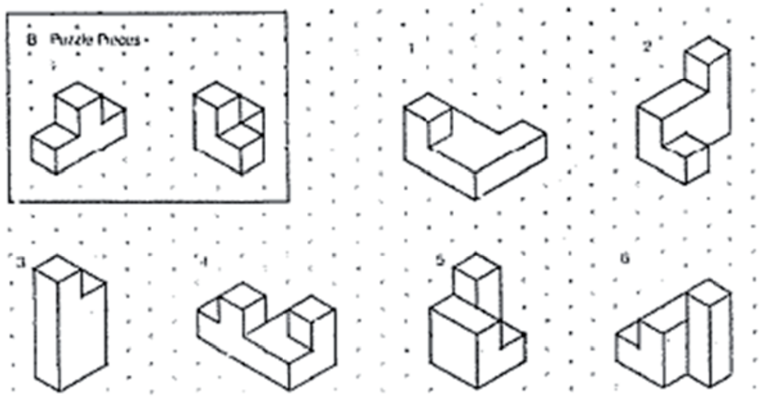
(Lappan, Phillips & Winter, 1984, p. 622)

For parts A and B, construct the puzzle pieces indicated from cubes attached with tape.

- Use the two puzzle pieces to build each solid.
- Show how you built them by shading one puzzle piece in each drawing.



Find a different way to make a solid from the two puzzle pieces. Draw your solid here. Ask a friend to solve your puzzle. Build and draw a different solid.



(Pallascio, Allaire & Mongeau, 1993, p. 10)

Secondly, it consisted of sectioning a polystyrene sphere, using as few cross-sections as possible, (analytic◄─► synthetic) to create a tetrahedron, the simplest type of polyhedron

(Pallascio, Allaire & Mongeau, 1993, p. 11)

Here the activity consisted in constructing a right quadrilateral prism using four wooden blocks, finding how the quadrilateral prism can be transformed into an oblique prism (analytic◄─►synthetic), and vice-versa, by means of slide transformations and truncation (the solution is to make an orthogonal truncation along four parallel edges), observing the transformations, and formulating a hypothesis on the volume of each object. This is seen as a three-dimensional puzzle, since the primary aspect of the activity is discovery through trial and error. The activity does not allow for free creation as the object is rigid.

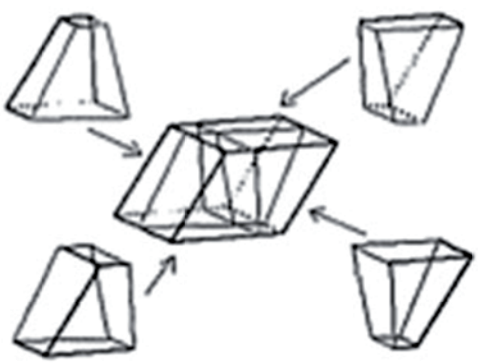


Figure 6

(Pallascio, Allaire & Mongeau, 1993, p. 12)

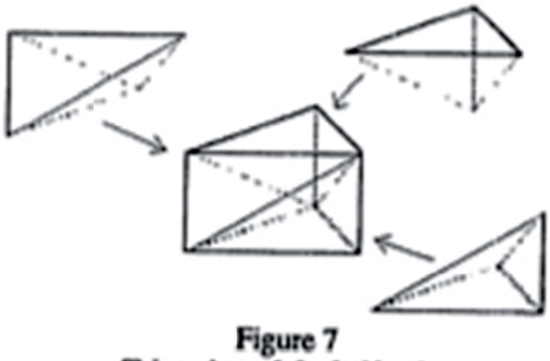


Figure 7
Trisection of the half-cube

Tareas **E15**

Encajar piezas en una estructura. Dada una estructura con uno o más agujeros (hueco) y dadas varias piezas ver cuales podrían colocarse/apoyarse en ella.

(McLeay & Piggins, 1996, p.404)

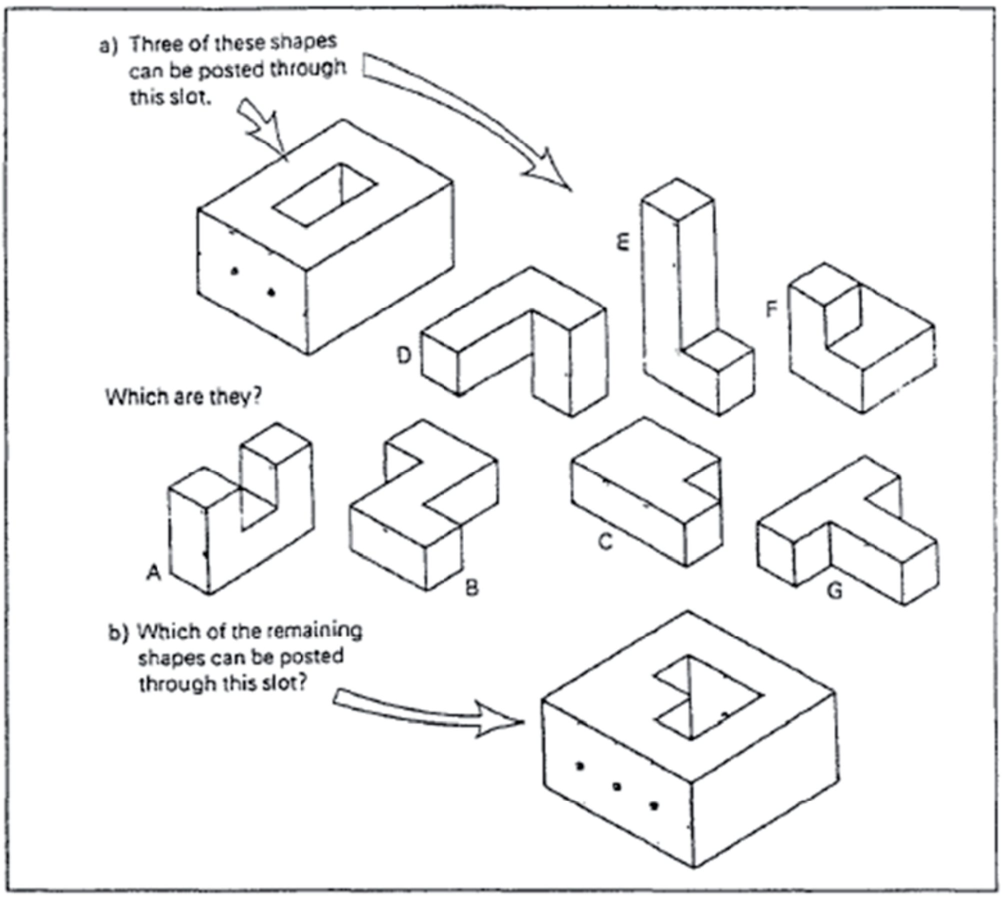


Figure 1. Shepard and Metzler type tasks in *NMP Mathematics for Secondary Schools*

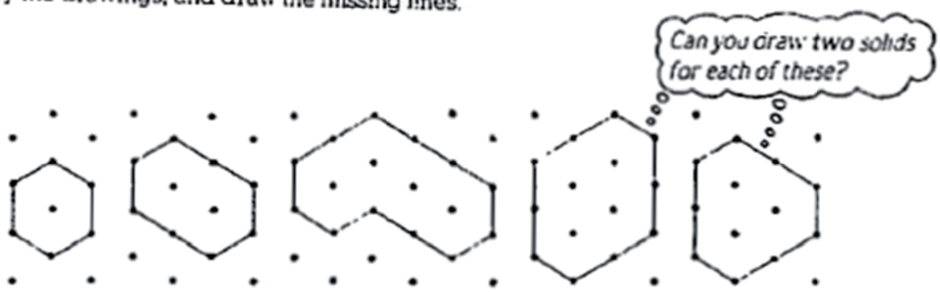
Tareas **E16**

Dibujar/marcar las líneas escondidas para crear un sólido.

(Malara, 1998, p. 242)

(c) Identification of objects and completion of their representation

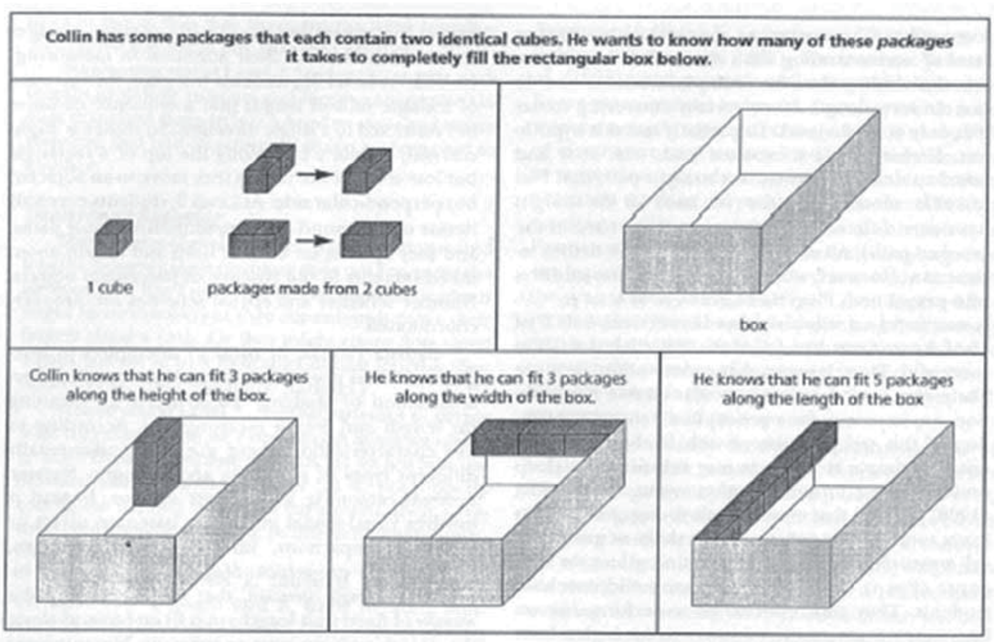
Here are the outer lines of the drawings of some solids.
Copy the drawings, and draw the missing lines.



Tareas **E17**

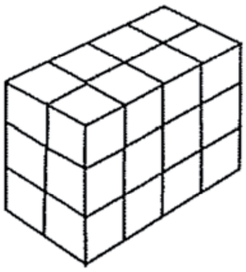
Contar/completar/quitar elementos (enumeración de elementos). Dado un sólido (cualquier tipo de representación plana, físico, en la pantalla del ordenador) contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, diagonales, etc.

(Battista, 2007, p.893)

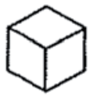


(Battista y Clements, 1996, pp.259-261; 277)

How many unit cubes does it take to make this rectangular solid?

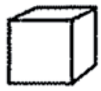


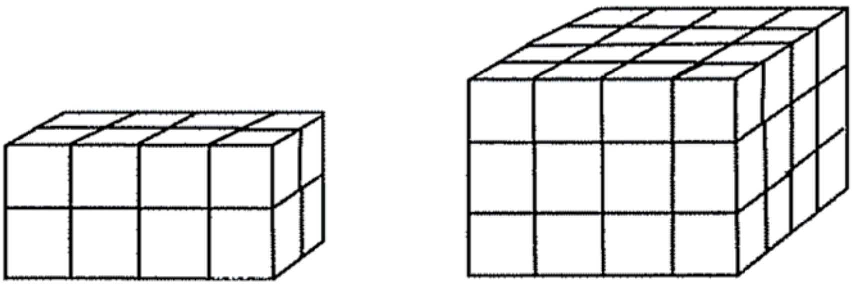
Unit cube



1. [Pointing to picture] This is a picture of a unit cube. How many unit cubes will it take to make each building below? The buildings are completely filled with cubes, with no gaps inside

Unit cube



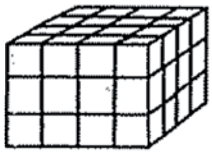


A B

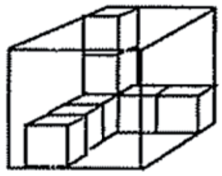
2. How many cubes are in this building? It is completely filled with cubes, with no gaps inside. [Students were shown a 3-by-4-by-5-cube building made from interlocking centimeter cubes. They were permitted to handle the building, but were not to take it apart.]

1. [Show a multilink cube] This is a cube, and this is how it is drawn [point to picture at right]. How many cubes does it take to make the building below? It is completely filled with cubes, with no gaps inside

Cube

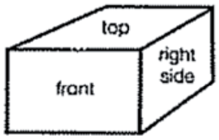


2. If we completely fill the box below with cubes [point to outer box], how many cubes will be in the box?



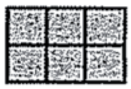
3. [Show a multilink cube building that is four by four on the bottom and three high. Place it in an open box, with one face untaped.] These cubes completely fill the paper box. How many cubes are there? [Take the cube building out of the box. Students can touch the cubes or the box, but can take neither apart.]

4. Suppose we completely fill the rectangular box below with a rectangular cube building. The box is transparent, so you can see the building through the box's sides.



After we fill the box, we look straight at the building from its front, top, and right side. [Indicate orthogonal viewing lines with a pencil.]

From the *front*, it looks like this. [Indicate figure at right.]



From the *right side*, it looks like this. [Indicate figure at right.]

From the *top*, the building looks like this. [Indicate figure at right.]

A. How many cubes does it take to make the building?

B. Can you make the building with cubes?

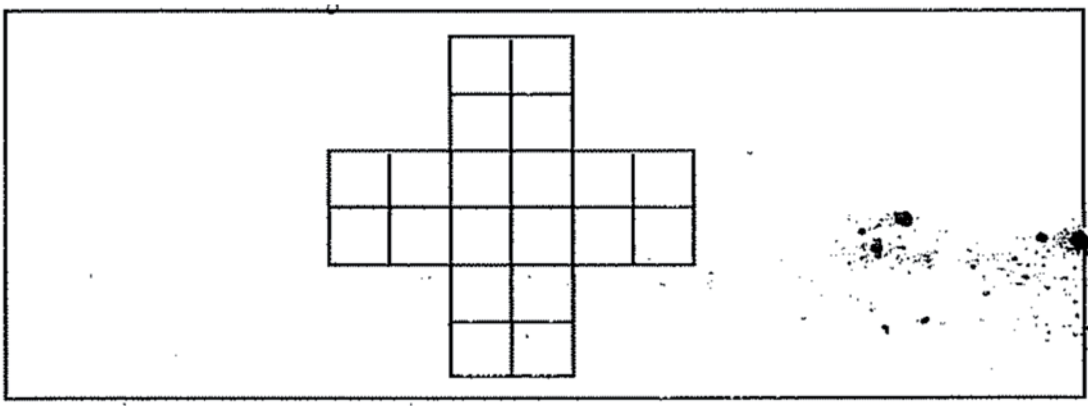
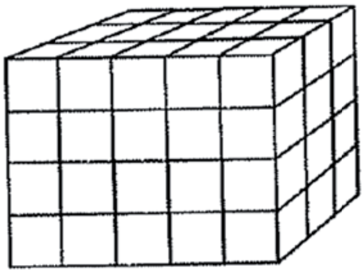


Figure 7. How many cubes fit in the box made by this pattern?

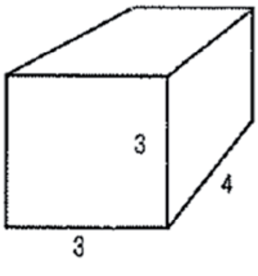
(Battista & Clements, 1996, p.272)

The interviewer showed RA a picture of a 5 × 3 × 4 cube array and asked her how many cubes it would take to build it.



(Battista & Clements, 1996, p.273)

The interviewer showed RA a picture of a box with dimensions marked on it but no squares drawn on the outside.

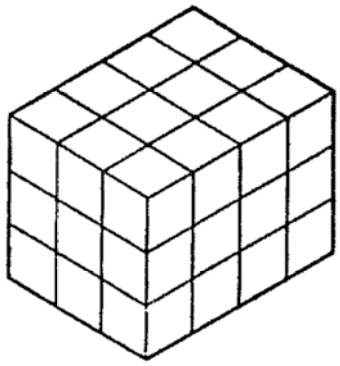


Int: This box contains 3 cubes along the bottom, 3 up from here to here, and 4 from here to here [pointing successively to the three dimensions]. Can you find the number of cubes inside?

Int: Can you draw what the cubes look like on the outside, like in the other pictures?

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1985, p.391, 396)

A rectangular solid is cut into cubes as shown. How many cubes are there?

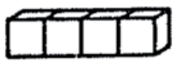


ANSWER ____________________

This is one unit: 

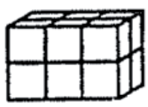
What is the volume of each rectangular solid below?

A.



ANSWER ________________

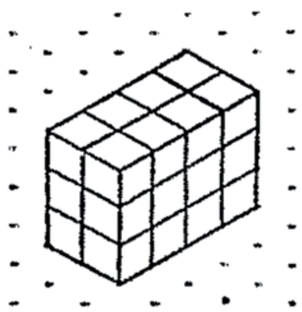
B.



ANSWER ________________

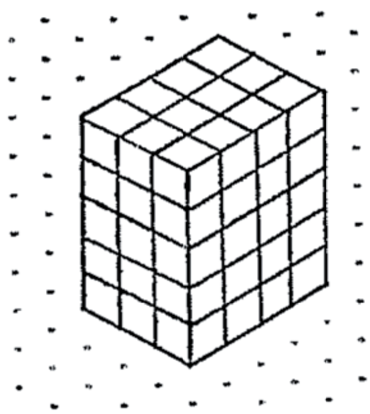
Fig 2. 1977–78 NAEP released items on rectangular solids

10. How many cubes are needed to build this rectangular solid?



A	B	C	D	E
18	24	26	36	52

12. How many cubes are needed to build this rectangular solid?



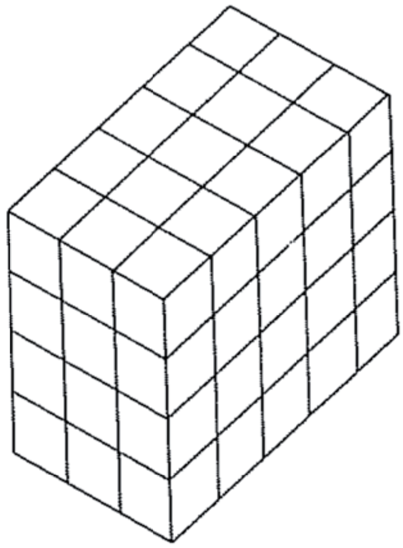
A	B	C	D	E
36	47	60	72	94

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 55)

Type VI. Given a three-dimensional corner view of a building, the task is to find the number of cubes that touch an exposed cube face to face.

(Bishop, 1983, p. 187)

This is a diagram of a cuboid made of small cubes If the OUTSIDE of the cuboid is painted red, how many cubes will have only one face painted? (14% of the students were successful) (See Schema 6 1)



SCHEMA 6 1

(Brown & Presmeg, 1993, p.139)

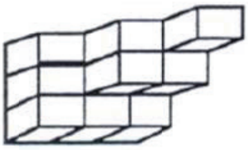
The Faces of the Cube

There are 216 small cubes are arranged in a 6 by 6 by 6 large cube. One layer of small cubes is removed from each face of the large cube. How many cubes remain?

(Cosío, 1997, p. 209-211)

Ítem nº2.

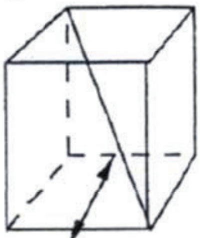
Observa este apilamiento de cubos del mismo tamaño ¿Cuántos hay en total?



RESPUESTA:

Ítem nº4.

En un cubo un segmento de recta une un vértice con el otro vértice más alejado, y se llama DIAGONAL PRINCIPAL del cubo (ver Fig. 1) ¿Cuántas diagonales principales existen en un cubo?

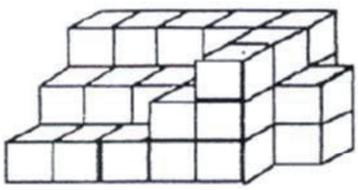


RESPUESTA:

Fig. 1.

Ítem nº9.

¿Cuántos cubos hay en el siguiente apilamiento?



RESPUESTA:

Ítem nº11.

Se apilan y se pegan con cola de carpintero 11 pequeños cubos de madera quedando como se indica en la Fig. 1. Después se pega sobre la mesa dicho apilamiento y a continuación se pintan de azul las partes que no están pegadas. Entre esos 11 cubos, ¿Cuantos hay que tengan exactamente dos caras pintadas de azul?

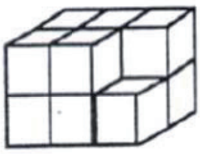


Fig. 1

RESPUESTA:

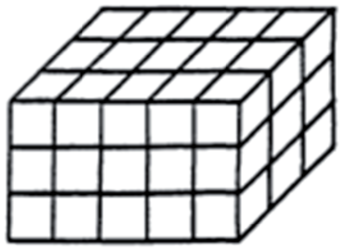
(Gorgorió, 1995, Anexo 7)

14 L'objecte de la figura està format per cubs apilats. Quants cubs hi ha?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 30

15 El prisma de la figura de la dreta està format per cubs apilats. Quants cubs hi ha <u>a cada nivell</u>?

A) 5
B) 7
C) 8
D) 15



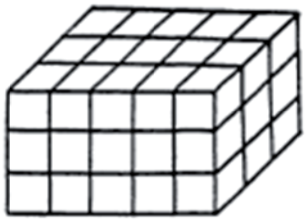
16 En el mateix prisma que al cas anterior, quants cubs hi ha en total?

A) 15
B) 21
C) 24
D) 45

17 Quàntes cares, arestes i vèrtex té l'objecte representat a la figura?

A) 12 vèrtex, 8 cares i 18 arestes.
B) 10 vèrtex, 6 cares i 13 arestes.
C) 12 vèrtex, 6 cares i 13 arestes.
D) 10 vèrtex, 8 cares i 18 arestes.

32 L'objecte representat a la figura està format per cubs. Suposa que l'hem pintat de color blau i després l'hem desmontat obtenint 45 cubs. Quants d'aquests cubs tenen exactament tres cares blaves?



A) 1
B) 4
C) 6
D) 8

33 En el mateix objecte de la qüestió anterior, quants cubs tenen exactament dues cares blaves?

A) 12
B) 16
C) 18
D) 20

34 Sempre fent referència al mateix objecte, quants cubs tenen exactament una cara blava?

A) 6
B) 12
C) 14
D) 16

35 Sempre fent referència al mateix objecte, quants cubs no tenen cap cara blava?

A) 1
B) 3
C) 7
D) 9

(Hesrkowitz Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 190-191)

'A thief managed to open a safe with gold bars. This is what he saw. How many bars are there in the safe?'

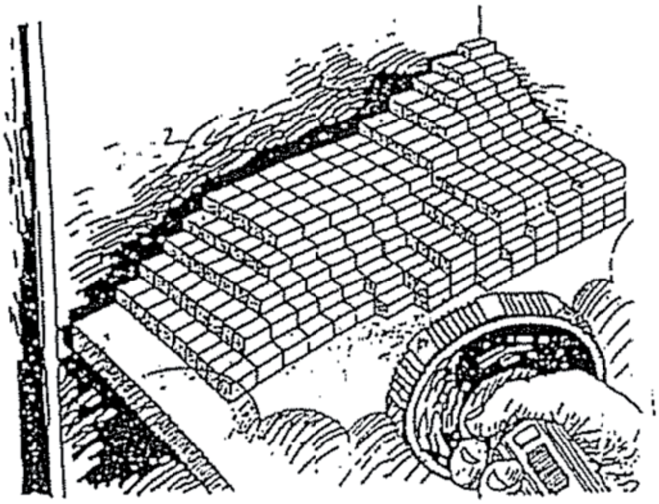
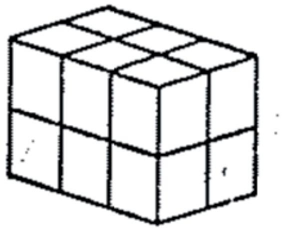


Figure 20 Gold bars

(Lappan, Phillips y Winter, 1984, pp. 618-619)

For example, how many cubes are needed to build the solid shown here?



For each solid shown, do the following:

- Build the solid from cubes.
- Copy the drawing.
- Count the number of cubes used in the drawing.
- Check your count from the solid.

1

Number of cubes ______

2

Number of cubes ______

3

Number of cubes ______

4

Number of cubes ______

5

Number of cubes ______

From the Mathematics Teacher, November 1984

(Mariotti, 1995, pp. 104-105)

During the interview a very simple problem is proposed to the subjects: one of the solids (cube, parallelepiped, triangular prism and regular tetrahedron) is shown and then it is hidden; the subject is then asked to count the number of its faces, vertices and edges. At first, counting must be done mentally, that is to say without manipulating the object, then the object is presented again and the counting is done on the object. The fact that the real object is not available during the first process of solution, is the main feature of the task.

(Mariotti, 1995, p.110)

the pupil is asked to count the edges of a regular tetrahedron.

Tareas **E18**

Construir sólidos a partir de una descripción verbal, con lenguaje posicional.

(Del Grande, 1987, pp. 132-133)

Place 3 cubes on a table as shown below.

- "Put your cubes together like mine and then place them on top of my cubes" (no color match is required).
- "Put your cubes together like mine and then place them beside my cubes."

(Gutiérrez, 1998a, p. 199)

En cada actividad un estudiante debía dar instrucciones a sus compañeros para que construyeran un módulo que sólo él veía. En la primera actividad un estudiante hacía la descripción dando las instrucciones verbalmente, mientras veía, en un monitor de televisión, lo que hacían sus compañeros, y los niños podían hablar entre sí. La segunda actividad se diferenciaba de la primera en que no había monitor de televisión. En la tercera actividad los estudiantes debían plasmar las instrucciones de construcción de un módulo en una hoja de papel.

(Sack & Vázquez, 2008, p. 220)

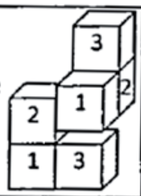
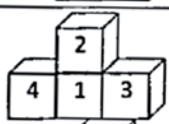
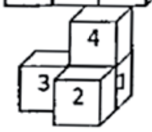
Example item 1. Put the first block down. 2. Place the second block **behind** the first block. 3. Place the third block **on top of** the second block. 	I 1. Put the first block down. 2. Place the second block on top of the first block. 3. Place the third block **to the right** of the first block.
II 1. Put the first block down. 2. Place the second block on top of the first block. 3. Place the third block **to the right** of the first block. 4. Place the fourth block **to the left** of the first block.  	III 1. Put the first block down. 2. Place the second block **in front** of the first block. 3. Place the third block **to the left** of the first block. 4. Place the fourth block on top of the first block.

Figure 2. Pre-interview verbal stimuli.

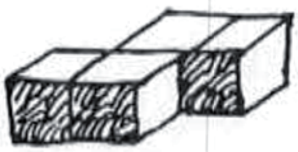
<u>Tareas **E19**</u>

Combinar un número determinado de cubitos para realizar diferentes construcciones.

(Freudenthal, 1980, p. 12)

Paulus the Forest Midget is a wellknown feature on Dutch children's TV. The teacher tells a story about Paulus and the midgets. There is restlessness in the midget town. Some houses are more beautiful than others. Paulus is called in as a troubleshooter. He proposes to rebuild the town. The midgets will live pairwise in houses, each consisting of a drawing room, a kitchen, and two bedrooms. All rooms are to be (congruent) cubes, and each house will be built from four cubes, which touch each other along complete faces, thus

or



and so on.

(Sack & Vázquez, 2008, p. 221)

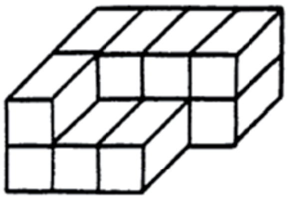
The teacher tells the class a story of a new outer-space community in which the inhabitants will live on a distant planet in houses made of four prefabricated rooms. The rooms may be in any configuration but the must connect face-to-face completely. The houses will be delivered in finished form to their sites on a space vehicle and each home owner will tell the pilot where and in which direction to place his/her house. The first task is to build all the different 4-cube house combinations (without regard for windows or doors). The teacher asks students to think of some combinations to show to the class. After two or three share, the class moves back to work in pairs to discover other arrangements.

Tareas **E20**

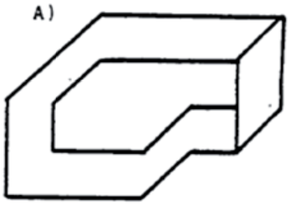
Identificar "la representación correcta" del exterior de un objeto construido con cubitos, sin marcar los cubitos que lo forman.

(Gorgorió, 1995, Anexo VII)

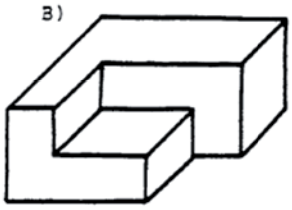
12 Hem construit un objecte enganxant blocs tal com es veu a la figura de la dreta. Si no es veiessin els afegits, quina seria la representació correcta de l'objecte?



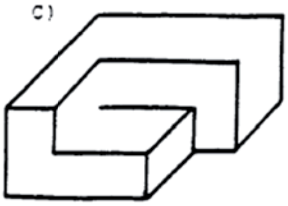
A)



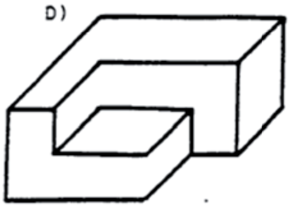
B)



C)

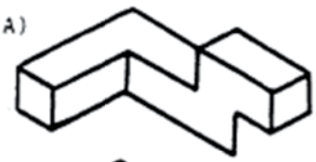


D)



13 Hem construit un objecte enganxant cubs tal com es veu a la figura de la dreta. Si no es veiessin els afegits, quina seria la representació correcta de l'objecte?

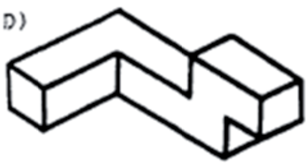
A)



B)

C)

D)

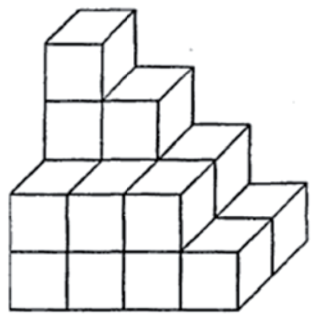


Tareas **E21**

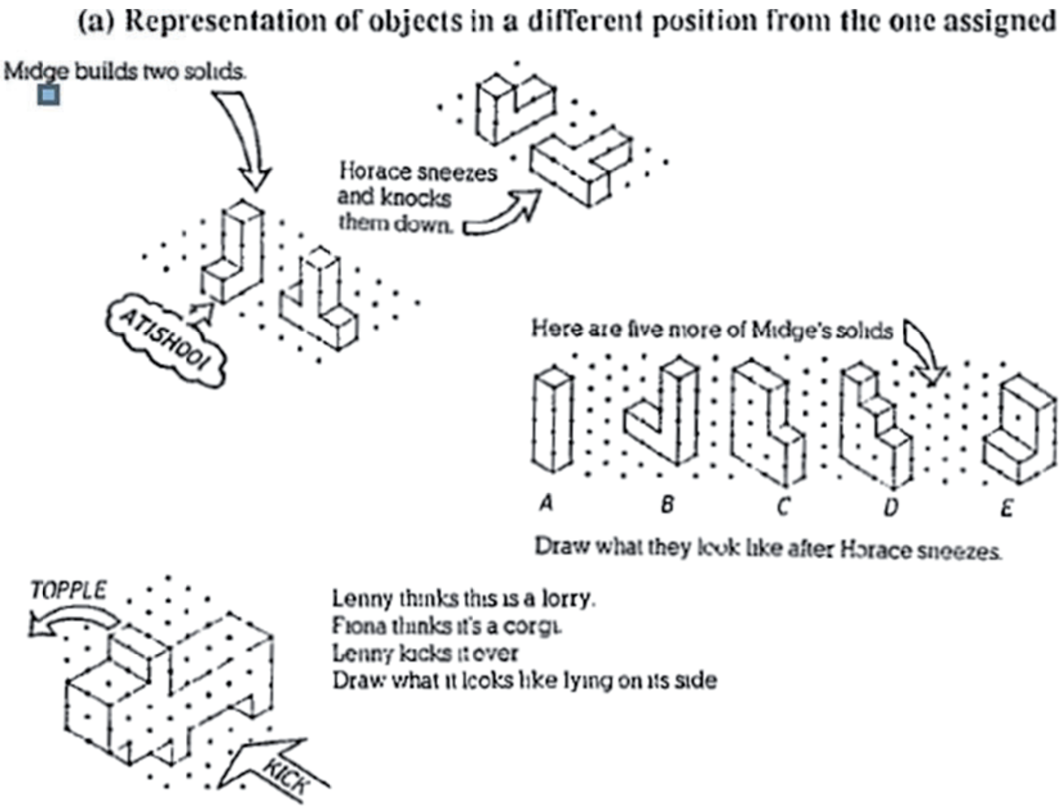
Realizar una representación plana de un objeto dado en otra posición diferente a la dada. Dado un objeto, hacer la representación de ese objeto tumbado, girado.

(Gorgorió, 1995, Anexo 7, p. 5)

Dibuixa, fent servir el paper quadriculat, l'objecte del full "ACTIVITATS-A", tal com es veuria després de fer-lo girar 180°sobre la seva base, és a dir, has de dibuixar el que es veuria quan tinguessis davant teu el que ara és la cara del darrera de l'objecte.



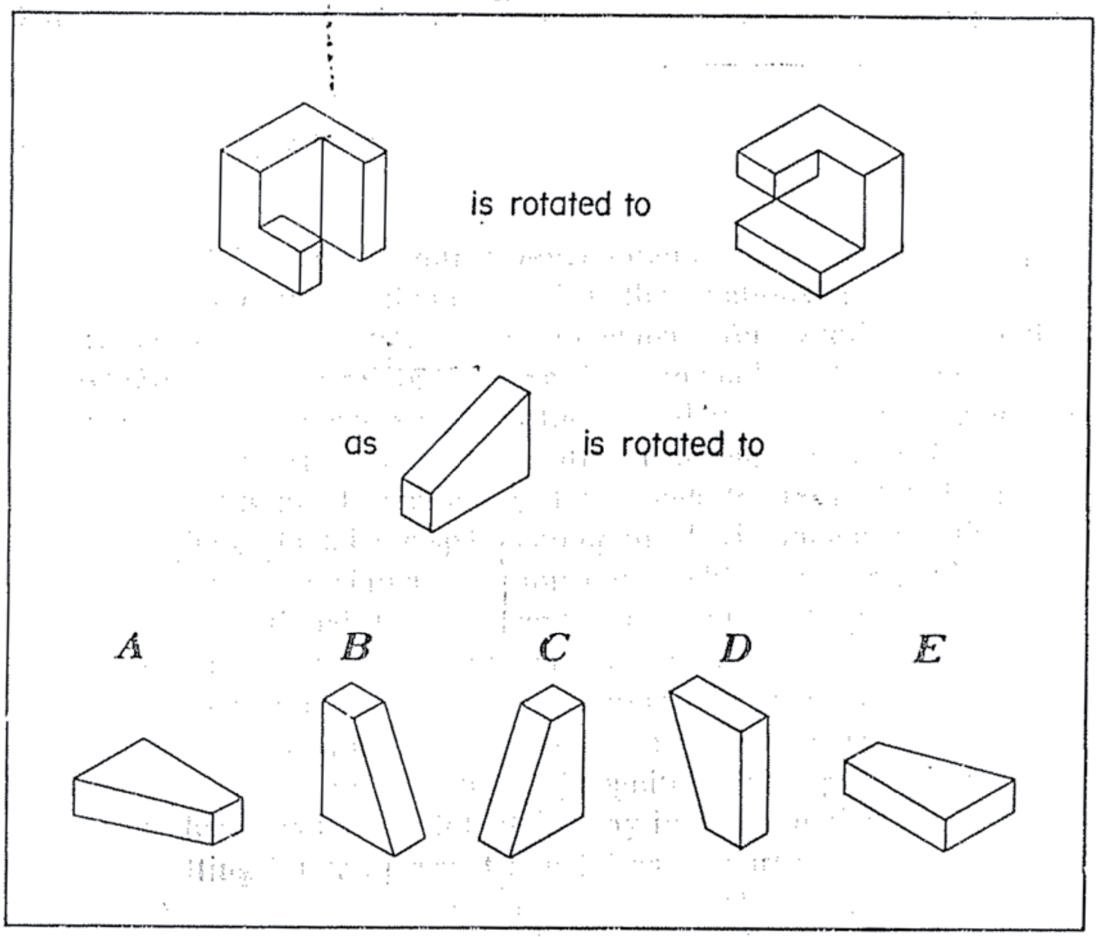
(Malara, 1998, p. 241)



Tareas **E22**

Reconocer un movimiento aplicado a una figura dada y aplicación a otra figura distinta

(Battista, Wheatley & Talsma, 1982, p.334)



Tareas **E23**

Identificar desarrollos planos de cuerpos tridimensionales (del plano al espacio y del espacio al plano). Dados varios desarrollos planos seleccionar aquel o aquellos que corresponden al desarrollo plano del cuerpo a identificar.

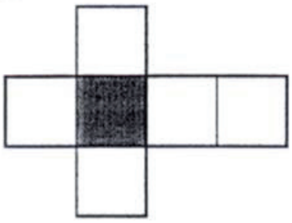
(Cohen, 2003, p. 231)

In the closed questionnaires, students had to identify drawings as being or not being possible nets for a cylinder or for a cone (separately).

(Cosío, 1997, p. 209)

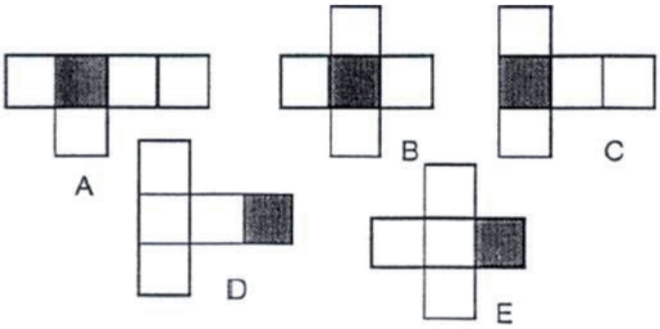
Ítem nº1.

Fig. 1



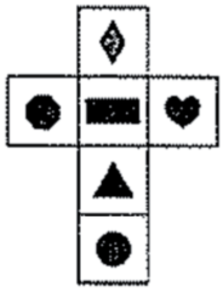
Si cortas la forma de la Fig. 1 y la pliegas, obtienes una "caja" de 4 paredes, un techo y un suelo. ¿Cual de las figuras A,B,C,D,E, podría cortarse y a continuación plegarse para obtener una caja de 4 paredes y un suelo, pero <u>sin techo</u>? (El suelo de la caja aparece en color negro).

RESPUESTA: ☐

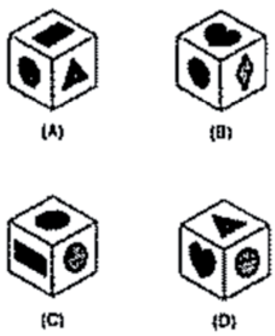


(Diezmann & Lawrie, 2009, p. 418)

This is the net of a cube.



Which one of these cubes could be made by folding the net?

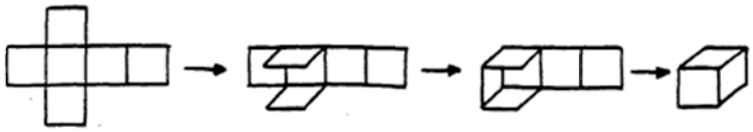


Educational Testing Centre, 2002, p. 9.

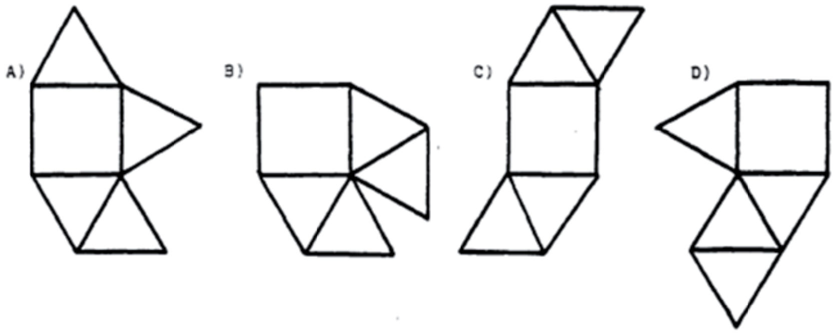
Figure 1: Net task (spatial visualization).

(Gorgorió, 1995, Anexo VII)

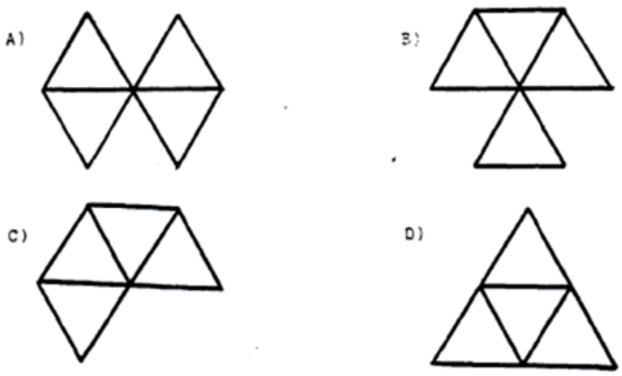
24 El patró dibuixat a continuació es pot plegar per a construir un cub. S'anomena **desenvolupament del cub.**



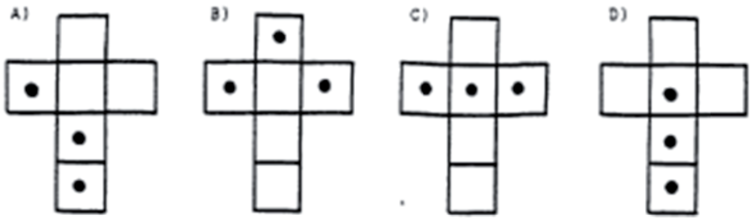
A partir de quin dels següents desenvolupaments A, B, C o D, es pot obtenir una piràmide de base quadrada com la de la figura de la dreta?



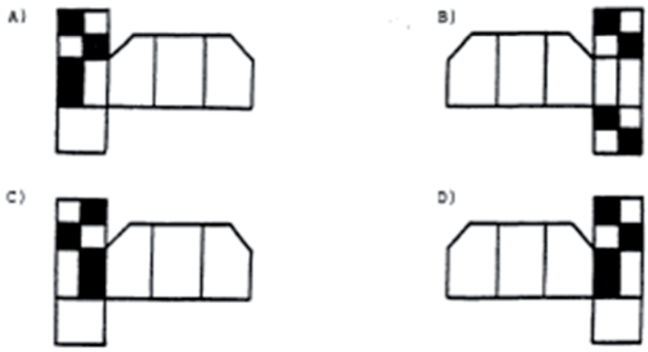
25 A partir de quin dels següents desenvolupaments A, B, C o D, es pot obtenir un tetràedre com el de la figura de la dreta?



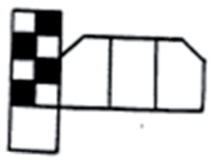
38 Un cub té tres cares blanques i tres cares marcades tal com es veu a la figura de la dreta. Quin dels següents desenvolupaments A, B, C o D li correspón?



39 Quin dels següents desenvolupaments, A, B, C o D, correspon a la figura de la dreta?



40 Quin dels objectes A, B, C o D, pot obtenir-se plegant el desenvolupament de la figura de la dreta?.



(Guay & McDaniel, 1977, p. 212)

Surface Development (Guay, 1975). This is a 16-item individually administered test using the same objects as the CV test. This test is designed to measure the ability to visualize the development (unfolding) of three-dimensional object surfaces so that these surfaces are superimposed onto a single plane. While inspecting the object, the children must select from among three drawings projected on a screen the one that represents the development of the object.

(Meissner, 2001, p. 5)

The last lesson of that teaching unit (details see MEISSNER & MUELLER-PHILLIP 1997) started with an exhibition of about 20 different (plane) developments of buildings fixed with tape on the black board. There were only lines drawn where to fold later on (but not distinguishing if to fold inside or outside). The children (grade 3, age about 8 - 9) had to describe which net might become what type of building before they could choose one of the developments to verify their guesses.

Fig. 3

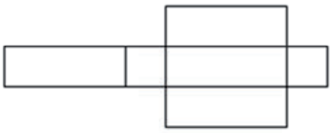


Fig. 4

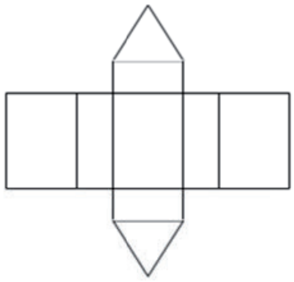
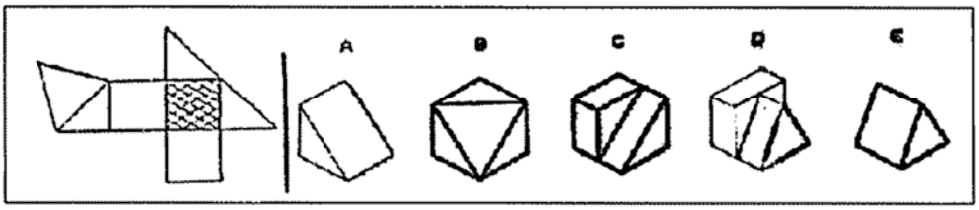


Fig. 5

(Olkun, 2003, p.10)



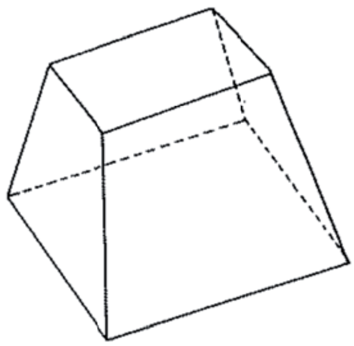
Surface Development (SV)

Tareas **E24**

Dibujar/Completar desarrollos planos de cuerpos tridimensionales.

(Bishop, 1983, p. 189)

Draw the shape which you could cut out of paper, and fold. to make the six-faced object shown here (25%) (See Schema 6 2.)



SCHEMA 6 2

(Cohen, 2003, p. 231)

As a first step, the students answered an open questionnaire in which they had to draw several nets of cylinders and of cones. For each of the solids, they had to draw one net, and then three more, as different as they could from the first one.

(Fischbein, 1993, p. 158)

Such a type of activities, already referred to in the present paper, consists of (a) asking the students to draw the image obtained by unfolding a geometrical body (actually perceived or mentally represented)

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 188-189)

The lower half of the cube has been painted black. Of each of the four nets, the bottom side is already black. Students are asked to finish them with the right blacking.

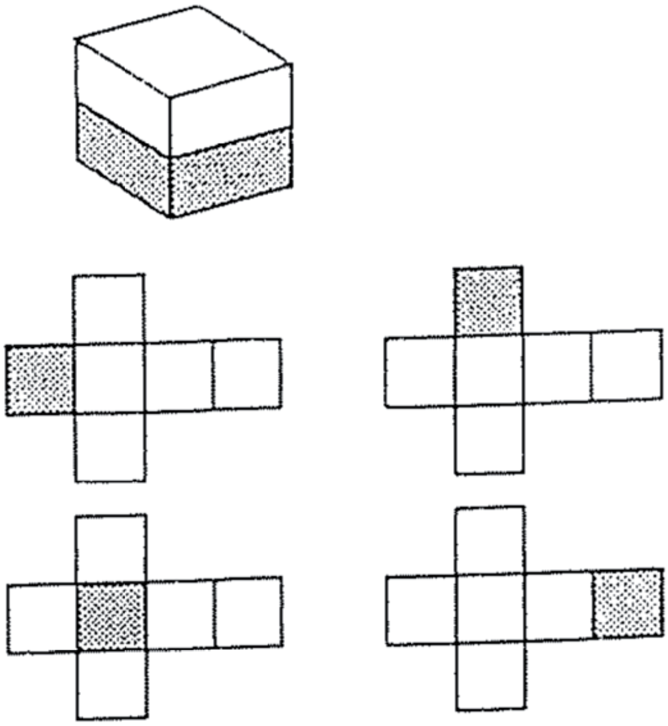


Figure 17 Black bottom

(Marioti, 1995, p. 110)

unfolding task. During the interviews, after the first step concerned with the counting of faces, vertices and edges, the pupil was asked to draw the unfolding of a particular solid. Let us consider the case of a regular tetrahedron, with the solid first shown and then hidden.

(Meissner, 2001, p. 4)

A teacher showed a model of a three sided pyramid (Fig. 1) and asked the class: "What did the cardboard paper look like before I folded it to make this pyramid?"

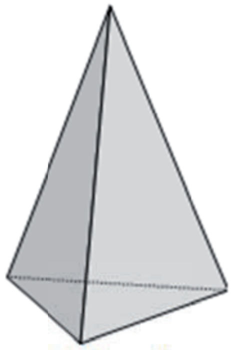
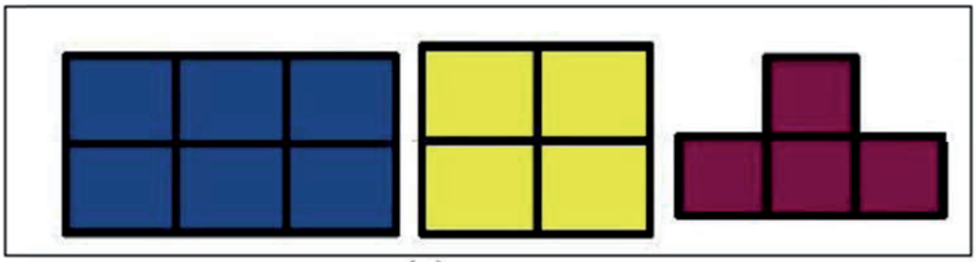


Fig. 1

(Pittalis, Mousoulides & Andreou, 2009, pp. 2-3)

The first activity required the students to construct a 3D shape that corresponded to the orthogonal view presented at Figure 1a (with Cubix Editor) and then create its net with the use of Origami Nets.



(a)

(Potari & Spiliopoulou, 2001, pp. 42-43)

The children were given four objects in turn: a hat, a metal weight, a plastic glass and a metal mould. They were asked to use the objects without destroying them, to imagine how they would be if opened flat on their table and, finally, to draw this image on a piece of paper.

Tareas **E25**

Construir el cuerpo tridimensional que procede de un desarrollo plano.

(Fischbein, 1993, p. 158)

(b) asking the students to identify the geometrical body which could be obtained by imagining the folding back of a bi-dimensional drawing

(Potari & Spiliopoulou, 2001, p. 43)

Each pair was given one of the four solids and the two drawings of this solid's net which they had produced during the first phase. Children were asked to cut out their drawings and see whether they could produce a solid the same as the original.

Tarea **E26**

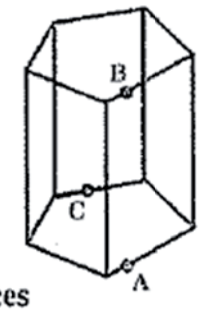
Identificar Cortes de sólidos a través de diferentes planos

(Battista, 1990, p. 51)

Problem

Consider the three-dimensional figure pictured below. What is the intersection of this figure and a plane that passes through points A, B, and C? Circle the letter of the best answer.

A. a triangle
B. a quadrilateral
C. a pentagon
D. none of the above



Strategy Choices

(Given on the page following the problem statement)

A. I figured that since the plane must pass through three points, the intersection would be a triangle. I did not draw on the figure, nor did I try to visualize how the plane intersected the figure

B. I tried to logically deduce the answer based on a careful analysis of the given information. I did not draw on the figure, nor did I try to visualize how the plane intersected the figure.

C. I drew on the figure to help me visualize how the plane intersected it.

D. While looking at the figure, I tried to visualize how the plane intersected it.

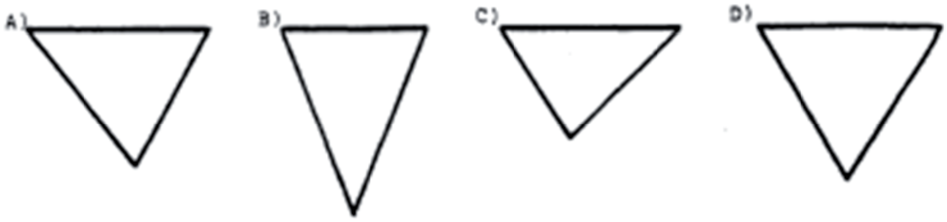
E. NONE OF THE ABOVE choices accurately describes how I solved this problem. PLEASE DESCRIBE HOW YOU SOLVED THE PROBLEM BELOW.

(Gorgorió, 1995, Anexo VII)

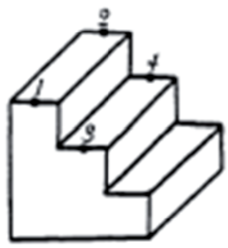
.

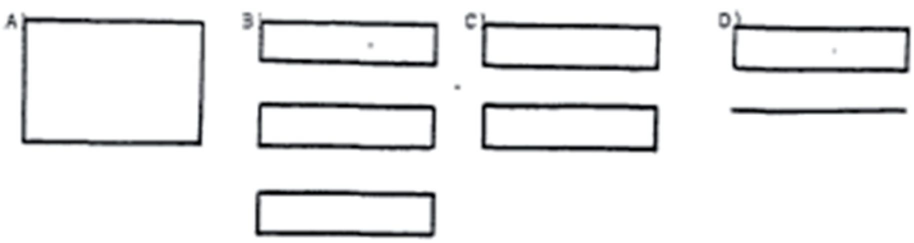
30 Quan un pla talla un cub passant per la línia de punts tal com indica la figura la intersecció té forma de rectangle.
La figura plana que s'obté al fer la intersecció s'anomena SECCIO.

Quina secció A, B, C o D, s'obté al tallar un cub per un pla tal com indica la figura de la dreta?



31 Donat un bloc en forma d'escala, com el representat a la figura, el tallem per un pla que passa pels punts 1, 2, 3 i 4. Quina de les figures A, B, C o D, representa la secció obtinguda?





42 Un pla talla un cub de manera que és paral.lel a una aresta, però no és paral.lel a cap cara del cub ni conté cap vèrtex. Quina de les formes següents descriu millor la secció obtinguda?

A) Un quadrat.

B) Un rectangle.

C) Un romboide.

D) Un triangle isòsceles.

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 189)

In this example students are asked to pair the cross-sections that divide the pear.

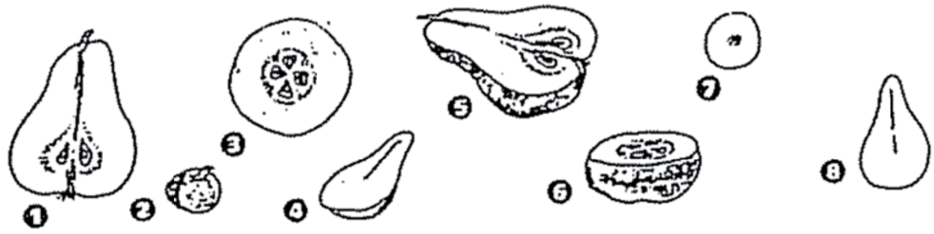


Figure 18 Pears

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 189-190)

'We want to know more about these mountains. Therefore we make a (vertical) cross-section through the tops of the mountains. Draw that cross-section.

Ice on the top melts. What is the most likely route downwards, that the melting water follows?'

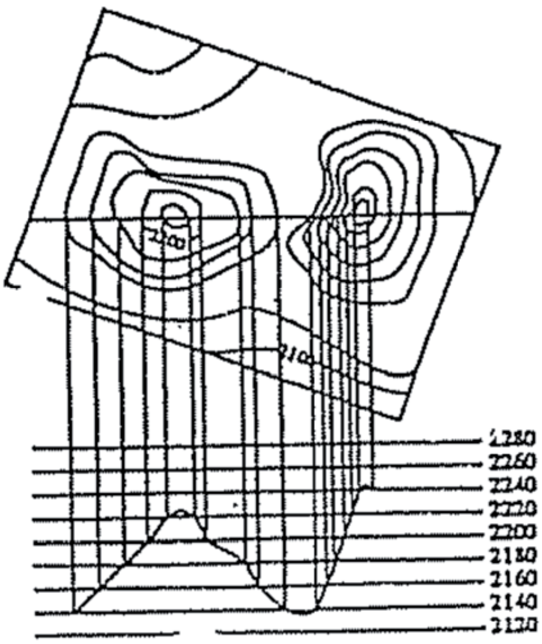


Figure 19 Mountains

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 191)

'A cooling tower has a height of 22 meters. In a orthogonal *xyz*-system its surface can be described by the equation $x^2 + y^2 = (z-11)^2 + 20$. What is the form of cross sections of a plane that is parallel to the horizontal xy-plane? Which of them is the smallest? Draw a cross section through a plane that contains the vertical z-axis.'

(Mariotti, 1995, p. 98)

A questionnaire was given to some students at the University of Pisa. They were attending first year courses at the Faculty of Science. The questionnaire presented different items about different subjects, algebra, arithmetic, logic and geometry. Among them there was the following question :

A plane intersects a sphere, what is the shape of the cross section?

a) a circle or an ellipse

b) a circle

c) a sector

d) a spherical cap

Tareas **E27**

Crear/dibujar cuerpos de revolución. Dada una forma plana construir/dibujar el cuerpo que se genera al hacerla girar sobre un eje.

(Gorgorió, 1995, Anexo 7)

41 Quin dels objectes següents descriu millor l´objecte obtingut al fer girar la lletra 'C' al voltant del seu eix de simetria?

A) Un hemisferi.
B) Una esfera.
C) Una peixera.
D) La copa d´un paraigües.

Tareas **E28**

Encontrar la figura plana que genera un determinado cuerpo de revolución.

(Pittalis, Mousoulides & Andreou, 2009, pp. 2-3)

The second activity required students to find the 2D shape that has to be rotated to construct a rotational object (see Figure2a).

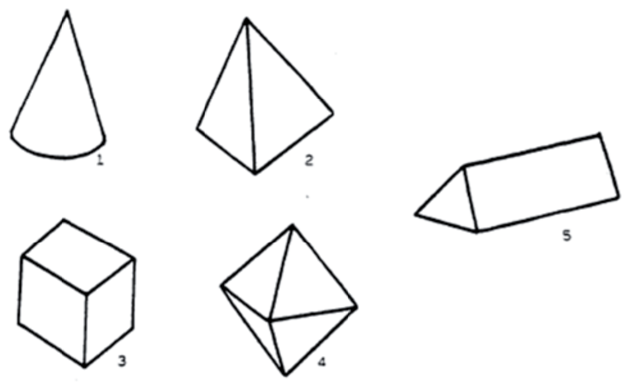
(b)

Tareas **E29**

Comprensión/reconocimiento de conceptos geométricos elementales y propiedades.

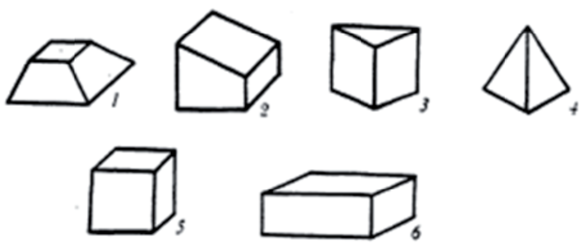
(Gorgorió, 1995, Anexo VII)

5 Quines de les figures següents representen piràmides?



A) La 1 i la 2.
B) La 2 i la 5.
C) La 2, la 4 i la 5.
D) La 2.

7 Els prismes són polfedres que tenen dues cares iguals i paral.leles, anomenades bases, i tantes cares laterals com costats té el polígon que forma la base. Quines de les següents figures poden anomenar-se prismes?



A) Només la 3 i la 6.
B) Només la 3, la 5 i la 6.
C) Totes menys la 1 i la 4.
D) Totes menys la 4.

8 Segons l'anterior definició de prisma, quines de les següents figures representen cossos que poden anomenar-se prismes?

A) Totes.
B) Només la 3.
C) Només la 2.
D) Només la 2 i la 3.

(Guillén, 2000, pp. 39-41)

– Se muestra un modelo de un antiprisma pentagonal de base regular y se pregunta: ¿A qué familia pertenece? ¿Por qué dices que es un antiprisma? Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo? Y esta propiedad que has dicho, ¿la cumplen todos los antiprismas?

– Se muestra una pirámide oblicua cuadrada en posición estándar y se pregunta: ¿A qué familia pertenece este modelo? Se apoya en una arista y se pregunta: ¿Es pirámide? ¿Seguro que lo es (no lo es)? ¿Qué hemos dicho en repetidas ocasiones? ¿Y cuál será la base de esa pirámide?

– Se muestra el armazón del rombododecaedro y se pregunta si es un poliedro o no.

T.1. De las propiedades que indicamos a continuación, seleccionad las que cumplen los prismas de caras regulares. Para cada propiedad, explicad vuestra respuesta.

a) Toda cara tiene otra cara, su opuesta, que es paralela a ella.
b) Todas sus caras son iguales.
c) Las aristas tienen como máximo dos medidas diferentes.
d) Los ángulos de los vértices tienen tantas medidas diferentes como ángulos diferentes tenga el polígono de las bases.
e) El número de diagonales de las caras es $n(n\text{-}3)$ y el de diagonales del espacio es $n(n\text{-}2)$, siendo n el número de lados del polígono de sus bases.

T.2. Para cada una de las propiedades que enumeramos en la tarea T.1, indicad qué familia o familias de prismas las verifican.

T.3. Adivinad el sólido que verifica las propiedades siguientes. Considerad cada propiedad una por una y para cada una dad respuesta a las preguntas que se te plantean. Tened en cuenta que el sólido tiene que cumplir la propiedad que se os indica y todas las anteriores.

a) Sus caras son polígonos. ¿Elimináis algún sólido de los que hemos tratado?
b) Tiene como mucho dos tipos distintos de caras. ¿En qué sólidos podemos estar pensando?
c) Todos los vértices tienen el mismo orden. ¿Añade información?
d) Tiene más de dos caras triangulares. ¿Añade información?
e) Todas las diagonales del sólido quedan en el interior de él. ¿Añade información? ¿En qué familia específica estamos pensando?
f) La altura del sólido coincide con la distancia entre los centros de sus bases. ¿Añade información? ¿En qué familia específica estamos pensando?
g) Tiene todas las aristas de la misma longitud. ¿En qué familia específica estamos pensando?
h) Tiene 40 diagonales de las caras y 48 diagonales del espacio. ¿Cuántos lados tiene el polígono de la base? ¿En qué sólido estamos pensando? Dad nombre y si podéis dibujadlo. Si no sabéis dibujarlo, dibujad el polígono de la base o de las bases.

(Guillén, 2001, p. 420)

Tabla II

Tareas de identificación de subfamilias de paralelepípedos.

T.1 Pon ejes de paralelepípedos que además sean romboedros. Haz dibujos de los cuadriláteros que pueden ser caras de esos paralelepípedos. Además, responde a las siguientes preguntas y explica tus respuestas.

¿Las caras de los paralelepípedos que son romboedros pueden ser rectángulos? ¿Pueden ser cualquier tipo de rectángulo? ¿Todas ellas tienen que ser rectángulos? ¿Pueden haber rectángulos de dos tipos?

Responde a las preguntas anteriores para los rombos, en vez de para los rectángulos.

T.2 Repite la tarea T.1 cambiando la expresión «paralelepípedos que además sean romboedros» por «paralelepípedos que no son ortoedros».

Tabla III

Tareas de juzgar y enunciar relaciones entre familias de prismas.

T.3 Indica si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifica la respuesta.

a) Todos los prismas de caras iguales son prismas convexos, pero todos los prismas convexos no son de caras iguales.
b) Ni todos los prismas de caras iguales son de caras regulares ni todos los prismas de caras regulares son de caras iguales.
c) No hay ningún prisma que sea a la vez de caras laterales regulares y cóncavo.

T.4 Formula las relaciones que tienen las familias de prismas siguientes y justifica la respuesta.

a) Prismas convexos y prismas de bases regulares.
b) Prismas convexos y prismas de caras iguales.

T.5 Selecciona los términos *siempre, a veces o nunca* que muestra la relación que hay entre los pares de familias siguientes y justifica la respuesta.

a) Los prismas convexos son *siempre, a veces* o *nunca* prismas de caras iguales.
b) Los prismas rectos son *siempre, a veces* o *nunca* prismas oblicuos.

(Gutiérrez, Jaime y Fortuny , 1991, pp.242-244)

Activity 1 had four parts. For each part the students were asked to select the solids (from those in Figure 2) that had the given property. The properties were (a) being a pyramid, (b) having each face parallel to another face, (c) having at least one plane of symmetry, and (d) having three faces joined at each vertex.

Activity 2 required the students to "complete a chart writing the differences and similarities between a cube and each of the solids A, B, C, and I."

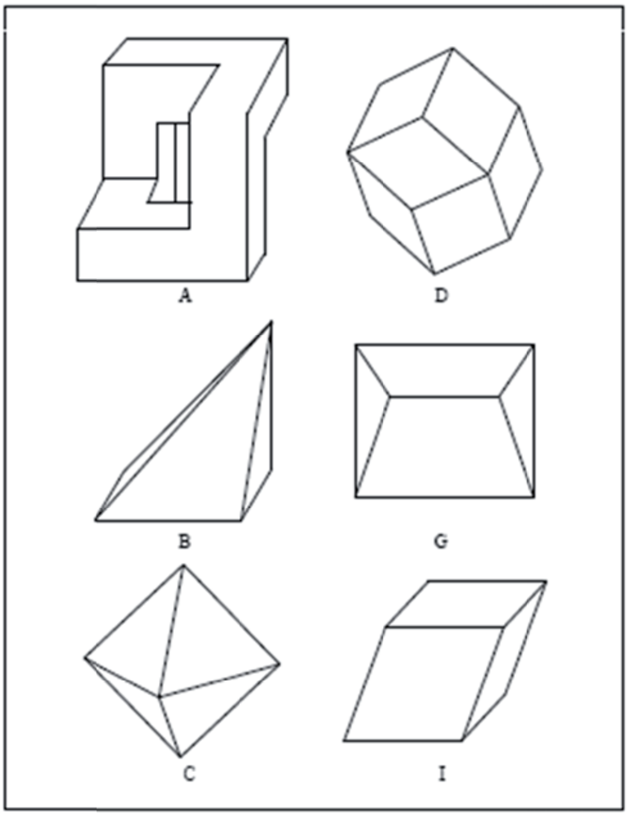


Figure 2. The solids manipulated by the students.

Activity 3 had two parts. First, students were asked to draw a solid (different from those of the collection) that satisfied the following conditions and to describe it with words.

1) It has exactly 8 short equal edges and 4 long equal edges.
2) There are exactly 3 different-sized angles formed by the edges.
3) At least 2 of the short edges are parallel.
4) Every face is parallel to another face.
5) All the long edges are parallel.

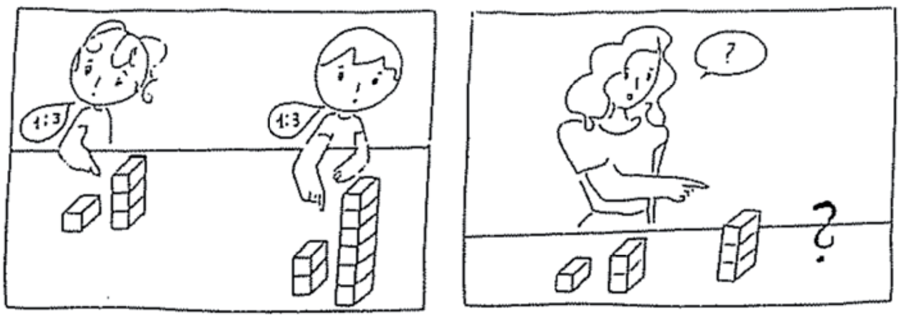
Then, the students were asked to identify the smallest set of the conditions that determined the figure and to justify their answer.

Activity 4 required students to check whether the following implication is true or false and to prove their answer: "If a solid has a central point that bisects every segment going through that point and whose ends are on the solid's surface, then each of the solid's faces is parallel to the face opposite it."

Activity 5 was stated as follows: "A corner of a room is usually formed by 3 rectangles. Is it possible to build corners formed by 3, 4, 5, 6, or 7 equilateral triangles? Give a proof of your answer."

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 173-174)

d) Similar activities with towers of blocks, and the heights of a coloured liquid in glasses. The towers demonstrate that two ratios can be the same even if they are expressed by different numbers, e. g., 1/3 = 2/6 (Figure 5a). This is a visual basis for equality of fractions.



(a) (b)

Figure 5 Relation and proportion demonstrated in block towers

h) The more advanced activities are those in which three values in a proportion are given and the child has to find the fourth one. For example, a pair of towers and a single tower are given: the child 'calculates' the height of the fourth tower which completes the proportion and then checks it by building the tower (Figure 5b)

(Mariotti, 1995, pp. 101-102)

It is a fifth grade class and the topic is the naming of certain solids. The teacher has put several cardboard models on the desk, and the pupils are asked to name them.

(Mitchelmore, 1986, p. 302)

The children were then presented with a sequence of four cubes (two face-on and two edge-on) and two rhomboids and a partly drawn homograph of each. To complete the homograph, the child had first to draw an oblique, vertical or horizontal line parallel to a given line and inclined at 45° or 60° to another given line (see Figure 16.6). Before making the drawing, however, children were asked to identify 'friends' of the depicted edge on the model;

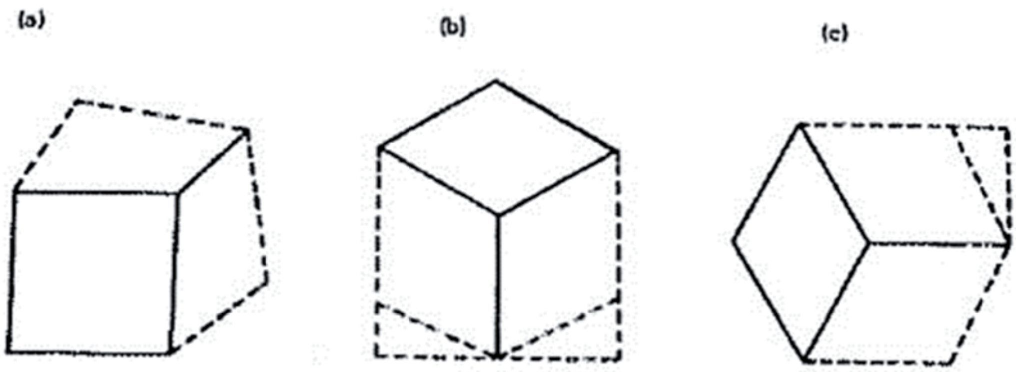


Figure 16.6 Average responses to homograph-completion tasks. Full lines represent the given lines and the broken lines the modal responses

(Yakimanskaya, 1991, p. 190)

Grades 8-9. How many edges and faces does a prism have? Give the number (Figure 32).

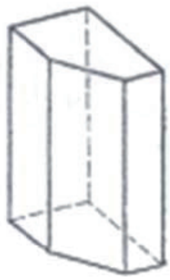


Figure 32.

Tareas **E30**

Analizar la situación de puntos, planos y rectas en el espacio. Analizar la pertenencia de elementos (puntos, rectas) a diferentes planos, posiciones de rectas y planos en el espacio, dibujar dos planos sin ningún punto en común…

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 199-200)

The horizontal plane (H) and the vertical plane (V) intersect along (D); point a is the orthogonal projection of point A on (H), B and C belong to (V). Draw the intersection of plane (ABC) with (H).

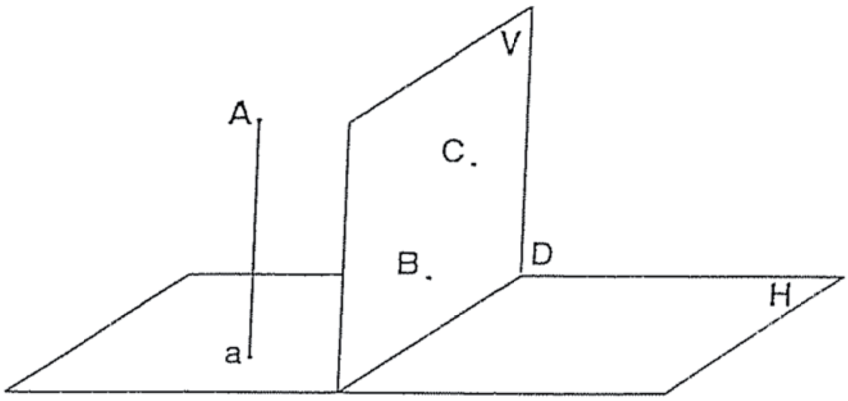
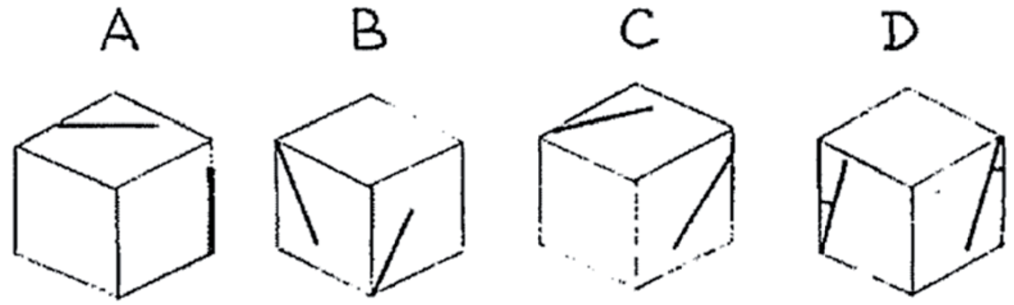


Figure 23 Understanding it geometrically

(Kopelman & Vinner, 1994, p. 98)

Two line segments are drawn on two faces of each cube. Do the lines intersect in space ? If not, are the lines parallel in space or not ?



(Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993, p. 10)

two sheets of paper were placed randomly, without any parallel edges, to incite the students to create a mental image (synthetic ◄► analytic) so that they could interpret and rationalize the activity of generating intersecting planes and discovering the points of intersection. Figure 4a represents the projection of any three planes whereas Figure 4b seemed an acceptable representation of "any three planes" for the two younger students.

Figure 4a

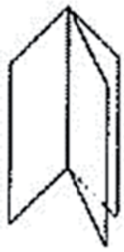
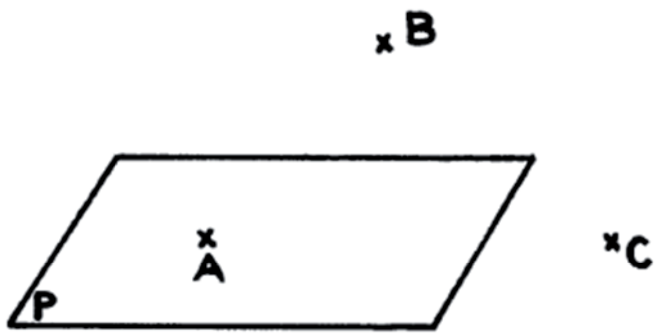


Figure 4b

Intersection of three planes

(Parzysz, 1988, p. 83)

"The drawing (cf. *Drawing 2*) represents a plane, P, and three points, A, B, C, in space. For each of these three points tell, from the drawing, whether it is in the plane P or out of it, or if the drawing does not allow to decide".



Drawing 2

(Parzysz, 1991, pp. 582-583)

To get some idea of this, the students of four "scientific" lower sixth classes were asked to represent varied "commonplace" situations of space geometry, and especially: "two planes which have no common point".

"Can two (distinct) planes have:
- more than one common point?
- one common point, and one only?
- no common point?
(in that case, are they necessarily parallel?)"

Tareas **E31**

Memoria visual. Se presentan objetos en diferentes posiciones, luego se esconden o revuelven y hay que dejarlos en la posición inicial.

(Bishop, 1983, p. 191)

9. Visual memory *The visual memory task was developed from one used by Kearins (1976) Twelve small objects were presented in a 3 × 4 array for 45 seconds. after which the pieces were removed The student was asked to replace them in their correct positions. There was no time limit for replacement* In

(Del Grande, 1987, p. 134)

from memory. For example, in figure 11.10, children are shown a picture of a shelf with toys and then asked to remember the placement of the toys after the picture is hidden. This activity can be made easier by reducing the number of toys used or harder by adding toys that do not belong.

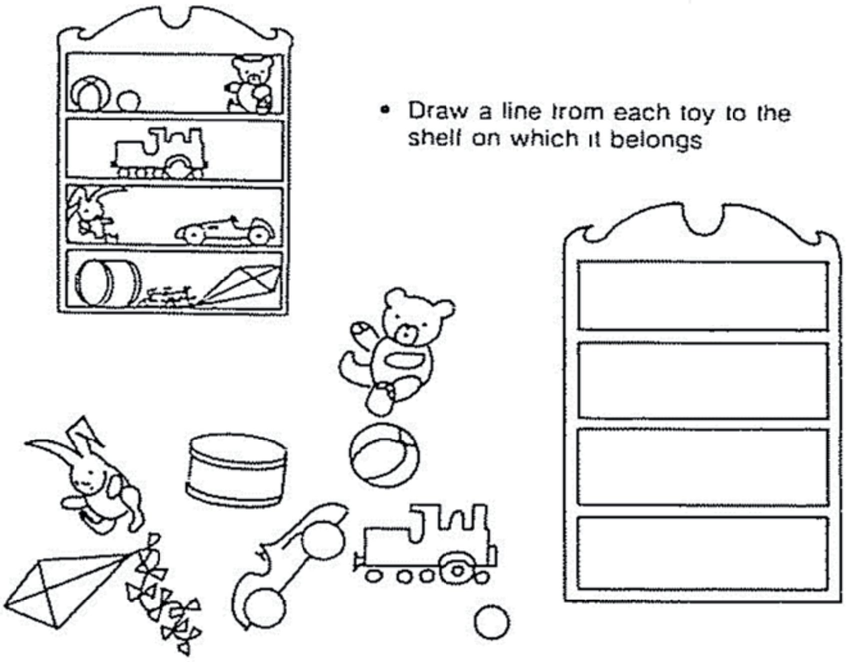


Fig. 11.10

Tareas **E32**

Identificar figuras, objetos que tienen cierto porcentaje borrado.

(Bishop, 1983, p. 193)

13. Word completion. *The word-completion task was a subtest from the Multi Aptitude Test, Psychological Corporation. Eighteen typed English words were presented in varying degrees of obliteration and the student was asked what the original word was*

14. Picture completion. *The picture-completion task paralleled the previous one, but used outline drawings from the study by Kennedy and Ross (1975). The drawings showed people, pigs, houses, and so forth with 40–80% obliteration. The student was asked to identify the object represented*

Tareas **E33**

Reconocer un movimiento aplicado a un cuerpo tridimensional y marcar/dibujar/completar alguna característica del objeto inicial.

(Bishop, 1983, p. 193)

12 Matchbox corners *The matchbox corners was a subtest from Spatial Test 2 produced by the National Foundation for Educational Research. United Kingdom. A matchbox is drawn, with dotted hidden lines. and a large dot is placed at one corner. Four matchboxes are then shown in different orientations and the student must place the dot on the correct corner of each.*

(Gutiérrez, 1991, p. 53)

En un tercer tipo de actividad realizada con estos cubos, se daban a los estudiantes láminas de papel con una vista de un cubo y con varias vistas más de ese cubo en las que había caras en blanco, debiendo los estudiantes dibujar las figuras que faltaban en las caras (figura 7).

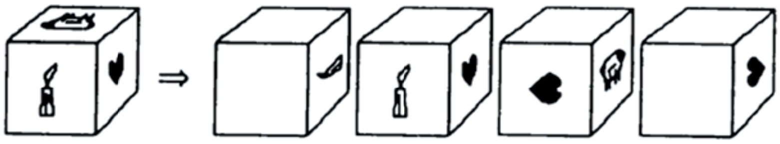


Figura 7.

Tareas **E34**

Identificar nudos. Dada un diagrama de cuerdas, identificar si es o no un nudo o dados varios diagramas identificar si se trata o no del mismo nudo

(Jones, 1998, p. 84)

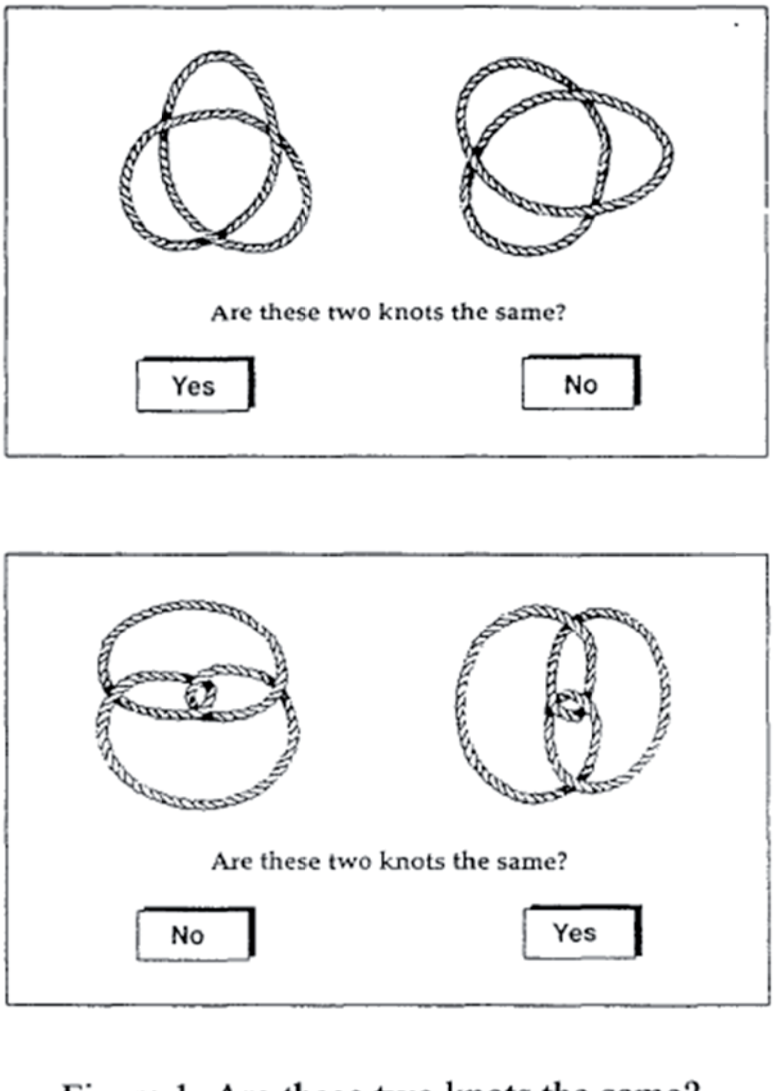


Figure 1: Are these two knots the same?

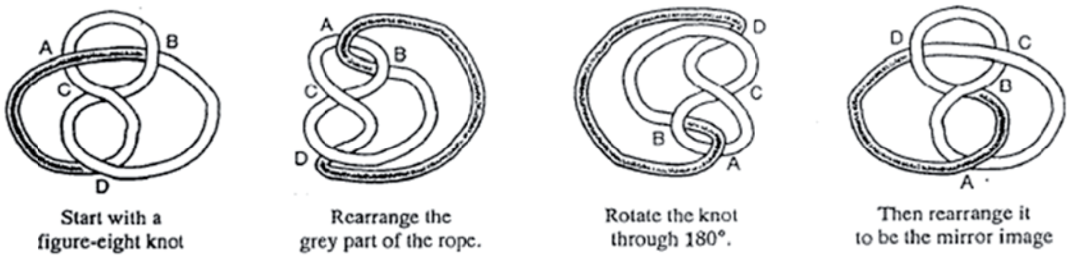


Figure 2: Can you make the mirror image of the first knot?

(McLeay & Piggins, 1996, p. 407)

Each of the 126 tasks consisted of a pair of knots, unknots or knot with unknot. Each pair was identical in shape and number of crossings, but not necessarily the same topologically, and was represented as constructed of rope with the ends joined to form a closed loop. Presentation was by a computer monitor.

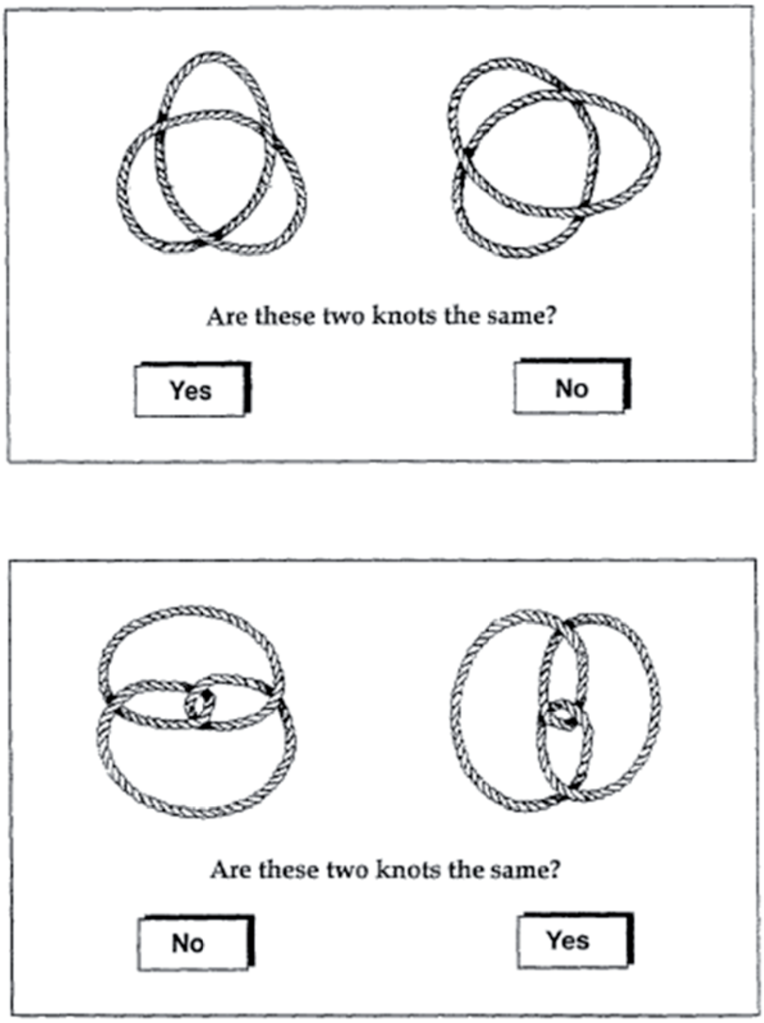


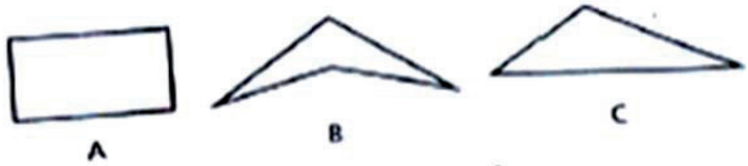
Figure 4. Examples of stimulus pairs with rotation

Tareas **P01**

Comprensión/reconocimiento de conceptos geométricos elementales y propiedades

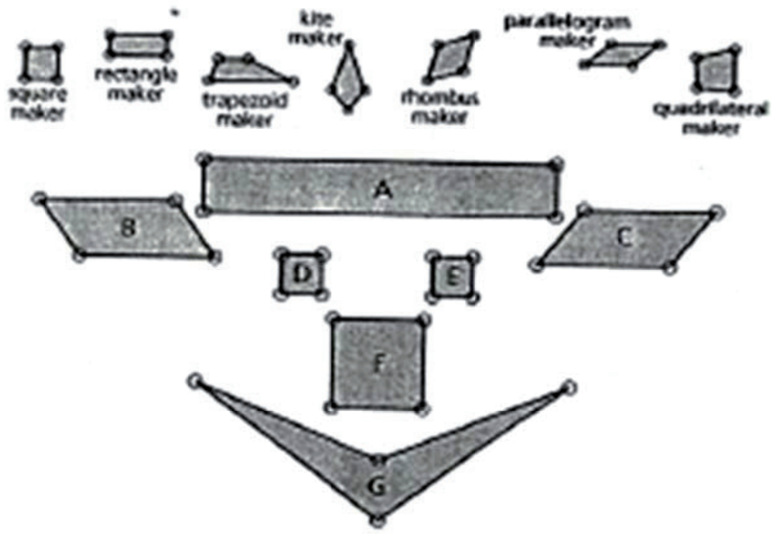
(Battista, 2007, p. 854)

En esta tarea, se presentan tres polígonos a los alumnos, como los que aparecen más abajo, y se les pregunta "¿Qué dos se parecen más? ¿Por qué?"



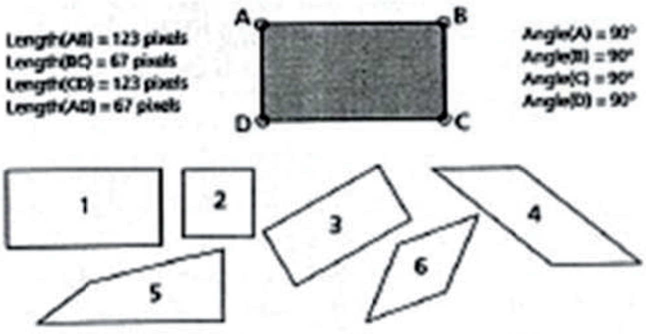
(Battista, 2007, p. 874)

Realizar el diseño que consiste en las Formas A-G con los 7 *Shape Makers* (Battista, 1998a).



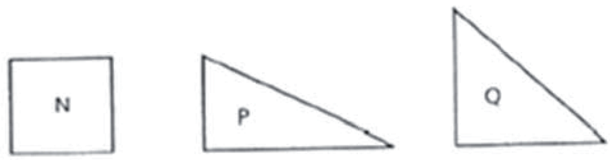
(Battista, 2007, p. 875)

¿Cuáles de las Formas 1-7 pueden hacerse mediante el *Rectangle Maker* (Battista, 1998a)?



(Battista, 2007, p. 885)

2. Explain how shape N is different from shapes P and Q.



(Clements & Battista, 1989, p. 455)

No.	Description
2	Draw an angle
3	Draw a larger angle
4	Circle those figures that are angles
5	Number of angles in a triangle
6	Number of angles in a rectangle
7	Number of angles [3 segments]
8	Number of angles ["X"]
9	Larger angle [length of segments]
10	Larger angle [orientation]
11	Larger angle [orientation; same measure]
12	Most/least turn on a path
13	Sort angles
14	Draw an angle twice as large
15	Recognition of right angles
Angle total	
17	What are the parts of shapes?
18	Tell a Martian how to make a shape
19	Transform a template
20	Drawing machine
21	Which letter is in a circle?
22	Sort quadrilaterals
23	"Building" problem
Shape and motions total	
24	Map

(Clements & Battista, 1989, p. 457)

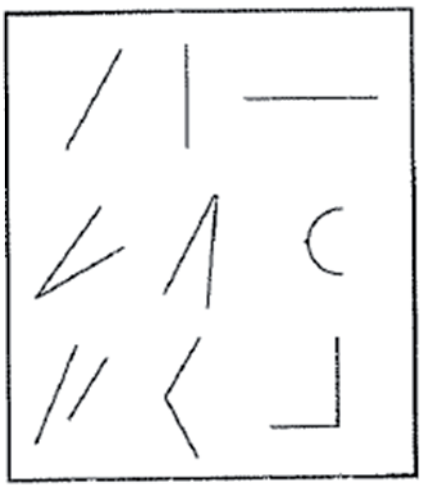


Figure 1 Item 4. Children were told,
"Draw a line around all those figures that are angles."

(Clements & Battista, 1989, p. 462)

Which letter is in a circle in this figure?

- O f
- O g
- O h
- O j
- O *None of the above*

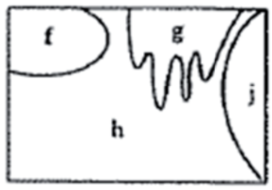


Figure 2 Item 21. (From the *California Achievement Tests, Form C, Level 13*. By permission of the publisher, CTB/McGraw-Hill, 2500 Garden Road, Monterey, CA 93940. Copyright 1977 by McGraw-Hill, Inc. All rights reserved. Printed in the U.S.A.)

(Clements & Battista, 1990, p. 360)

1 What is an angle?

2. Can you draw an angle? Why is that an angle?

3. Can you draw a bigger angle? Why is it bigger?

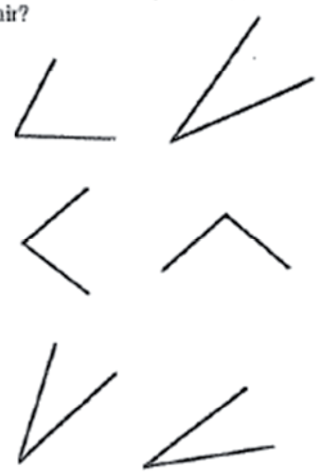
4. Circle those figures below that are angles.

5. How many angles does a triangle have?

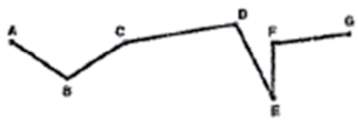
6. How many angles does a rectangle have?

7–8. How many angles do these figures have?

9–11. Which angle is bigger in each pair?



12. You are walking along this path. You start at point A and end at point G. At which point would you have to turn the most? At which point would you have to turn the least? (adapted from Noss, 1987) (2, 3)



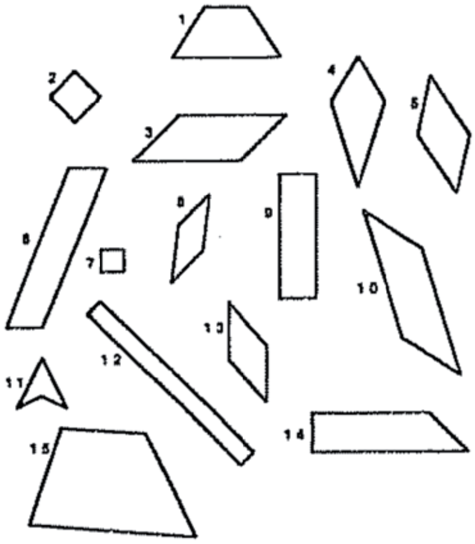
13. A robot turns 90 degrees (a right angle) every time it turns. How many turns must the robot make before it is facing in the same direction as it was when it started?

14. Another robot turns 30 degrees every time it turns. How many turns must this robot make before it is facing in the same direction as it was when it started?

Figure 1 Interview Items (continues on next page)

(Clements & Battista, 1990, p. 361)

16. Look at the four–sided figures below. Show me all the rectangles. Suppose that a friend had the same figures on another sheet of paper except that your friend's figures did not have numbers next to them. What could you tell your friend to look for so that he or she could pick out all the rectangles on the sheet? (3)



17. Draw a quadrilateral (a four-sided polygon or shape). Draw another quadrilateral that is different from that one in some way. How is it different? Draw another that is different from the first two quadrilaterals in some way. How is it different? (3)

(De Villiers, 1994, p. 14)

On the other hand, with *a priori* classification we could start with the most special concept, a square, and generalize the rectangle and parallelogram consecutively as new concepts, as shown in Figure 3. For example, the rectangle can be generalized from the square by relaxing the requirement that all sides must be equal, but still retaining the property of equal angles. Similarly, the parallelogram can be generalized from the rectangle by relaxing the requirement that all angles must be equal, but still retaining the property of opposite sides parallel. In the same manner we can generalize via a rhombus to a parallelogram.

Similarly we can generalize the concept kite to a new concept, say for example a *perpendicular quadrilateral*, by relaxing the conditions that two pairs of adjacent sides have to be equal but retaining the perpendicularity of the diagonals (see Figure 4).

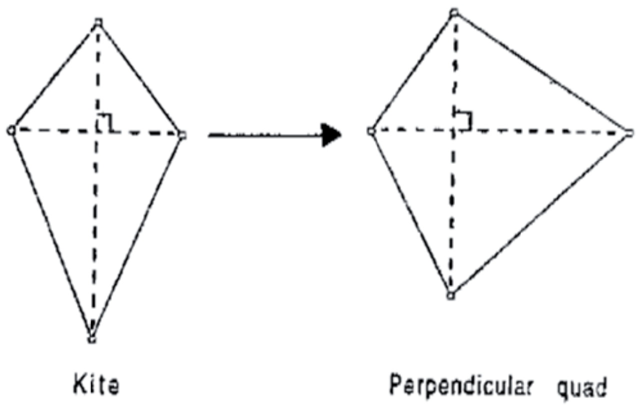
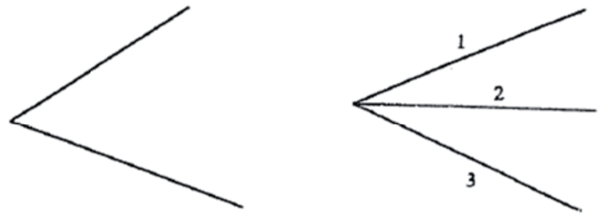


Figure 4

(Fischbein, 1993, pp. 151-152)

Alessandra Mariotti mentions the following example: Alessia (16 years old, 11th grader) has been addressed the following problem: how many angles do you see in the figures a and b? (see Figure 5)



a Fig 5 b

(Fischbein, 1993, p. 155)

Yet another example: comparing the set of points in the segments AB and CD, one has to cope with the conflict between the claim that in CD there are more points, and the claim that the two sets are equivalent (Figure 7)

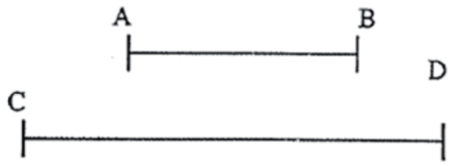


Fig. 7

(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1195)

A subject asked to identify the angles in figure 2 may decide that there are two angles: ∢AOB and ∢BOC, because the initial angle ∢AOC has disappeared 'by cutting it'.

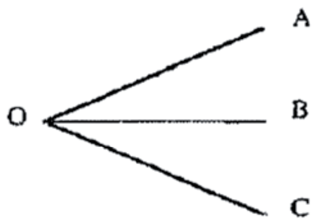


Figure 2.

(Fischbein & Nachlieli, 1998, pp. 1196-1197)

In principle, the students were asked (a) to define the figure, and (b) to identify the defined figure among those presented in figure 3. ('Among the figures presented below, choose the parallelograms'.)

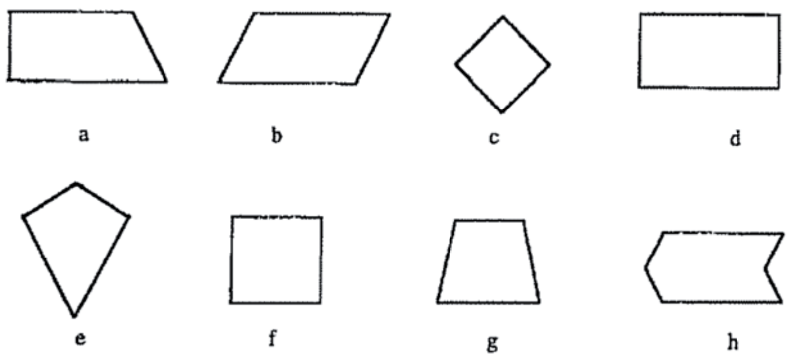


Figure 3.

(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1198)

The students were asked: (a) to define the notion of altitude in a triangle, and (b) to draw the altitude corresponding to one of the sides (AC) of the following triangles (see figure 4). (Similar questions were used by Herschkowitz and Vinner 1982)

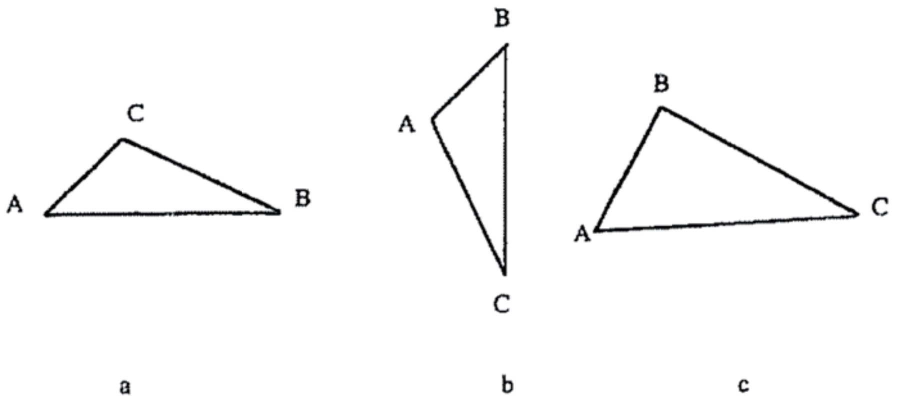


Figure 4.

The students were asked to identify, among the triangles presented in figure 5, those which were right-angled triangles They were also asked to indicate the right angle when this was the case

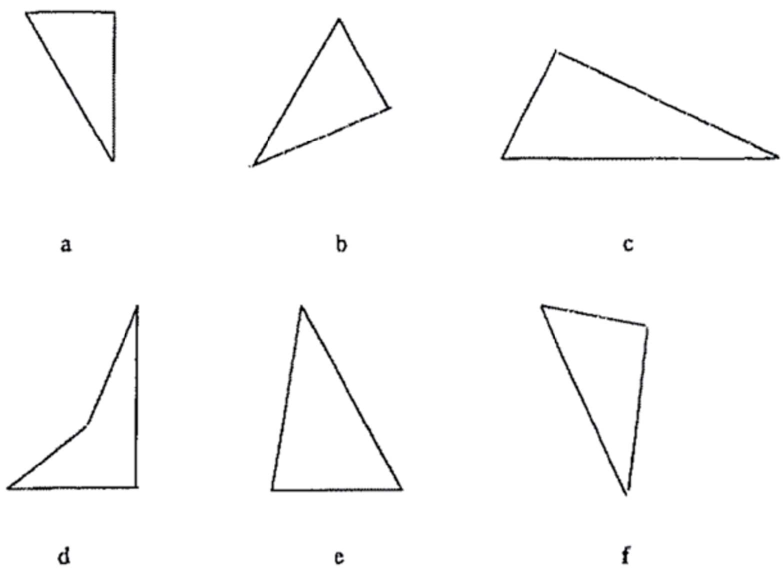


Figure 5.

(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1202)

The concept of kite ('dalton' in Hebrew) is known by Israeli pupils according to the following definition: 'a kite is a quadrilateral in which there are two pairs of equal adjacent sides'. The subjects were given the definition and were asked to identify the kites among the images presented in figure 6.

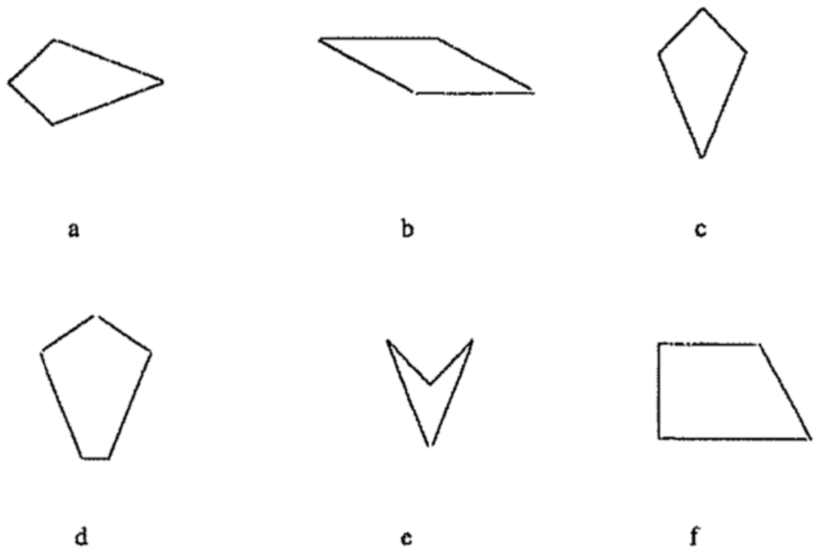


Figure 6.

(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1204)

The question was: Given the square ABCD, the straight line OC crosses BD in mid-point,

(a) Is $\measuredangle B_1$ a right angle?
(b) Is $\measuredangle O_3$ a right angle?
(c) Is $\measuredangle A_4$ a right angle?

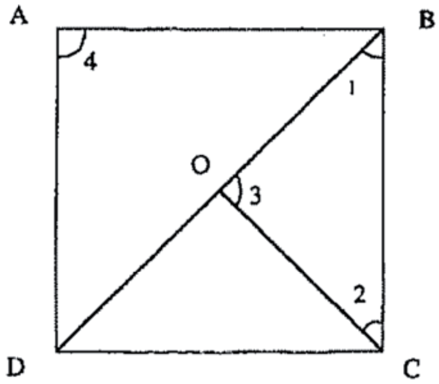


Figure 7.

(Gal & Linchevski, 2010, p. 167)

A frequent geometric task is pointing out shared parts (segments or angles) of two (or more) triangles with a common side (see Fig. 1a).

a

(Gal & Linchevski, 2010, pp. 168-169)

students were asked to identify a pair of adjacent supplementary angles in a given configuration (for example the configuration given in Fig. 2a)

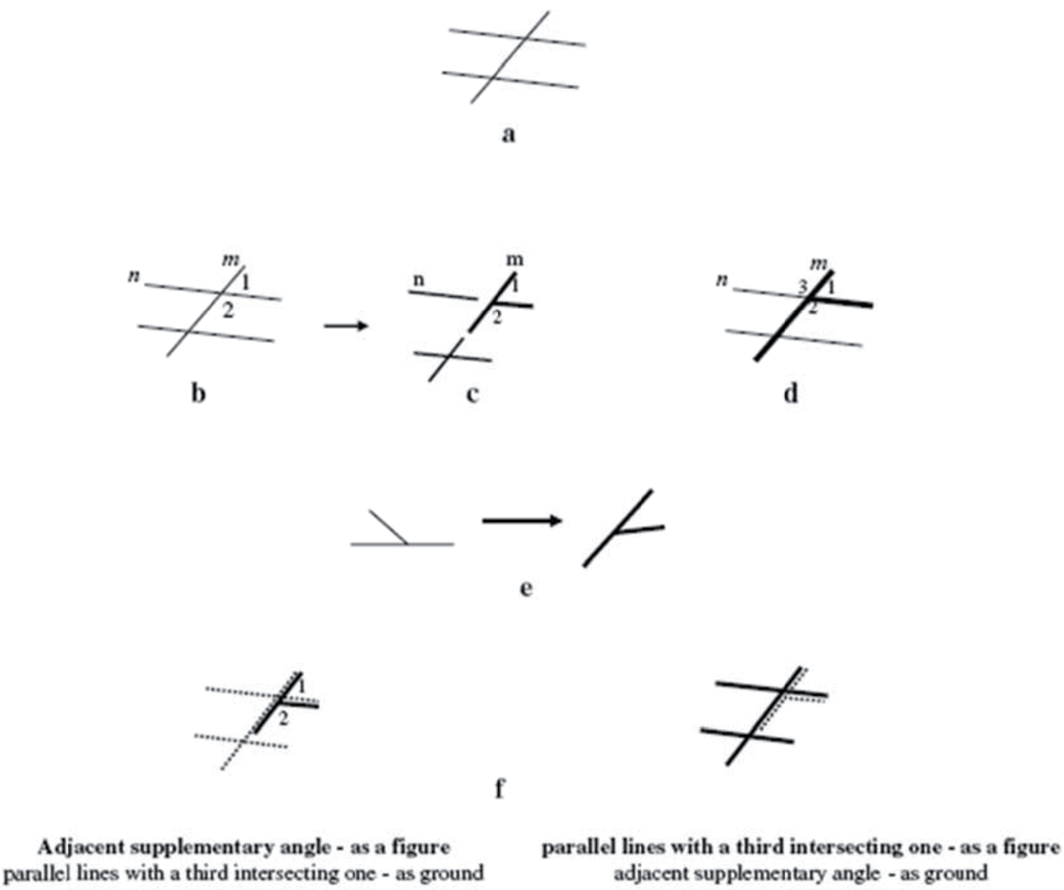


Fig. 2 The required decomposition in order to recognize the adjacent supplementary angles 1 and 2

(Gal & Linchevski, 2010, p. 174)

Fig. 7 Naming a rectangle (conflicting verbal and pictorial information)

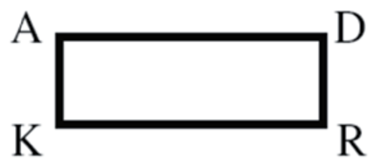


Fig. 8 Naming an angle (conflicting verbal and pictorial information)

(Gal & Linchevski, 2010, p. 176)

Fig. 11 Different mental transformations to judge congruency

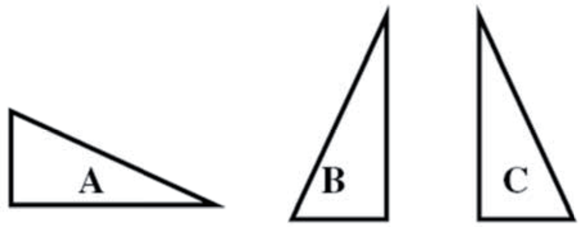
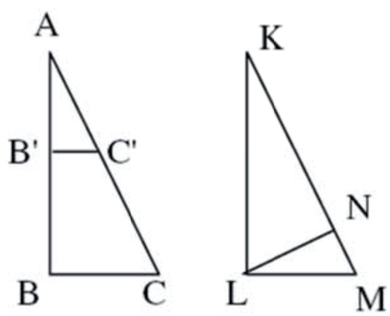


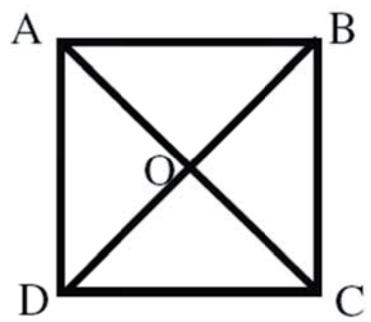
Fig. 12 Different mental transformations to judge similarity



(Gal & Linchevski, 2010, pp. 178)

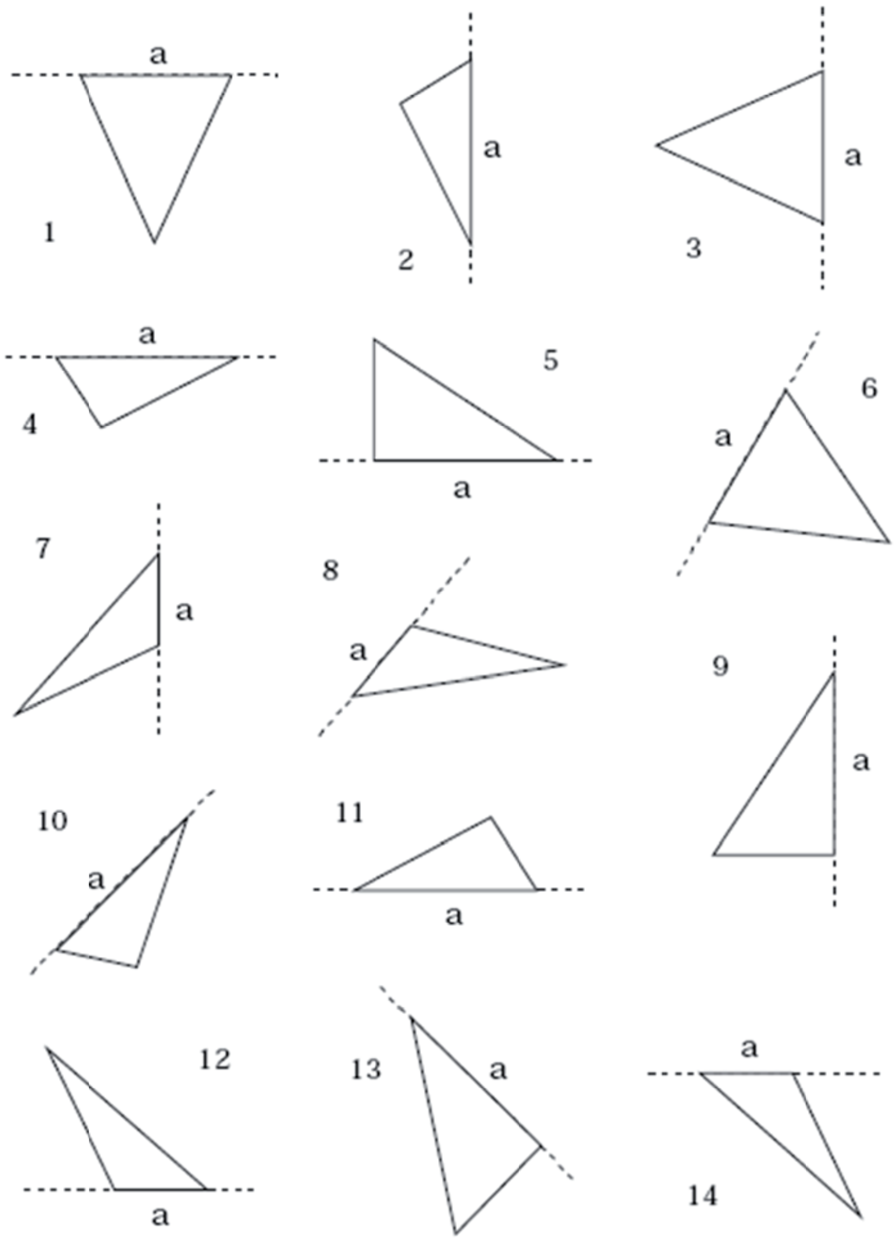
Example I Checking the Perpendicularity of the Diagonals in a Square.

Fig. 14 The teacher's draw of a square and its diagonals



(Gutiérrez y Jaime, 1996, Anexo 1, Anexo 2)

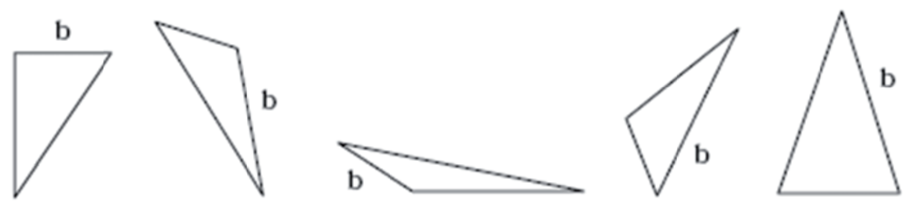
En cada triángulo, traza la ALTURA sobre el lado marcado con la letra a.



A) Traza una recta perpendicular a cada una de éstas.

B) Desde el punto, traza una recta perpendicular al segmento o a su prolongación.

C) Indica mediante **B** el vértice opuesto al lado **b** de cada triángulo. Traza después un segmento que vaya perpendicularmente desde el vértice opuesto al lado **b** hasta este lado (b) o su prolongación.



(Gutiérrez y Jaime, 1998, pp. 35-36)

Item 1. - Write [in Figure 2] a **P** on the polygons, write an **N** on the nonpolygons, write a **T** on the triangles, and write a **Q** on the quadrilaterals. If necessary, you may write several letters on each shape.

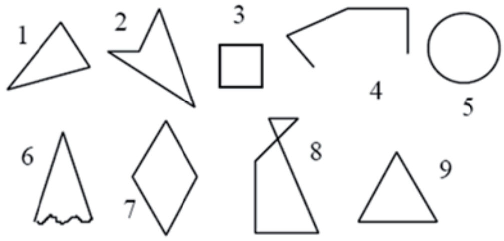


Figure 2.

- Write the numbers of the shapes which *are not polygons* and explain, for each of them, why it is not a polygon.
- The same questions for shapes which *are triangles,* and shapes which *are quadrilaterals.*
- Is shape 8 a polygon? Why? Is shape 2 a triangle? Why?

Item 2. - Write [in Figure 3] an **R** on the regular polygons, an **I** on those that are irregular, a **V** on those that are concave, and an **X** on those that are convex. If necessary, you may write several letters on each shape.

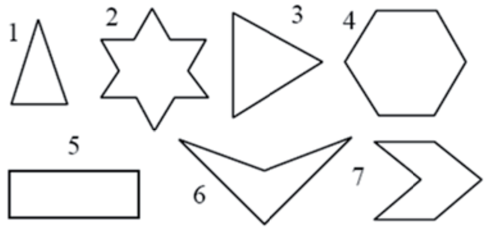


Figure 3.

- For polygons 2, 4, 5, and 7, explain your choice of letters or why you did not write any letter.

Item 4. A) - You can see a shape in Figure 4-a (a rhombus). Make a list of all the properties that you find for this shape (you can draw to explain the properties).

B) - The same question for shape in Figure 4-b.

- a - - b -

Figure 4.

(Hershkowitz, 1989, p. 62)

The "Bitrian" and "Biquad" Examples

Here the learning situation starts with the verbal definition of a "concept". We "invented" the following definitions.

1. **A bitrian** is a geometric shape consisting of two triangles having a common vertex. (See Hershkowitz, Bruckheimer, & Vinner, 1987).
2. **A biquad** is a geometric shape consisting of two quadrilaterals having a common side.

One half of each group (students and teachers) was asked to identify bitrians and biquads from a set of shapes, and the other half was asked to draw two bitrians and two biquads

(Hershkowitz, 1989, p. 68)

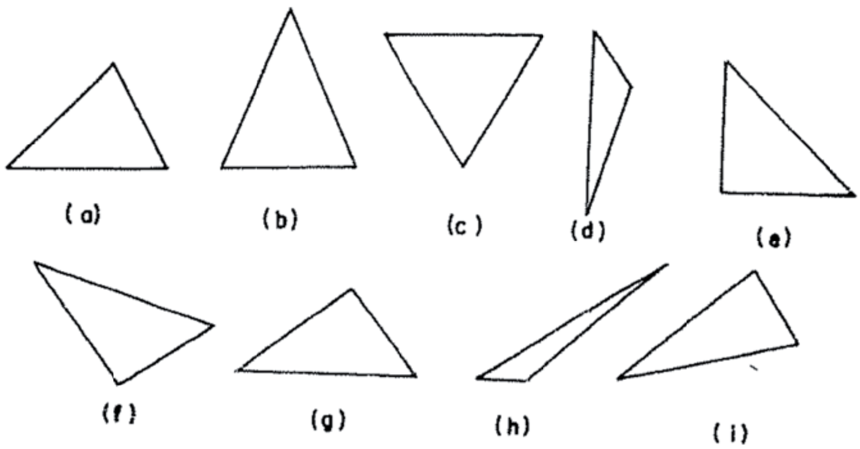


Figure 5: Triangles in Isosceles and right triangle task.

(Hershkowitz, 1989, p. 69)

The task (Vinner & Hershkowitz, 1983) was: Among the following shapes (Figure 6) indicate those which are quadrilaterals. For each shape that is not a quadrilateral explain why.

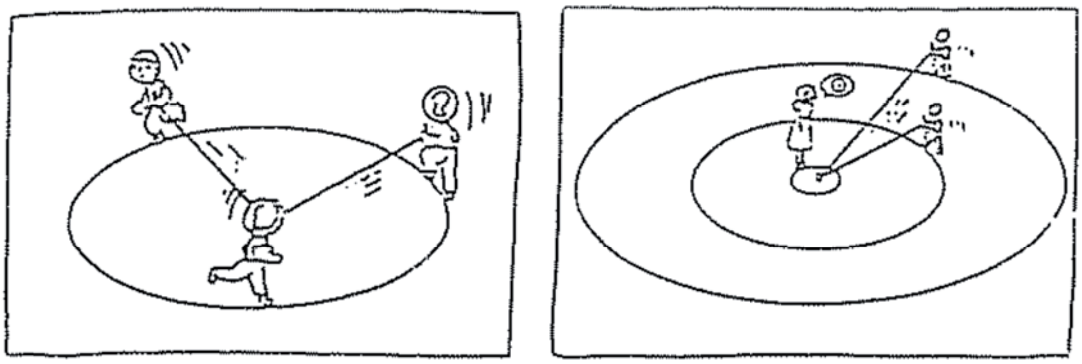
Figure 6: Shapes in quadrilateral identification task.

(Hershkowitz, 1989, p. 70)

The next example is more complicated; the task was to draw the altitude to side "a" in each of 14 triangles of 4 different kinds: isosceles, acute - angled, obtuse - angled and right - angled. There

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, p. 170)

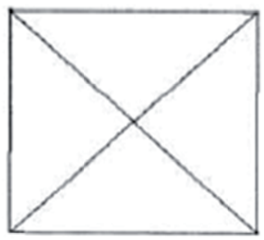
an activity in which children each take one end of a rope (the ropes being first of equal length (Figure 2a) and after that of different length (Figure 2b), whose other end is fixed to some point (the centre), and by walking on the created circles demonstrate visually and physically the circle properties (Figure 2).



(a) (b)

Figure 2 Students use ropes to make circles

(Jones, 2000, p. 66)



What do you know about this shape from the way in which you constructed it?

Think about ..... sides
.... diagonals

Explain why the figure is a square

Figure 2. Visual prompt for constructing a square (task 2, phase 2).

(Jones, 2000, p. 74)

Task 1 of phase 2 asked the students to construct a rhombus and explain why the shape is a rhombus (the task is similar in format to that for constructing a square as shown in Figure 2).

(Jones, 2000, p. 75)

the tasks in phase 3 involved constructing a specified quadrilateral (for example, a rectangle) in such a way that by dragging one of the vertices it could be modified (or transformed) into a special case (in the example of a rectangle, the special case would be a square).

(Jones, 2000, p. 76)

Task 5, of the overall sequence of tasks on quadrilaterals (the first task in phase 3), required the construction of a rectangle that could be modified to a square. The students were then expected to explain why all squares are rectangles. These are their written explanations:

Task 6 required the students to construct a kite that could be modified to a rhombus and explain why all rhombi are kites. In task 7 the students are asked to construct a trapezium that can be modified to a parallelogram and thereby explain why all parallelograms are trapeziums.

(Jones, 2000, pp. 77-78)

Task 9 asked the students to complete the worksheet shown in Figure 3a as a way of showing the relationships between the 'family' of quadrilaterals

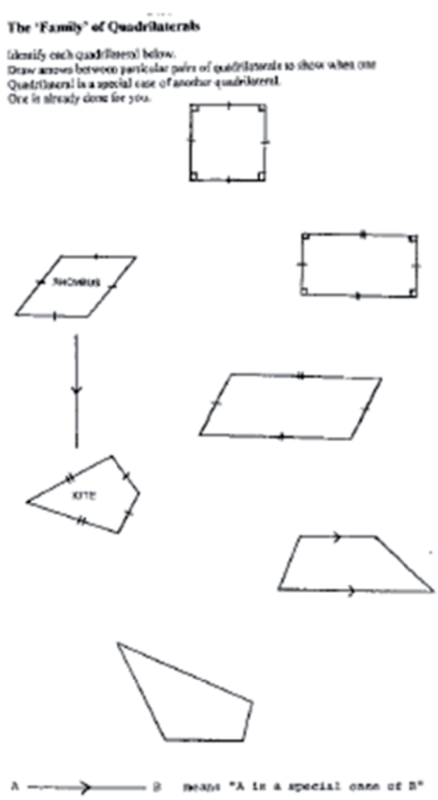


Figure 3a. Worksheet on the 'family' of quadrilaterals.

(Mariotti, 2001, p. 265)

Construct the Bisector of an Angle. Describe and Geometrically Justify your Solution

(Mariotti, 2001, p. 267)

Given a straight line r and a point P not belonging to it. Construct the perpendicular to r passing through P.

Then the following theorem for the isosceles triangle was proved.

In any isosceles triangle, the angle bisector of the angle at the vertex is perpendicular to the opposite base.

(Mariotti, 2001, p. 271)

Given a parallelogram, render one of its angles a right angle: make your observations.

(Mitchelmore, 1986, p. 299-300)

The basic task there was to copy a line perpendicular to a line inclined at 45°. but in other tasks various lines were added to the stimulus or the response sheet or both.

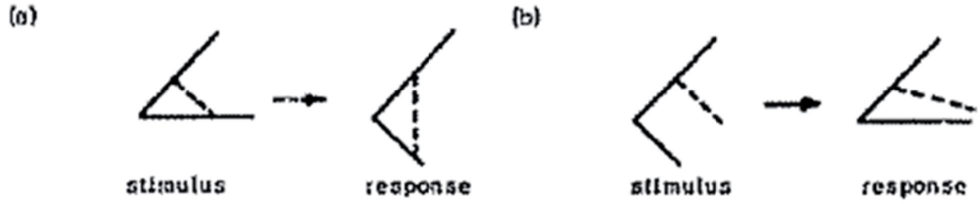


Figure 16.3 'Topological' responses to a copying task. The broken line is the target line

(Mitchelmore, 1986, pp. 299-300)

He asked Jamaican children to add telegraph

poles alongside a drawing of a winding road receding into the distance

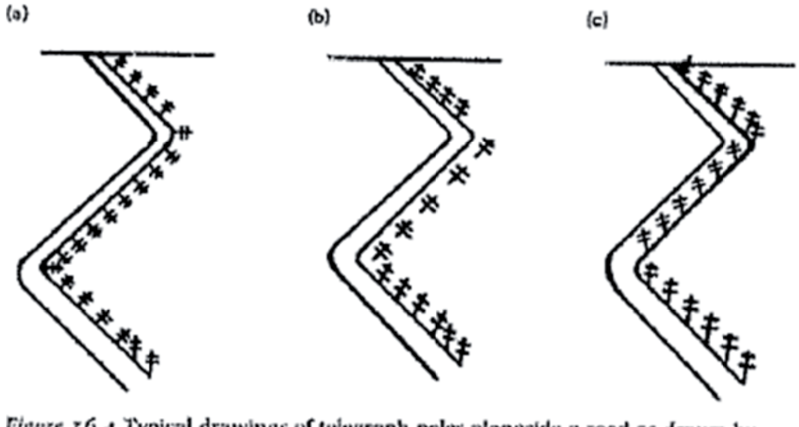


Figure 16.4 Typical drawings of telegraph poles alongside a road as drawn by Jamaican children aged (a) 7 years, (b) 11 years and (c) 15 years.

(Mitchelmore, 1992, p. 122)

The second stage of the interview consisted of children identifying the friends and enemies in various figures (see Figure 1). Children were prompted (e.g. "Are there any more enemies?"), if necessary, to ensure that they analysed each figure fully

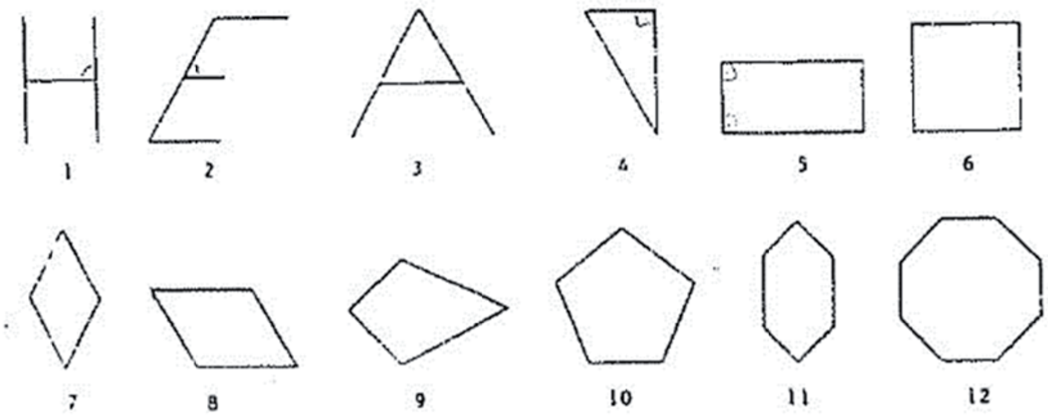


Figure 1: Shapes used for identification of perpendiculars

(Mitchelmore, 1992, p. 123)

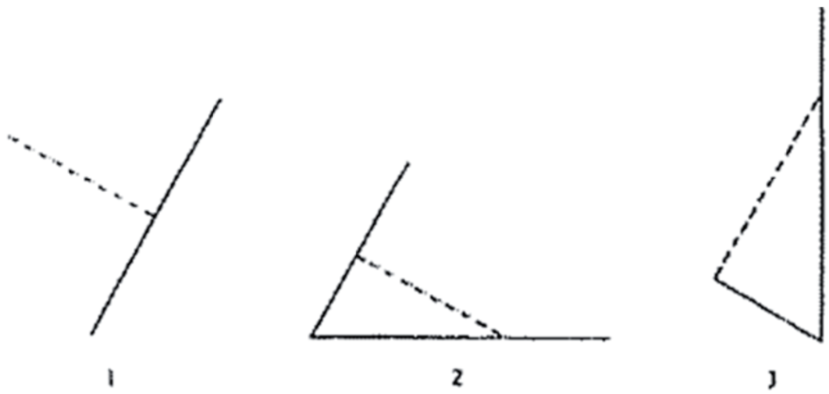


Figure 2: Perpendicular drawing tasks. The broken lines show the target lines (given in red and copied by the subject).

(Mitchelmore & White, 2000, pp. 220-221)

Nine situations were used, chosen from a variety of physical angle contexts: wheel, door, scissors, hand fan, signpost, hill, road junction, tile and wall. The first four situations are movable, while the last five are fixed. Each situation was represented by one or more models, illustrated in Figure 1. Each movable situation (wheel, door, scissors and fan) was represented by a single adjustable model. Each of the fixed situations (signpost, hill, road junction, tile and wall) was represented by a set of three models representing a 'neutral' configuration (angle 0° or 90°), an angle

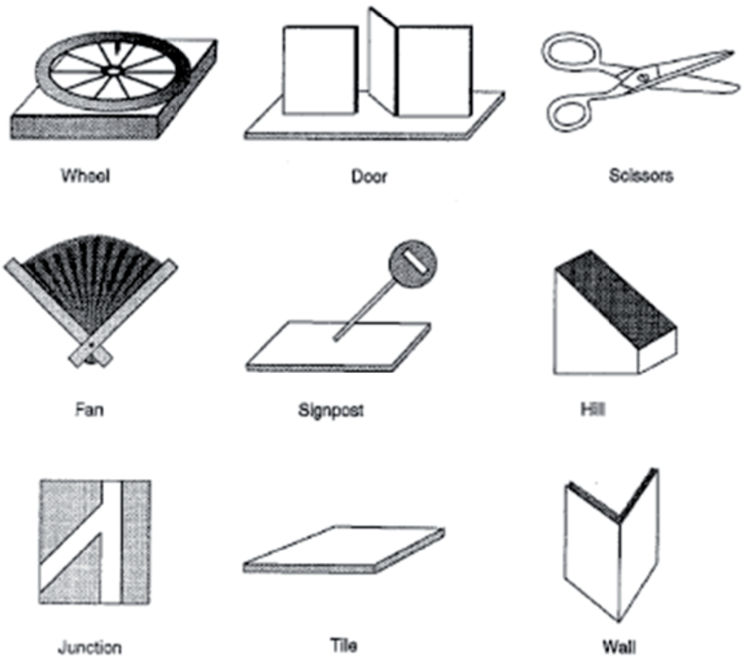


Figure 1. Models used to represent the nine physical angle situations.

of 45°, and a 'middle' angle (22.5° or 67.5°). Only one of the three models is shown in Figure 1. Adjustable models of the fixed situations were deliberately not used, in order to avoid artificially suggesting a dynamic interpretation.

A drinking straw which could be bent at various angles was used as an abstract angle model. A second straw fixed at 45° was also used.

5.3. *Procedure*

Each student was shown one of the following combinations of the situations shown in Figure 1:

Wheel, door, scissors	Door, signpost, tile
Fan, signpost, hill	Door, hill, junction
Junction, tile, wall	Door, fan, wall
Wheel, fan, junction	Scissors, hill, wall
Wheel, signpost, wall	Scissors, fan, tile
Wheel, hill, tile	Scissors, signpost, junction

(Mitchelmore & White, 2000, p. 223)

Task 1: Global angle representation. The interviewer laid the flexible drinking straw on the table in front of the student, showed how it bent, and asked the student to demonstrate how it could be used to represent the general situation in the given model. For example, the student was asked how the straw could be used to show "how the wheel turns" or "how the hill slopes".

Task 2: Size matching (recognition). The interviewer bent the two parts of the flexible drinking straw together, laid the straw on the table in front of the student, opened it through an angle of about 45°, and then replaced it by the fixed straw. The student was then asked to demonstrate the same angle on the physical model. For example, the student was asked to "open the door by that amount" or to "point to the tile whose corner is like that".

Task 3: Angle matching (recognition). The student was asked to place the 45° bent straw on the physical model to explain how he or she had solved the previous task.

Task 4: Global angular similarity. The interviewer asked if the student could see "anything the same" about the two situations. Neutral prompts such as "Anything else?" were given until the student reported no further similarities.

Task 5: Size matching (similarity). The interviewer set one situation to show an angle of 45° by moving a movable model or selecting a fixed model. She then asked the student to set the other situation to "show the same as this".

Task 6: Angle matching (similarity). The student was asked to use the flexible straw to explain how he or she knew the two settings were the same.

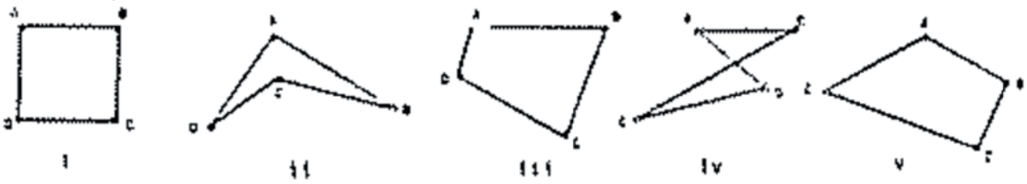
Figure 2. Interview tasks.

(Owens, 1992, p. 205)

Subtest 6 is primarily concerned with the recognition of congruent angles in shapes in different orientations or contexts.

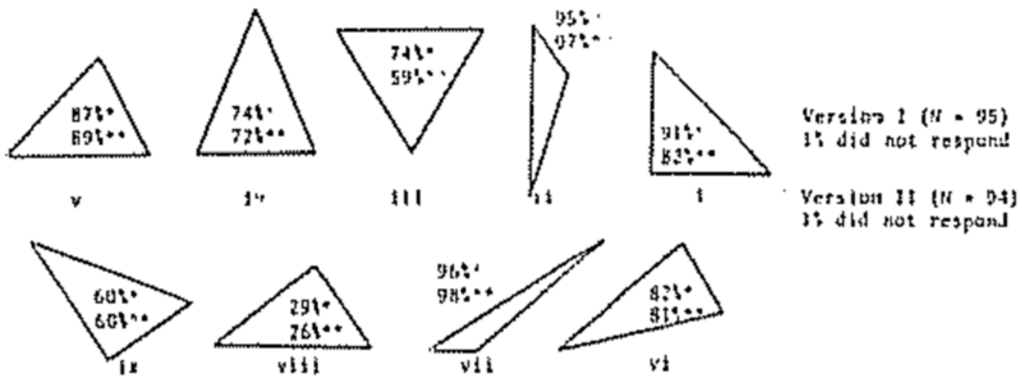
(Vinner & Hershkowitz, 1983, pp. 23-24)

Among the following shapes indicate those which are quadrilaterals

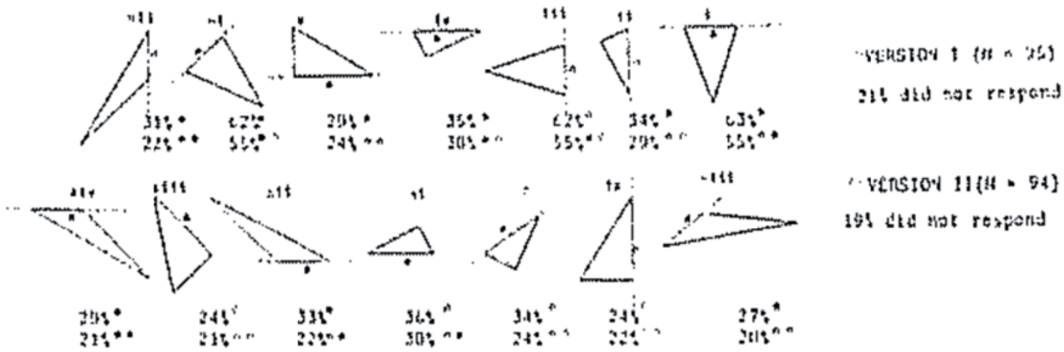


for each shape that is not a quadrilateral explain why

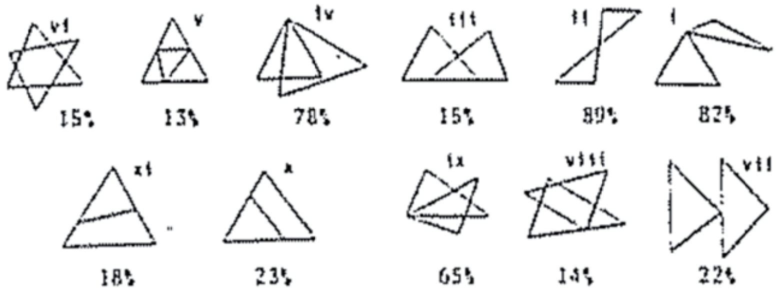
Identify all the right triangles among the following tringles:



Construct an altitude to the side a in the following triangles:



Students who responded to version I of the questionnaire were asked to identify all the bitrians among the following shapes:



N = 95   4% did not respond

Tarea **P02**

Aplicación para la demostración y demostraciones visuales.

(Arcavi, 2003, pp. 221-222)

"Imagine a string around the circumference of the earth, which for this purpose we shall consider to be a perfectly smooth sphere, four thousand miles in radius (6,400 km approximately). Someone makes a proposal to place a string on six-foot-high (about 1.8 meters) poles. Obviously this implies that the string will have to be longer." How much longer? Papert

ABRAHAM ARCAVI

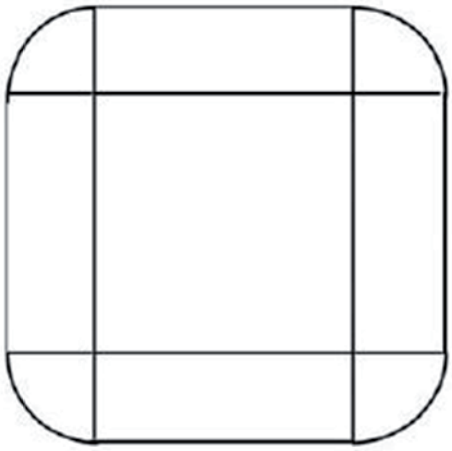


Figure 6. A string around a 'square Earth'.

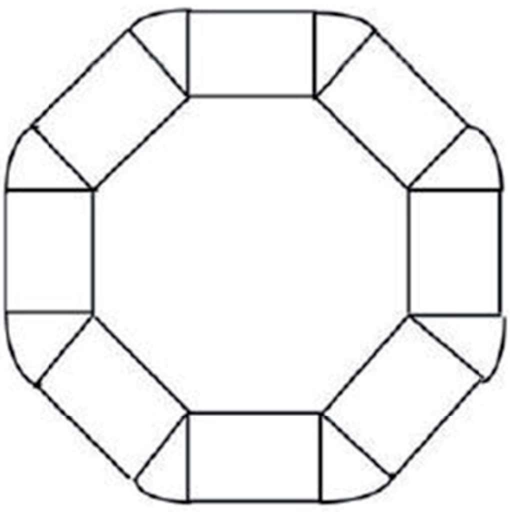


Figure 7. A string around an 'octagonal Earth'.

(Arcavi, 2003, p. 226)

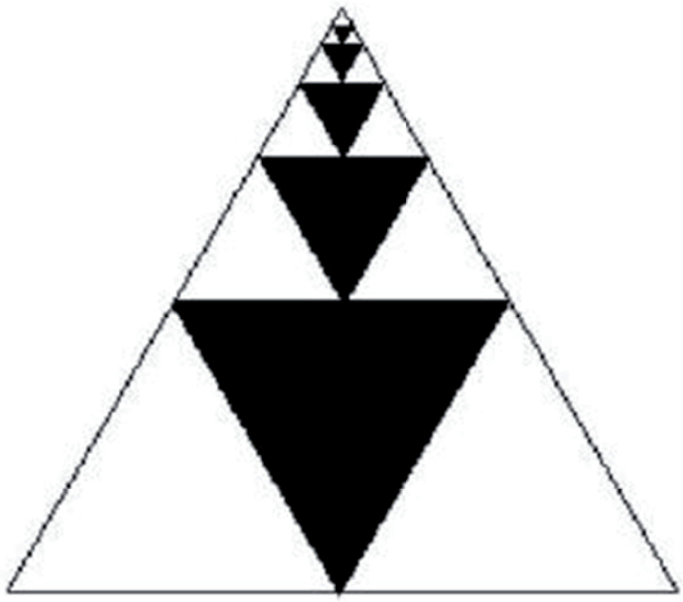


Figure 11. A visual representation for the sum of the series.

(Arcavi, 2003, p. 227)

How many matches are needed to build the following nxn square?

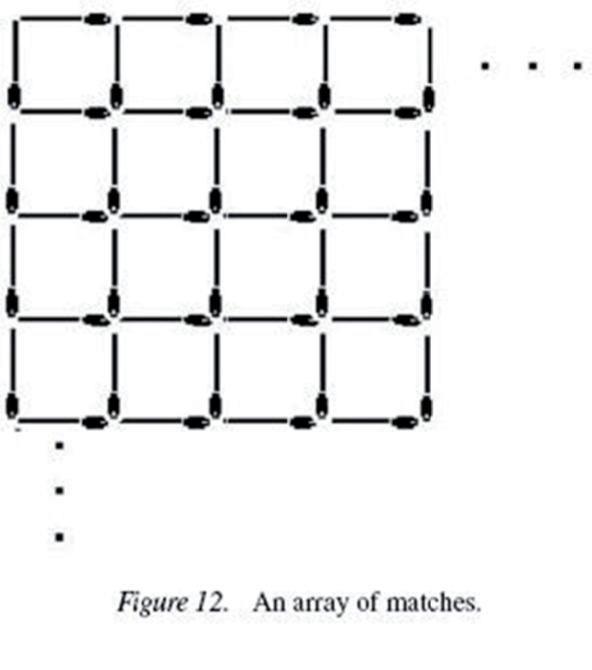
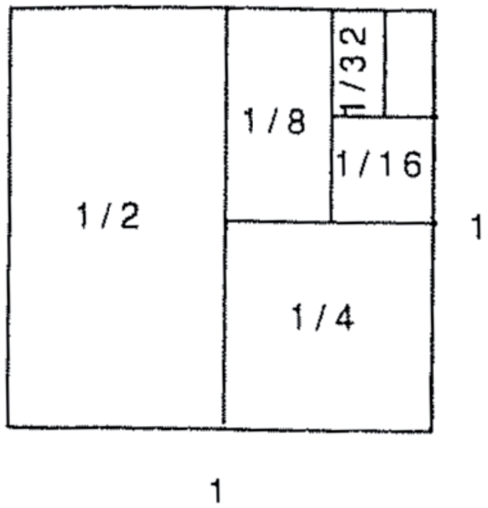


Figure 12. An array of matches.

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989, p. 52)

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \quad =$



(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989, p. 54)

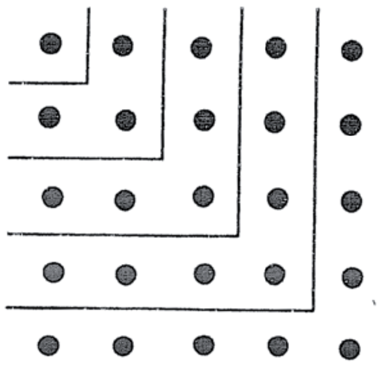


Figure 5. Visual Representation of Adding Odd Numbers

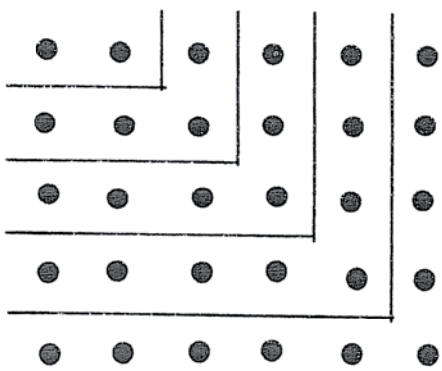


Figure 6. Visual Representation of Adding Even Numbers

(Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989, p. 56)

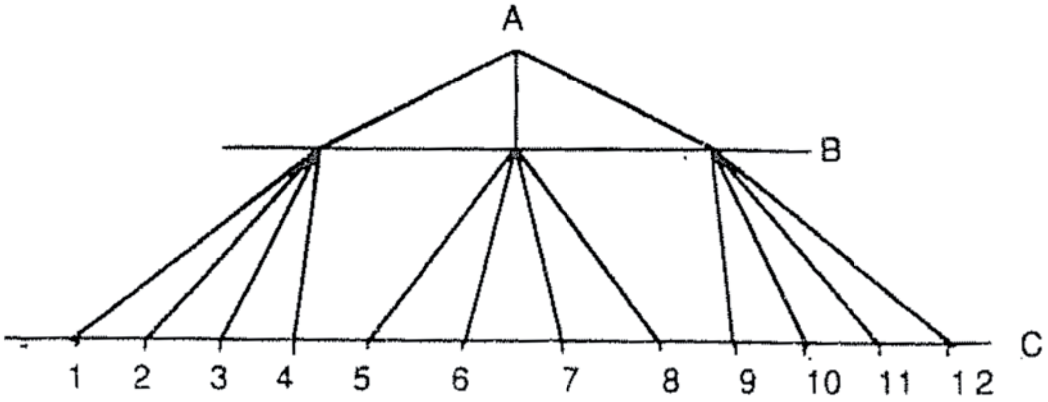


Figure 9. Using Tree Diagrams in Problem Solving: Finding the Number of Routes from A to C via B

(De Villiers, 1994, pp. 15-16)

If the midpoints E. F. G and H of the sides of any quadrilateral ABCD are consecutively connected, then EFGH is a parallelogram, rectangle, rhombus or square.

The exterior angle of a cyclic quadrilateral, isosceles trapezium, right kite, rectangle or square is equal to the opposite interior angle.

Another particularly illustrative example involves Von Aubel's theorem and a special case of it. Von Aubel's theorem states that if squares are constructed on the sides of any quadrilateral, then the line segments connecting the centers of opposite squares are equal and perpendicular. [A proof is given in Yaglom, 1962: 95-96.] An interesting special case is that if squares are constructed on the sides of a parallelogram, then the centers of these squares also form a square (see Figure 7).

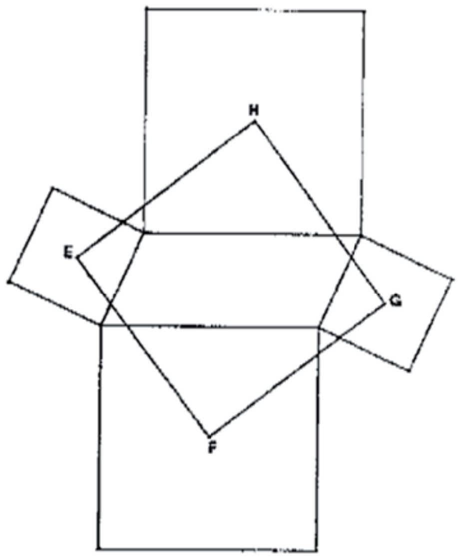


Figure 7

(Duval, 1999, pp. 16, 19)

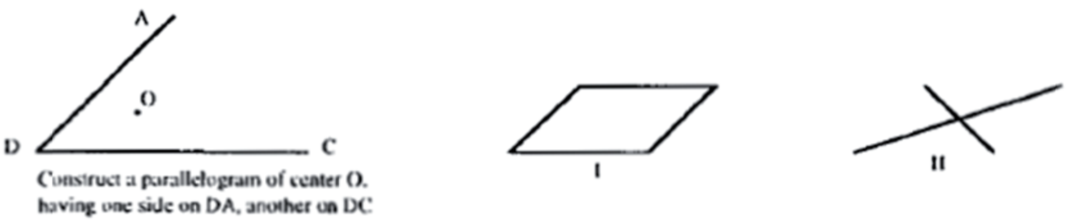


Figure 5. Which of the two figures, I or II, can be useful to solve the problem? With the visual help of *Figure* I, one can only roughly make the drawing by successive attempts of measurements on DA and DC. With the visual help of *Figure* II, one easily succeeds by drawing the diagonal DOD'. Although they knew all the properties of parallelogram, most students failed as if they were confined themselves to visualization I (Dupuis, 1978, pp.79-81). In fact, I and II give a visual help only when one works with configurations of 1D figural units.

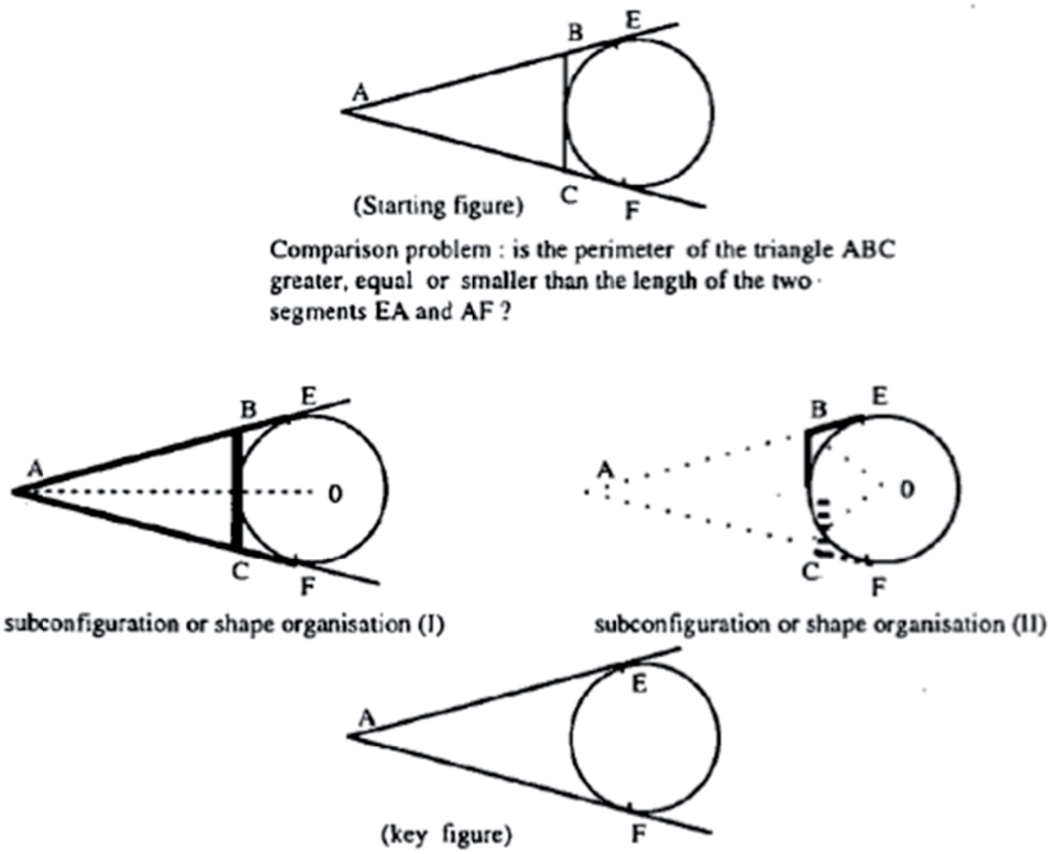


Figure 8. The perception of the starting figure highlights the shape organization (I) and makes it steady. But solving the problem requires the apprehension of the shape organization (II). Changing the perceptual apprehension of (I) into a perceptual apprehension

(Fischbein, 1993, pp. 150-151)

In an experiment, carried out some years ago, we have presented the following theorem: "$ABCD$ is a quadrilateral and $PQRS$ the midpoints of its sides. One should prove that $PQRS$ is a parallelogram" (Figure 4).

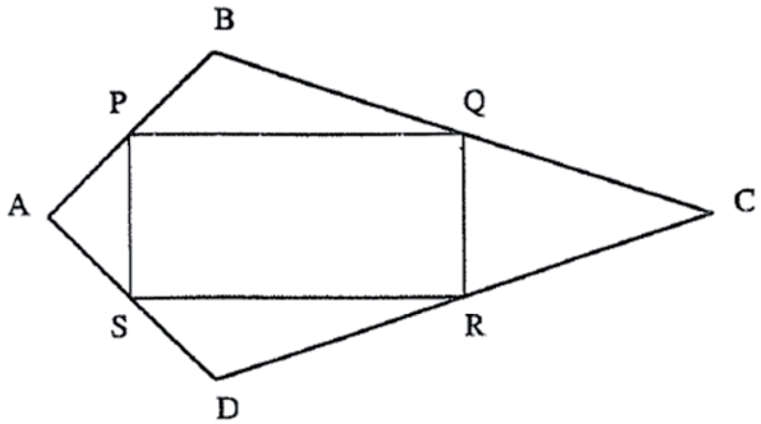


Fig 4

(Fischbein, 1993, p. 140) y

(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1194)

Let us mention an example: consider an isosceles triangle ABC with AB = AC (figure 1). We want to prove that $\measuredangle B = \measuredangle C$.

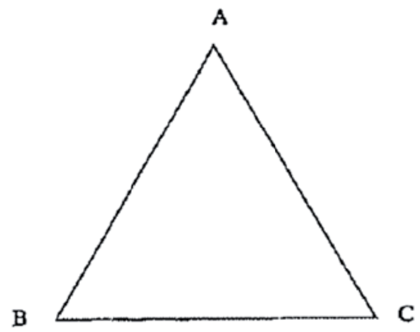
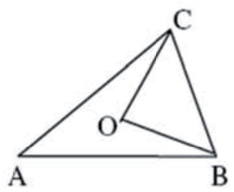


Figure 1.

(Gal & Linchevski, 2010, p. 171)

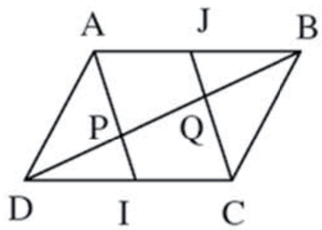


O is the outer center* of triangle ABC.
Show that the angle BOC is twice the same as angle BAC.

*In Chinese, we call the center of circumcircle of a triangle as 'outer center'.

Fig. 3 Chang and Lin's (2005) assignment

(Gal & Linchevski, 2010, p. 173)



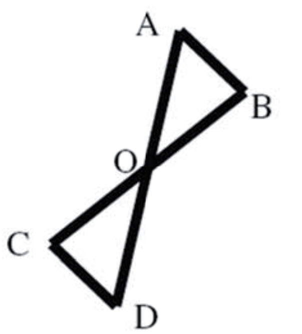
Given a parallelogram ABCD.
I, J -.midpoints of CD, AB.

Prove that DP=PQ=QB.

Fig. 6 Triangles' recognition in top-down processing in Duval's (1998) task

(Gal & Linchevski, 2010, p. 173)

Thus, given that AO=OD and BO=OC and the task is to prove that AB=CD, the solver can easily identify the two triangles in the configuration in order to prove that they are congruent.



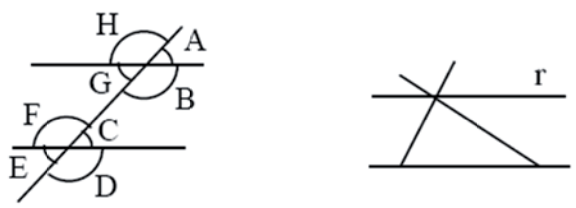
(Gutiérrez y Jaime, 1998, pp. 38-39)

Item 5.1. - Recall that a *diagonal* of a polygon is a segment that joins two non adjacent vertices of the polygon. How many diagonals does an n-sided polygon have? Give a proof for your answer.

Item 5.2. - Complete the three following statements (you can draw if you want): In a 5-sided polygon, the number of diagonals which can be drawn from each vertex is ..... and the total number of diagonals is .....

Item 6.1. - Prove that the sum of the angles of any acute triangle is 180°.

Item 6.2. - Recall that, if you have two parallel straight lines cut by another straight line (Figure 5-a): all the acute angles in the figure (A, G, C, E) are equal. All the obtuse angles in the figure (B, H, D, F) are equal.



- a - - b -

Figure 5.

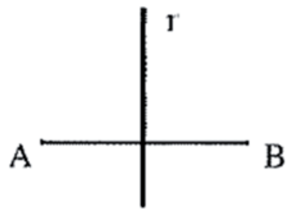
Taking into account Figure 5-b (line r is parallel to the base of the triangle) and the properties mentioned above, prove that the sum of the angles of any acute triangle is 180°.

(Gutiérrez y Jaime, 1998, pp. 41-42)

Item 7. A) - Prove that the two diagonals of any rectangle have the same length.

B) - Recall that the *perpendicular bisector* of a segment is the line perpendicular to that segment that cuts it through its midpoint (line *r* is the perpendicular bisector of segment AB in Figure 9).

Prove that any point of the perpendicular bisector of a segment is equidistant from the endpoints of the segment.



Item 8. - Usually a *parallelogram* is defined as a quadrilateral having two pairs of parallel sides.

Could a *parallelogram* also be defined as a quadrilateral in which the sum of any two consecutive angles is 180°? Justify your answer: If your answer is affirmative, prove that both definitions are equivalent. If your answer is negative, draw some example.

(Soto & Andrade, 2008, pp. 7-8)

How much is: $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4$?

Could you calculate or estimate its value, without much toil?

Example 2: Sum of powers of 1/3.

Then we suggested the case of the sum of powers of 1/3 instead of 1/4.

Students and teachers quickly visualized stepwise the triangles in Fig. 11.

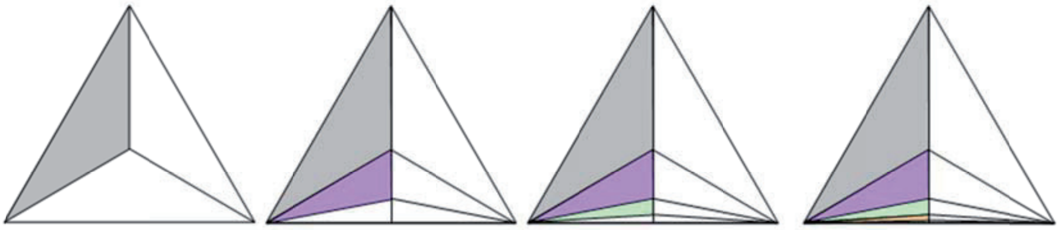


Figure 11

How much is: $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4$?

Could you calculate or estimate its value, without much toil?

(Soto & Andrade, 2008, p. 10)

Example 2: Sum of powers of 1/5.

How much is $1/5 + (1/5)^2 + (1/5)^3 + (1/5)^4 + (1/5)^5$?

Can you calculate, or estimate the value of this sum?

Can you "see" how much it should be?

Is it possible to represent the usual numerical sequence, up to some number, in a non verbal and non sequential way? Let us say the sequence 0, 1, 2, 3, ...,63.

(Yakimanskaya, 1991, pp. 185-186)

3. Prove that parallelograms $ABCD$ and $DKBL$ share a common center of symmetry (Figure 23).

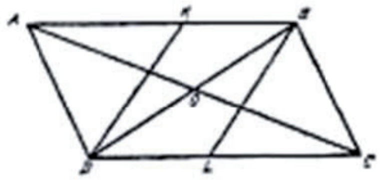


Figure 23.

4. In ΔABC, draw two lines AD and AE from point A to side BC, such that AD forms an angle congruent to C with $[AB]$, while AE forms an angle congruent to B with $[AC]$. Prove that ΔABC is an isosceles triangle (Figure 24).

Grade 7

1. Given trapezoid $ABCD$, where $[AD] \parallel [BC]$. Line segment KL is constructed through point K, the midpoint of side DC such that $[KL] \parallel [AB]$ and $L \varepsilon [AD]$. Prove that $S_{BLDC} = S_{ABL} = 0{,}5S$ ABCD.

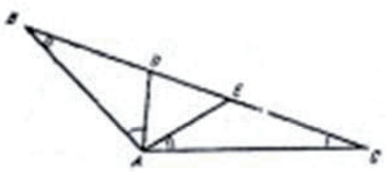


Figure 24.

(Yakimanskaya, 1991, pp. 186-187)

4. The midpoints of sides *BC* and *AD* (points *M* and *N*) of quadrangle *ABCD* are connected to its vertices. Prove that $S_{AMD} = S_{ABN} + S_{NCD}$ (Figure 25).

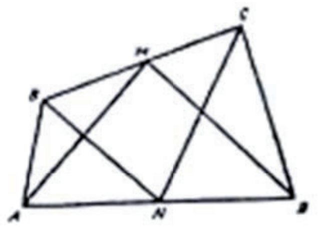


Figure 25.

(Yakimanskaya, 1991, pp. 187-188)

7. Quadrilaterals *ABCD* and *ABEF* are both parallelograms. Prove that quadrilateral *DCEF* is a parallelogram (Figure 27).

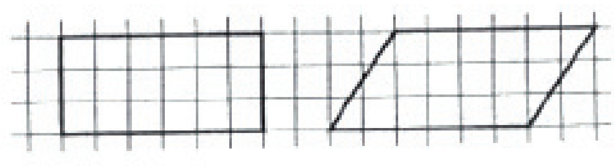
Figure 27.

Tareas P03

Comparar/relacionar/encontrar medidas (longitudes, áreas, ángulos, etc.)

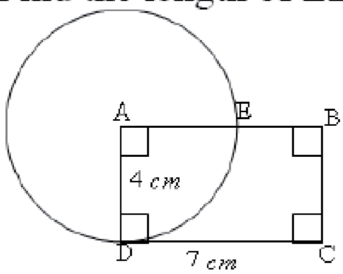
(Battista, 2007, p. 885)

1. In what ways are the figures alike?



(Deliyianni, Elia & Gagatsis, 2009)

5. In the following figure the rectangle ABCD and the circle with centre A are given. Find the length of EB.



(Ve7)

(Dreyfus, 1995, p. 5)

On another occasion, a point, a line ('river') and five straight line segments from the point to the line were presented, none of them perpendicular to the line (see Fig. 1). When asked which was the shortest path from the point to the river,

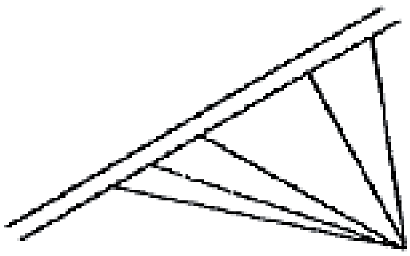
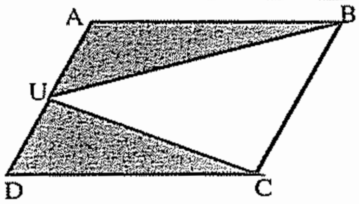
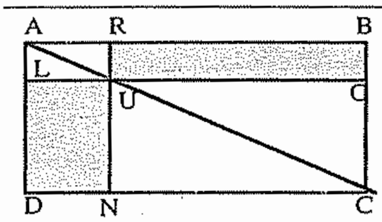


Fig. 1. Which path is shortest?

(Duval, 1995, pp. 144-145)

I	*Statement of particular case*	*Statement of general case*
	In the parallelogram ABCD, U is the midpoint of the side AD. Compare the areas of the two shaded parts and the white part.	When the point U is moving on AD . . . do you get the same answer as in the previous question?
Responses	56%	34%

II	*Statement of particular case*	*Statement of general case*
	In the rectangle , AC is the diagonal of ABCD. Compare the areas of the two shaded rectangles.	When the point U is moving on AD . . . do you get the same answer as in the previous question?
Responses	60%	24%

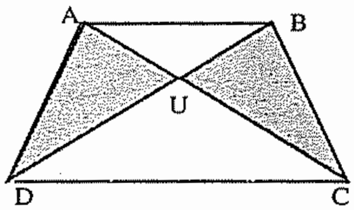
III	*Statement of particular case*	*Statement of general case*
	In the trapezium ABCD, U is the intersection of the two diagonals AC and BD. Compare the areas of the two shaded triangles.	In any trapezium, with unknown lengths, you draw shaded triangles do you get the same answer as in the previous question?
Responses	11%	0%

Fig.1. Variation of figural context and variation of performances in the resolution of a problem among 123 students aged 14 years ([11], pp. 39–46, 92)

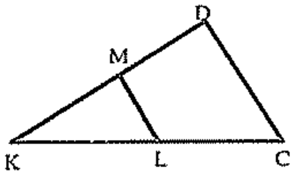
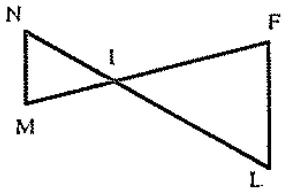
Homothetic Triangles	*Oblique side s in line*	*Third side (parallel sides)*
 KM=3 cm, KD=7 cm, KC=5.5 cm, ML=2 cm, (ML) // (DC)	What is the length of KL? 70. 5 %	What is the length of DC? 49 %
 IM=3 cm, IF=5 cm, IL=4 cm, NM=2 cm, (NM) // (FL)	What is the length of IN? 60. 5 %	What is the length of FL? 35 %

Fig. 2. Variation of performances for the application of the same mathematical processing in the same figure and in different figures: the application of ratio is less 'visible' for the third side than for the oblique side ([8] pp.91–92, 101)

(Fischbein, 1993, p. 142)

Let us consider the following example: "In a circle with its center in C we draw two perpendicular diameters AB and CD. We chose arbitrarily a point M and we draw the perpendiculars MN and MP on the two diameters. What is the length of PN?"

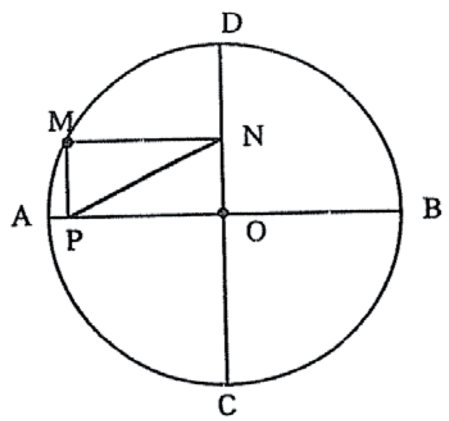


Fig 2

(Fischbein, 1993, pp. 145-146)

In 3a there are four lines which intersect (point 1). In 3b, there are two lines which intersect (point 2). Compare the two points 1 and 2. Are these two points different? Is one of them bigger? If yes, which one? Is one of them heavier? If yes, which one? Have the two points the same shape?

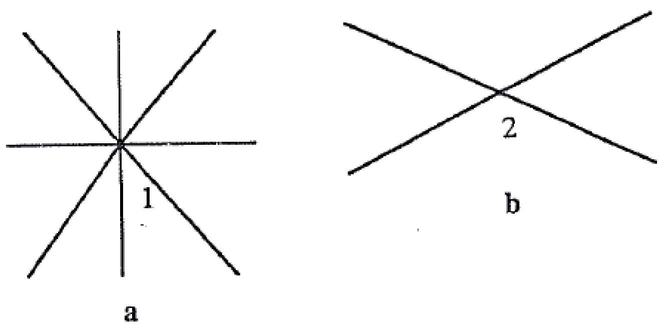


Fig 3.

(Fischbein, 1993, p. 157)

Let me add an example: let us consider a circle with center O. Let us choose two points, A and B, on the circle and draw several angles, the sides of which pass through A and B, and having their vertices on the circle (Figure 8). Let us compare the angles M, N, P.

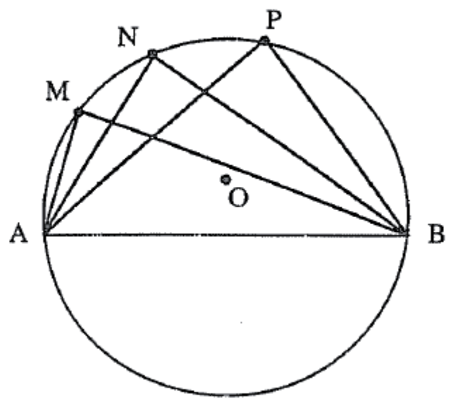


Fig 8

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 173-174)

a) Sticks of various lengths are used, with a 'short one' as a unit ('unit stick'). Children count how many times 'the unit' can be put along two different sticks and draw conclusions about the *ratio* between the lengths of these sticks.
b) Repetition of the same activity with sticks of different lengths leads the children to discover that a ratio exists between certain sticks, regardless of their particular lengths.
c) Children are asked to find different pairs of sticks related in the same way. In fact they discover *proportion*.

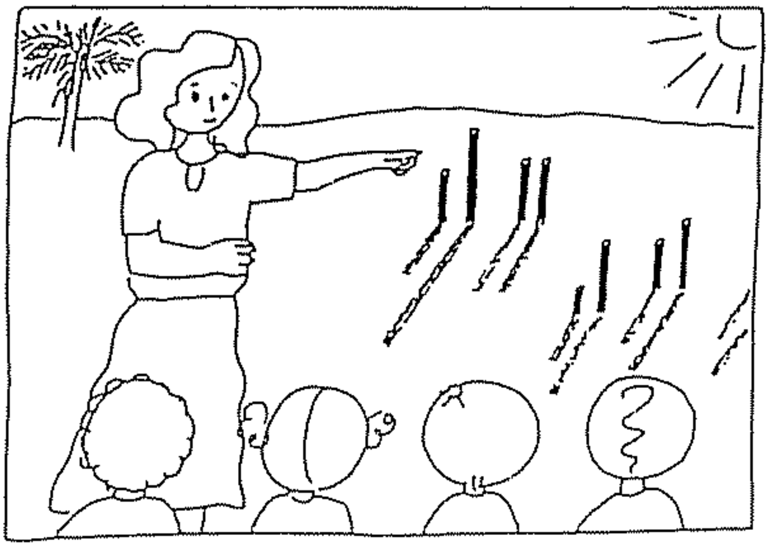


Figure 6 Students discover the proportion between the lengths of sticks and the lengths of their shadows

e) Similar activities with different size angles. (The *angle* unit comes earlier in the program). Children reinforce their intuition that the same ratios and proportions exist for different measures.
f) Children discover by measuring with sticks or paper strips that the ratio of the length of the sides of similar shapes is constant.
g) Children discover that the ratio between the lengths of two vertical sticks is equal to the ratio between their shadows (proportion).

(Mesquita, 1998, p. 191)

For instance, in the following problem analysed in Mesquita (1989b), Figure 5 appears as the translation of the statement: "The following figure is formed by three semicircles C1, C2 and C3, whose diameters are SU, ST and TU, respectively. Compare the lengths of the arcs: (a) C1 and (b) C2 followed by C3."

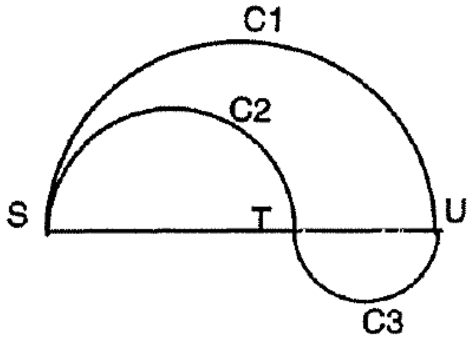


FIGURE 5.

For instance, in the following problem—an adaptation to the case of rectangles of a proposition of Euclid (Book 1, prop. 43, in Heath, 1956), analysed in Mesquita (1989a)—the proof that rectangles *1* and *2* (Figure 6a) have the same area can be constructed by recognizing that: (a) the two reconfigurations in Figure 6b have the same area; (b) *1* and *2* can be obtained by complementarity of these reconfigurations; therefore *1* and *2* have the same area.

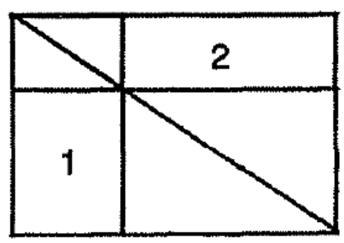


FIGURE 6a.

(Mesquita, 1998, p. 192)

This is the case, for example, in the following problem associated to Figure 7, where—under the assumptions that *1* is an equilateral triangle, 2 is a rectangle, *3*, *4* are squares, and the figure formed by *3*, *4* and *5* is a square—we wish to prove the equality of segments AC, LF and FG:

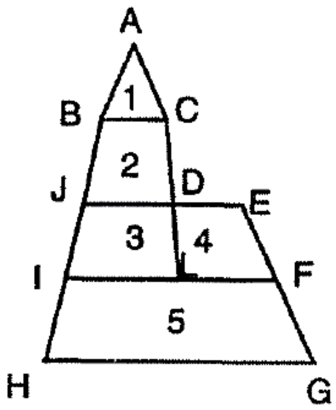
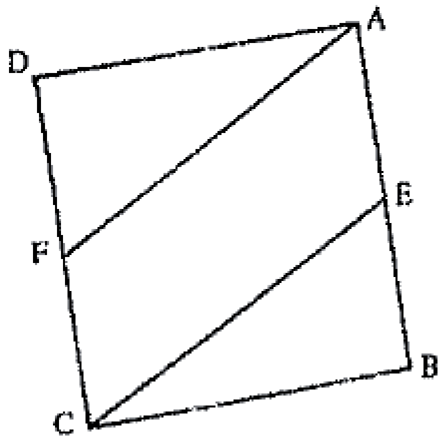


FIGURE 7.

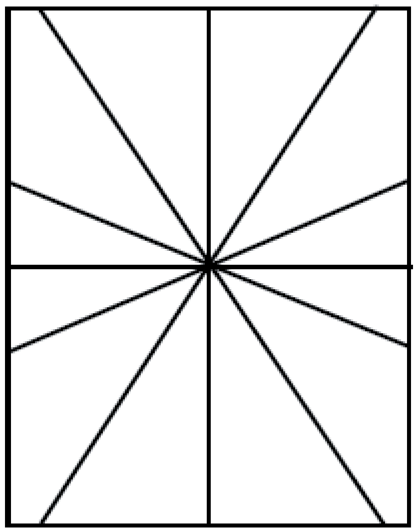
(Presmeg, 1986b, p. 44)



Given that the area of square ABCD is 4 square units, and that E and F are midpoints, Paul R was attempting to find the area of AECF, which had been proved a parallelogram.

(White & Mitchelmore, 2003, pp. 406-407)

students were challenged to find whether the angles at the centre of a "windmill" (see figure on right) were equal.



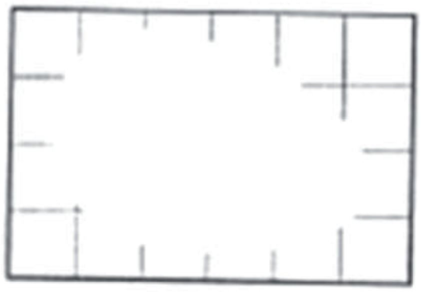
In one interview task, students were asked to match an angle in a physical situation with a given abstract angle size.

Tarea **P04**

Contar nº de elementos: triángulos, ejes de simetría, cuadriláteros, diferentes figuras, puntos de corte, diagonales, ángulos, cuadraditos, etc.

(Battista, 2007, p. 900)

Se pidió a CS que predijese cuántos cuadrados cubrirían el rectángulo mostrado en la Figura 19.18a (haciendo su predicción sin dibujar).



(a)

Figura 19.18

(Battista y Clements, 1998, p.507)

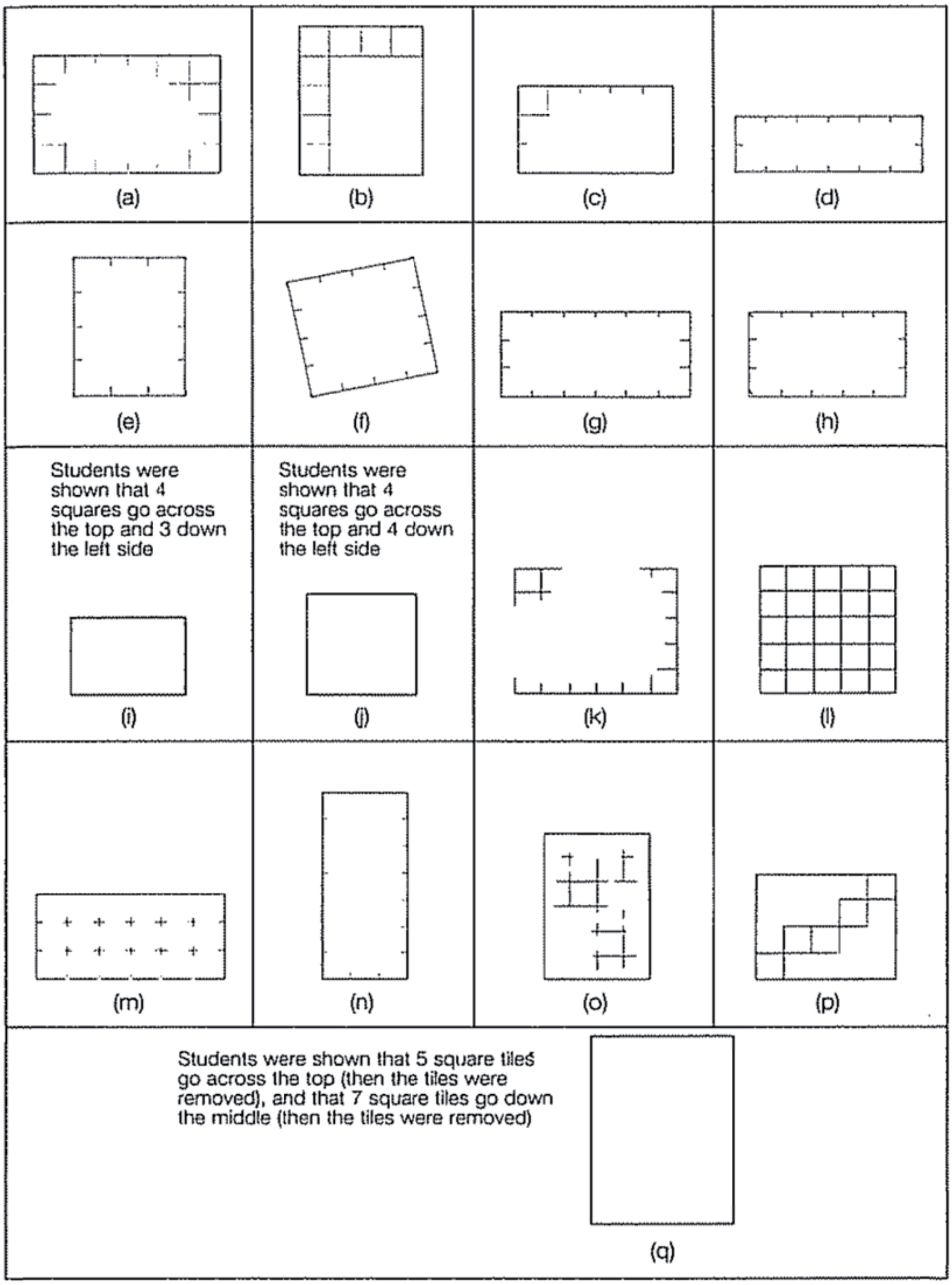


Figure 1 Rectangle interview tasks: How many squares does it take to completely cover the inside of the rectangle? (All dimensions are inches.)

(Hesrkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p.169)

For example, in the numerical intuition unit, which is one of the latest units (Markovits & Hershkowitz 1996), the third-grade child is presented with flash cards bearing various numbers of dots for a short period of time, and asked to evaluate the dots' number (Figure 1).

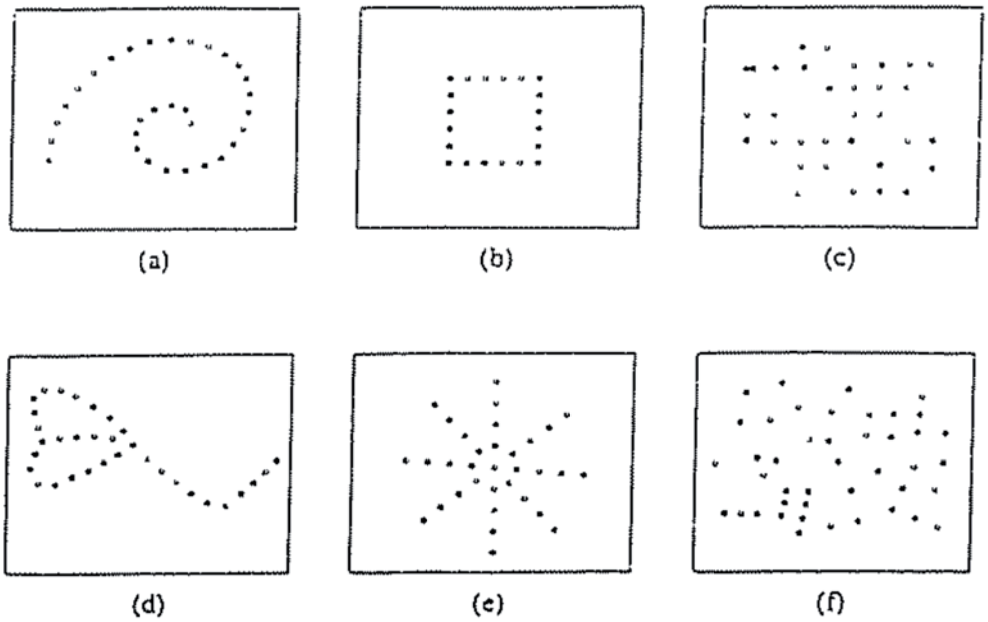


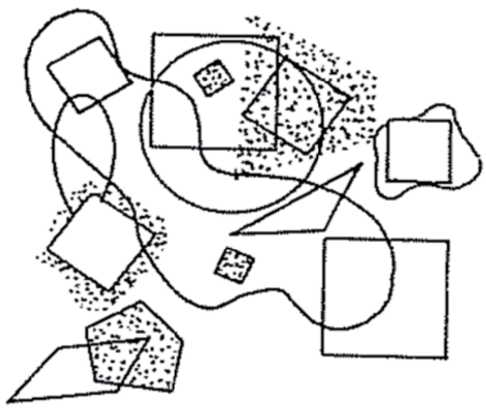
Figure 1. Some patterns in the numerical intuition unit.

<u>Tareas **P05**</u>

Identificación visual

(Del Grande, 1987, p. 131)

- Trace all the squares in blue



- Draw a blue path around the rectangle.
- Color inside the triangle.

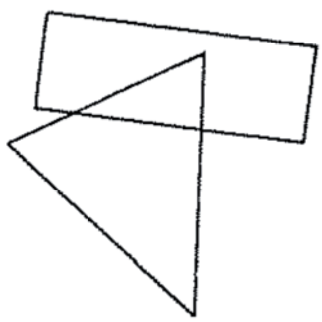
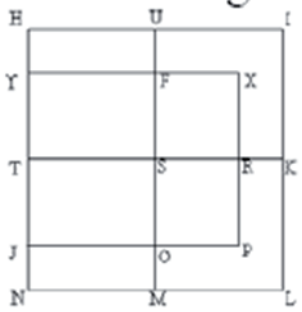


Fig. 11.2

(Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009, p. 705)

1. Name the squares in the given figure:



(Fischbein & Nachlieli, 1998, p. 1207)

Questions f and g

Given figure 8, draw all the triangles which can be identified in this figure. Given figure 2, draw all the angles which can be identified in this figure.

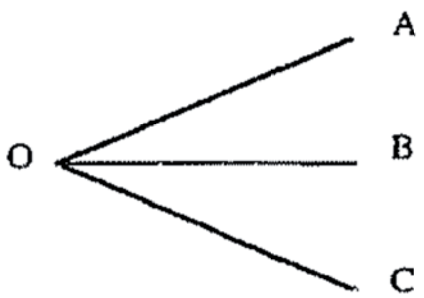


Figure 2.

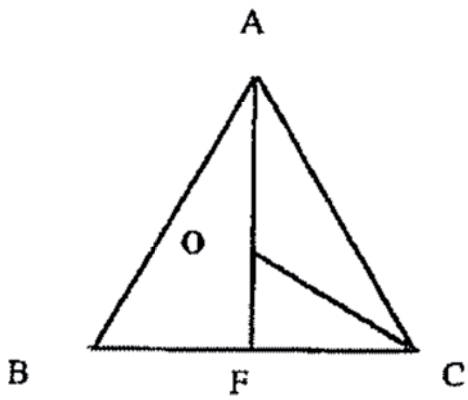


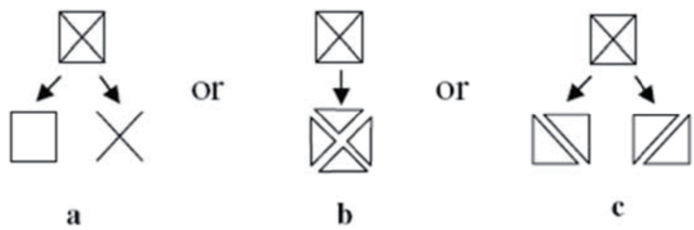
Figure 8.

(Gal & Linchevski, 2010, p. 177)

Example H The diagonals of a square—as a part of the hierarchical structure.

The configuration of a square and its diagonals can be mentally (and physically) decomposed in several ways (see Fig. 13).

Fig. 13 Various mental hierarchical structures of a square with its diagonals



(Guay & McDaniel, 1977, p. 212)

Embedded Figures (McDaniel, 1974). This is a 25-item group test designed to measure the ability to hold a visual gestalt in spite of distracting elements. Children watch a screen while a simple two-dimensional pattern is projected for 5 seconds. Following this, a response display is shown containing four more complex two-dimensional designs, one of which has included in it the simple pattern. The children must select, from among the four complex designs, the one containing the embedded figure.

(Gutiérrez, 1990, p. 46)

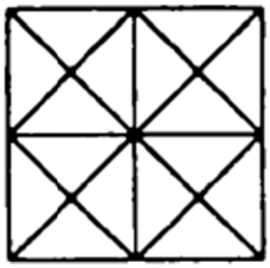


Figura 1.

¿Cuántos cuadrados hay en la figura 1?

(Presmeg, 1989, p. 22)

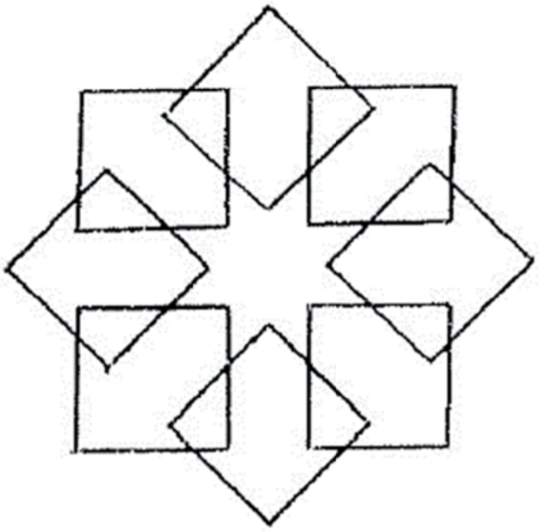


Figure 3. Sufi mandala

If the pupils are asked to list or draw all the individual specific shapes which they can see in the diagram, they will become aware of

Pupils could be asked to count all the triangles they can see, or in figures 3 and 4, to fill in all the lines of symmetry.

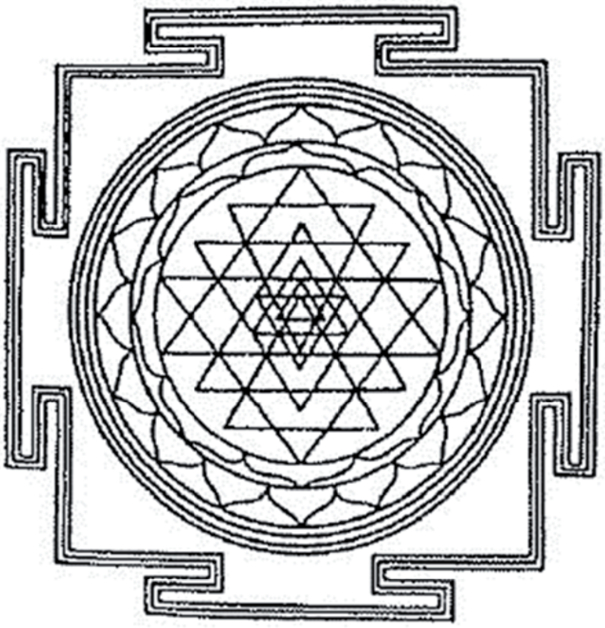


Figure 4. Shri Yantra.

(Yakimanskaya, 1991, p. 183)

2. Count all the triangles in the diagram in Figure 17.

3. In Figure 18, segment *BD* is shared by 7 figures. What figures are these? Identify and write them down.

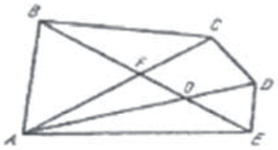


Figure 17.

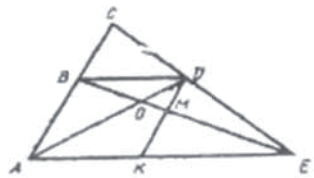


Figure 18.

(Yakimanskaya, 1991, pp. 188-189)

Grade 4. 1. Determine the set of line segments in the diagram in Figure 28. 2. Determine the set of angles in the diagram in Figure 29.

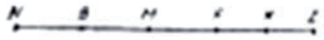


Figure 28.

Grades 5-6. 1. Determine the set of triangles depicted in the diagram in Figure 30. 2. Determine to which polygons [*ED*] belongs. Give them alphabetic labels (Figure 31).

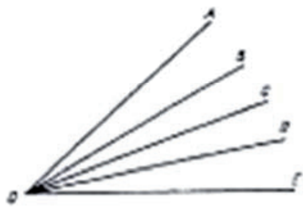


Figure 29.

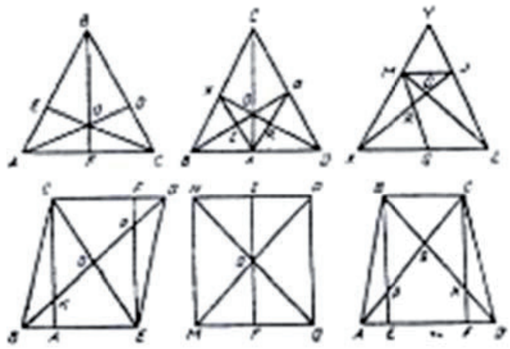


Figure 30.

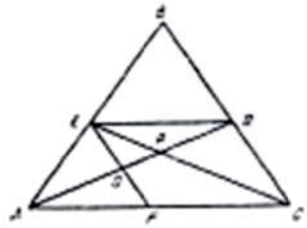


Figure 31.

Tareas P06

Reconocer/describir la intersección de varias figuras

(Yakimanskaya, 1991, pp. 184-185)

3. What is the intersection of the two sets in Figure 21?

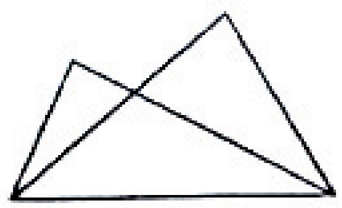


Figure 21.

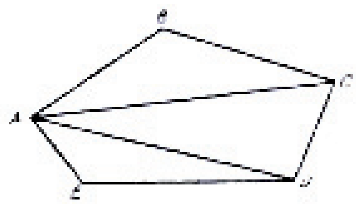


Figure 22.

2. What figure is the intersection of the following pairs of figures: 1) triangles ABC and ADC; 2) triangles ABC and ADE; 3) pentagon $ABCDE$ and triangle ACD; 4) quadrangles $ABCD$ and $ACDE$; and 5) triangle ABC and $[CD]$ (Figure 22)?

<u>Tareas **P07**</u>

Creación de patrones

(Arcavi, 2003, p. 227)

How many matches are needed to build the following nxn square?

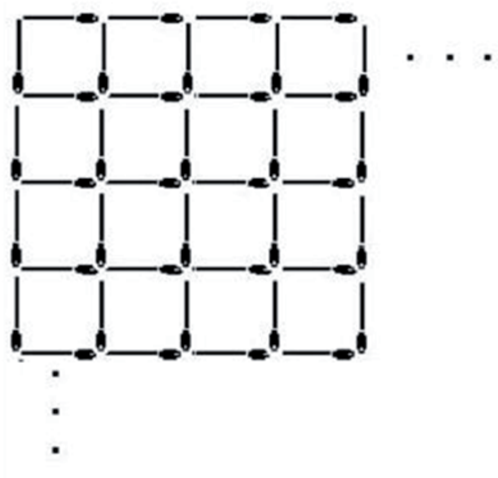


Figure 12. An array of matches.

(Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989, p. 52)

Figure 3 An Example of LOGO Output for Polygons and Their Diagonals

(Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989, p. 55)

For example, polygonal numbers which are often called figurate numbers, form geometric patterns for which students are often asked to find formulas or rules of formation. Such problems are represented by dots in geometric configurations (See Figure 7).

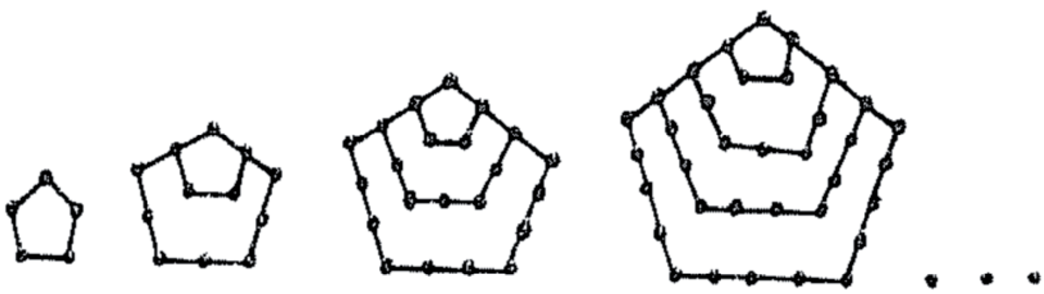


Figure 7. Counting and pattern Search: Pentagonal Numbers

(Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989, p. 56)

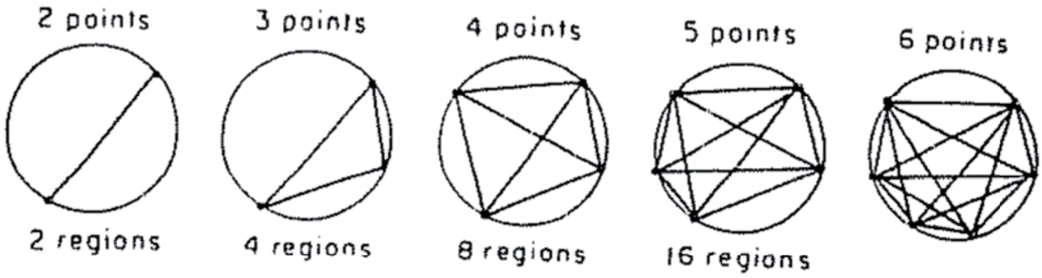


Figure 8. Counting and Pattern Search: The Missing Region

(Brown & Presmeg, 1993, p.138)

In the first interview of the series eleventh grade students were given toothpicks and asked a series of questions concerning the construction of squares from the toothpicks. In the first series of tasks the student was given 24 toothpicks and asked to construct 1, 2, 3, 6, 7, 8, and 9 squares using them. In the next series the interviewer first used four toothpicks to build a single square (Figure 1a) and asked the student how many squares there were in the pattern. After they agreed there was one she then extended the pattern so that there were two small squares in each dimension (Figure 1b). The student was then asked how many squares were in the pattern. After they agreed there were five she then extended the pattern to three-by-three (Figure 1c) and four-by-four (Figure 1d), each time asking the student how many squares were in the pattern. The investigator then asked the student to imagine a five-by-five pattern and to predict how many squares would be in it. Finally, the student was asked how many squares would be in the pattern for the general case, n-by-n.

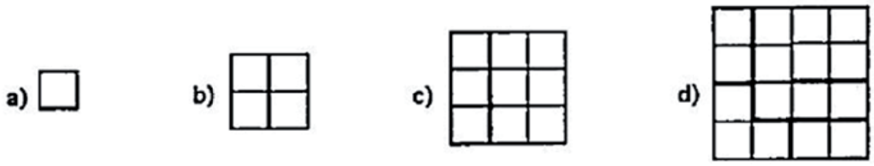
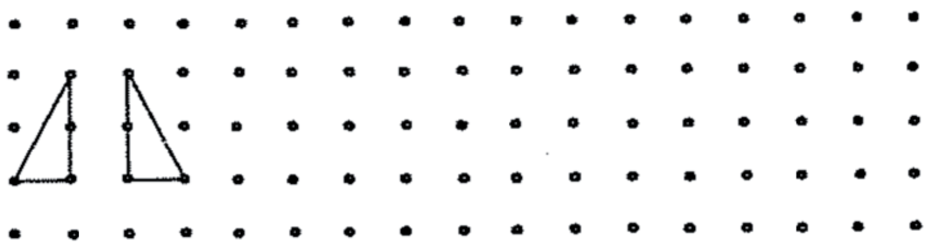


Figure 1. Patterns of toothpicks in which students were to find the number of squares present.

(Del Grande, 1987, p. 132)

- The first two figures of a pattern are shown
- Use flips to draw three more figures in the pattern



(Guay & McDaniel, 1977, p. 212)

Serial Integration (McDaniel, 1974). This is a 25-item group test designed to measure the ability to integrate into a pattern visual stimuli seen one at a time. Children watch a screen while single lines are projected one at a time. Then four figures are shown on the screen. The children must select, from the four figures, the one that represents the two-dimensional pattern formed if all lines were presented simultaneously.

(Hesrkowitz, Parzysz & van Dormolen, 1996, pp. 171-172)

When children create patterns, they are in a problem-solving situation, with high level thinking. They have to analyse the main characteristics of pattern – the building blocks that are to be used in its creation, and choose those that they would like to have in their own special pattern. Finally they have to synthesize all of the above in the production of their own pattern. In the patterns unit all the planned activities deal with linear patterns (Figure 3)

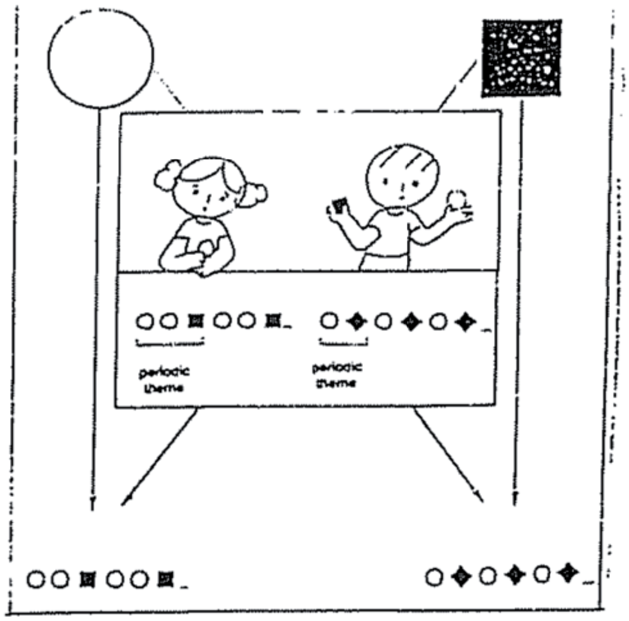


Figure 3. Patterns.

(Orton, 1997, p. 307)

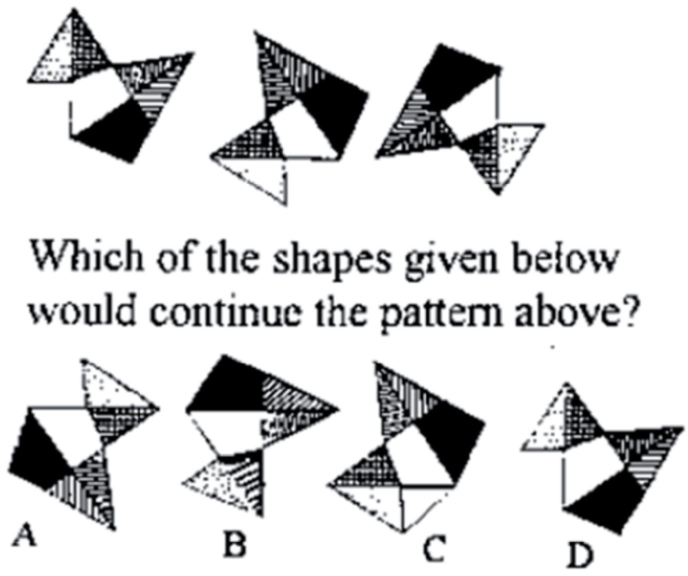


Figure 3

Tareas **P08**

Doblado de papel. En un papel se realizan diversos cortes y hay que identificar cómo quedaría el diseño una vez que se deshacen las dobleces.

(Cosío, 1997, p. 210, 213)

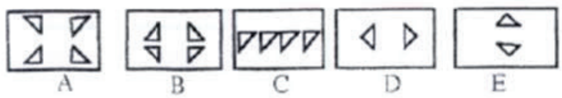
Ítem nº5.

Fig 1

Supongamos que se dobla dos veces una hoja de papel rectangular (Fig 1) y se corta a continuación un pequeño triángulo rectángulo en la hoja plegada tal como se indica en la figura 2..

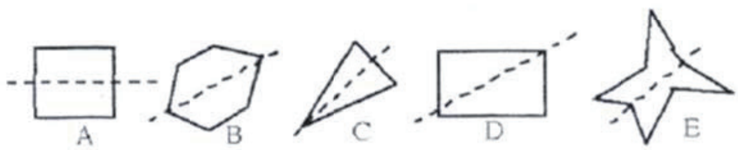
Fig. 2

Si despliegas la hoja de papel ¿Cuál de las figuras A.B.C.D.E puedes obtener?



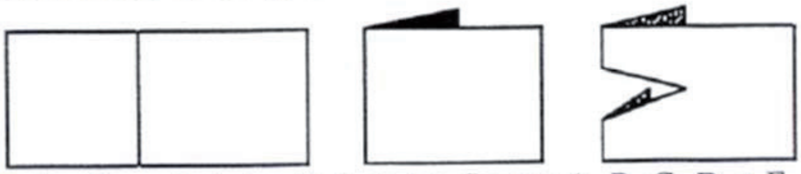
RESPUESTA:

Ítem nº6. ¿Cuál de las figuras A.B.C.D.E <u>no puede</u> ser plegada a lo largo de la línea de puntos, de forma que una mitad coincida exactamente con la otra?

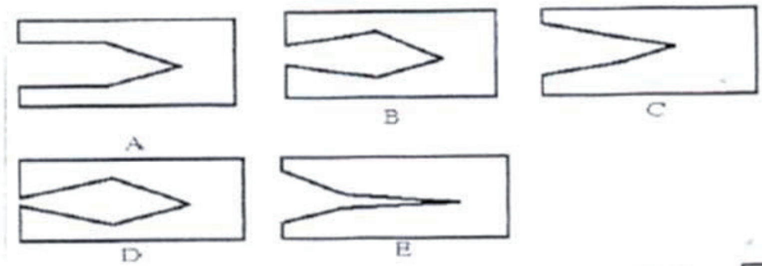


RESPUESTA:

Ítem nº13. Se pliega una hoja de papel rectangular y se hace un corte tal como se indica en la Fig. 1



y se despliega la hoja ¿Cuál de las figuras A, B, C, D o E, se obtendrá?



RESPUESTA:

(Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 337)

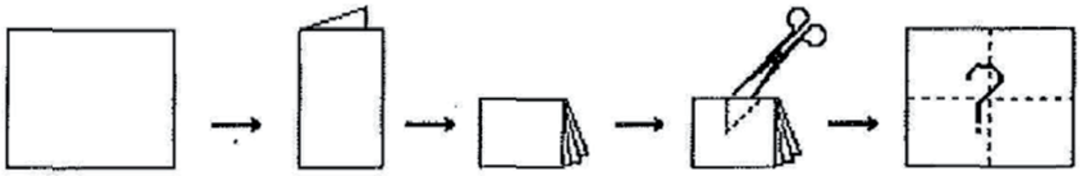
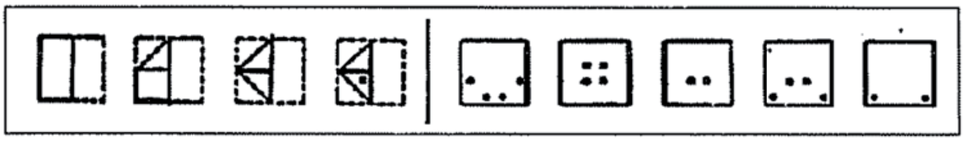


Figura 18.

(Olkun, 2003, p.10)



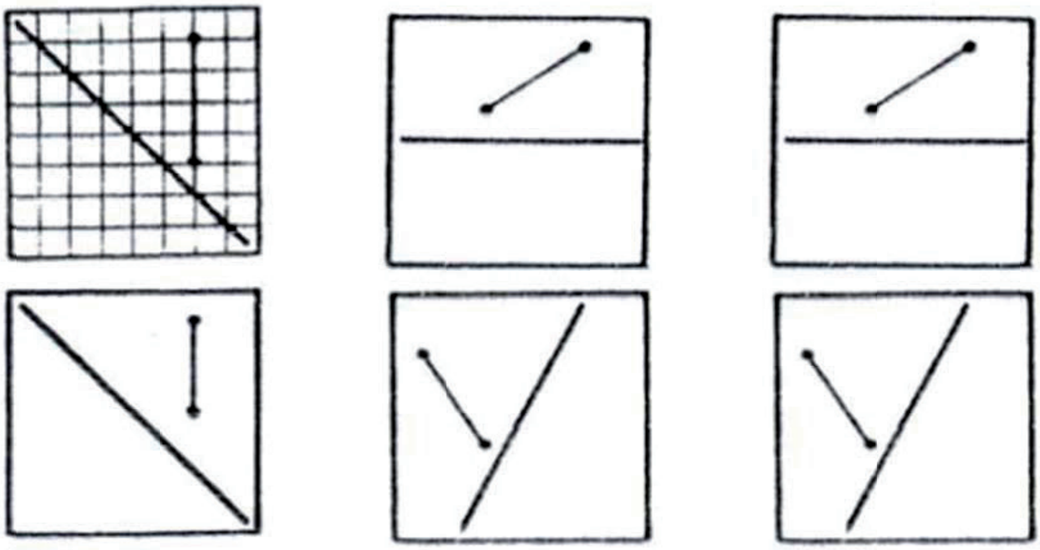
Paper Folding (SV)

Tareas **P09**

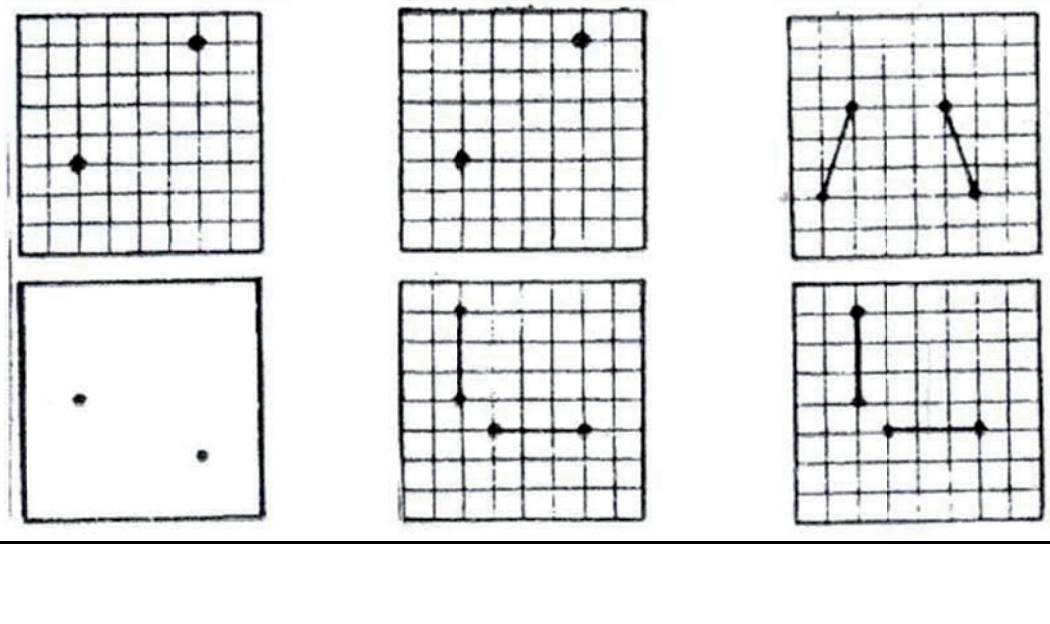
Realizar simetrías. Dada una figura/o parte de ella hacer su simétrica con respecto a distintos ejes o dadas dos figuras construir/indicar el eje de simetría

(Gutiérrez y Jaime, 1987, pp. 365-366)

Dibujo de la simetría



Dibujo del eje



(Hoyles & Healy, 1997, p. 33)

In this first activity, the girls had to find a way to make the red turtle produce the reflected image of the path drawn by the blue turtle. We were

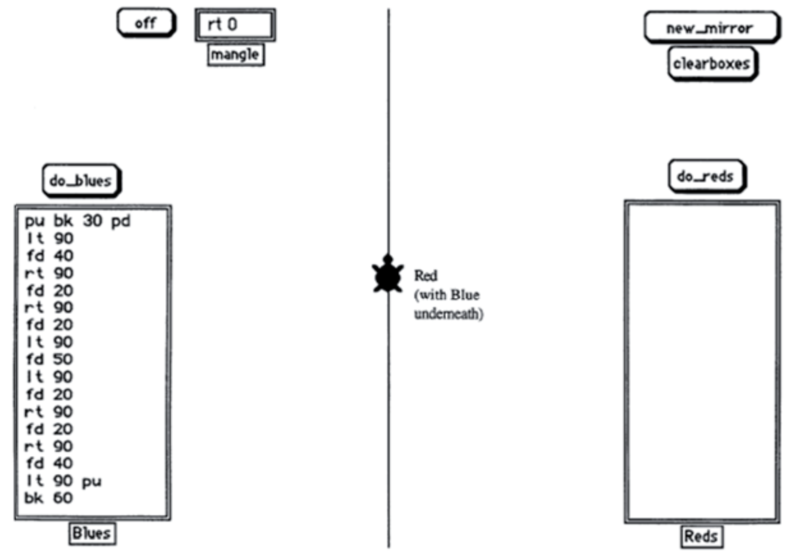


Figure 1. Reflection in a vertical mirror.

(Hoyles & Healy, 1997, p. 36)

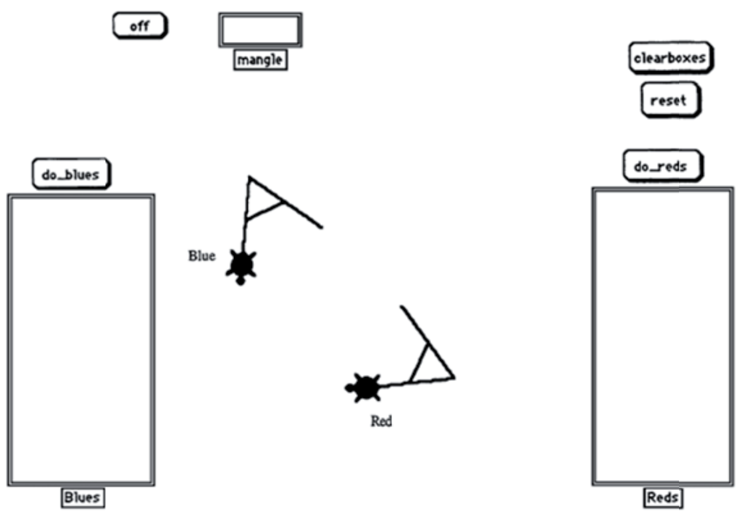
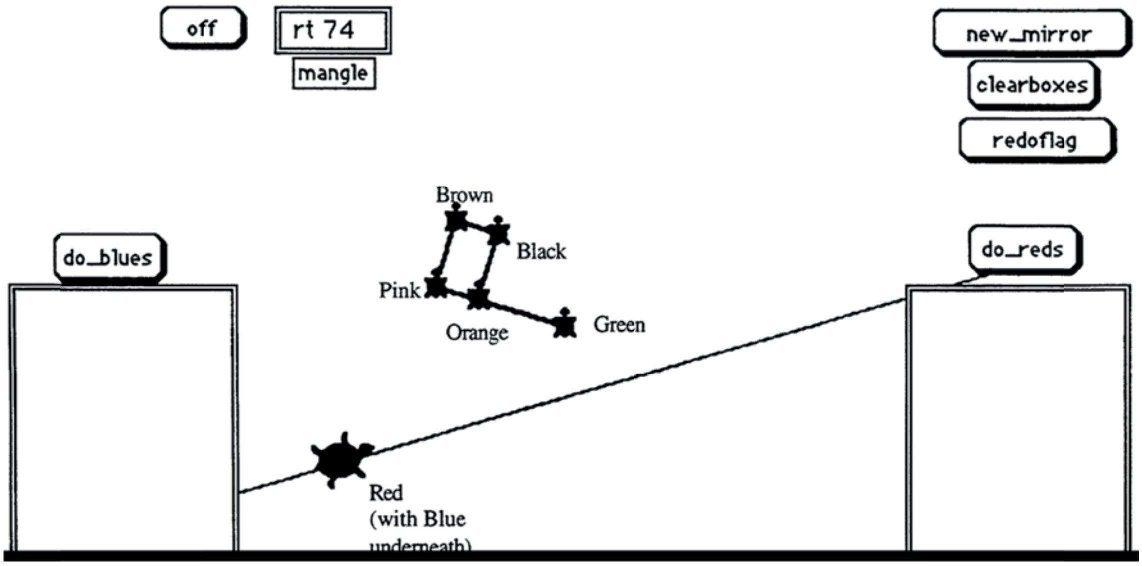


Figure 2. A missing mirror line.

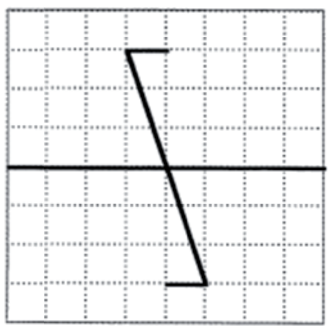
(Hoyles & Healy, 1997, pp. 38-39)

the students were asked to construct a reflection of a flag, where neither the flag nor the mirror were horizontal or vertical and no code was provided in the textboxes, (the task is shown in Figure 4).

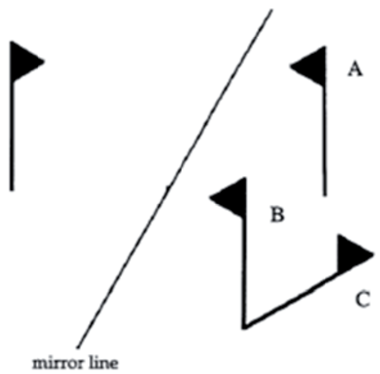


(Hoyles & Healy, 1997, p. 58)

58 CELIA HOYLES AND LULU HEALY

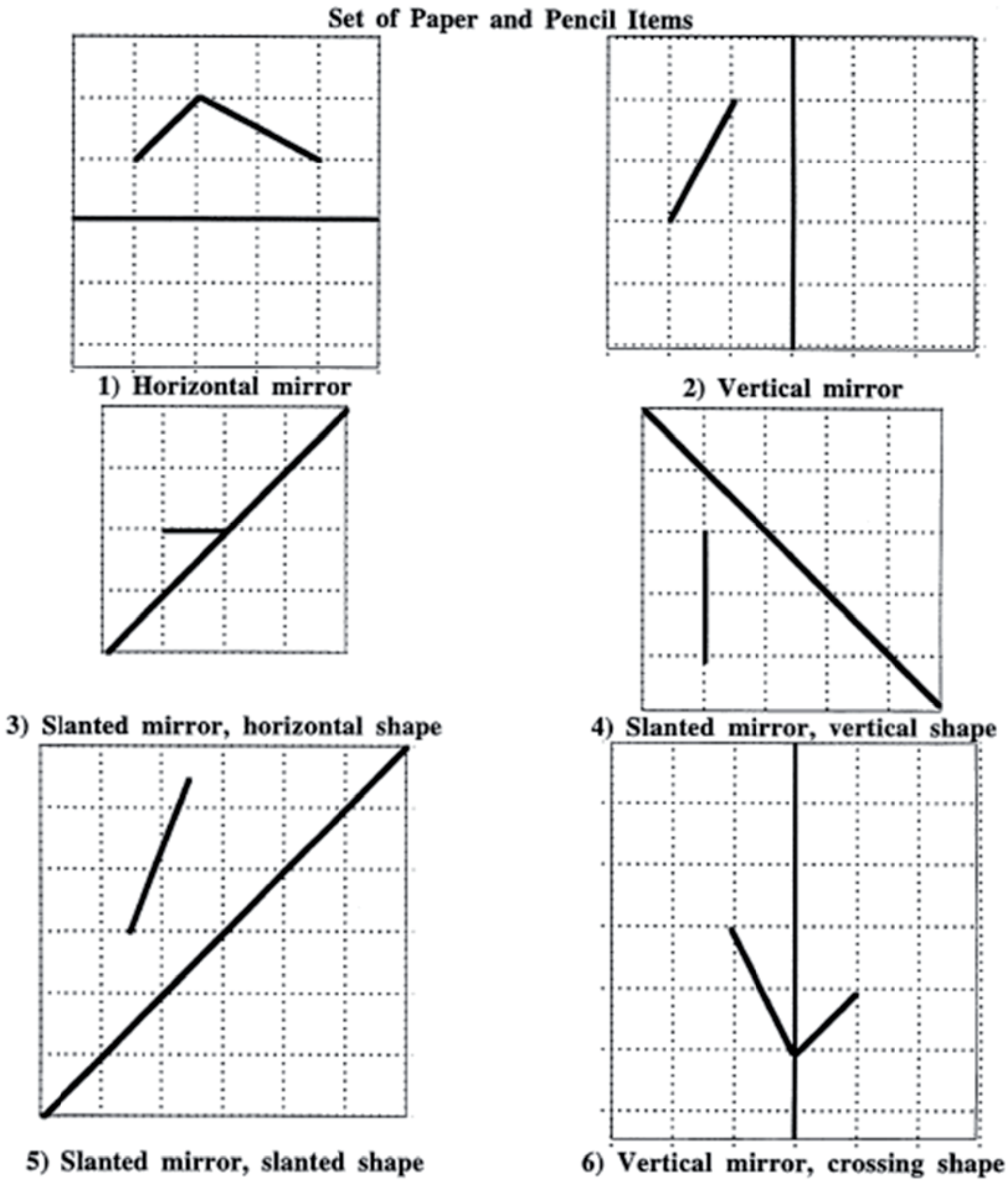


7) Horizonal mirror, crossing shape



8) Which of A, B or C could be the reflection of the flag in this mirror line?

(Hoyles & Healy, 1997, p. 57)

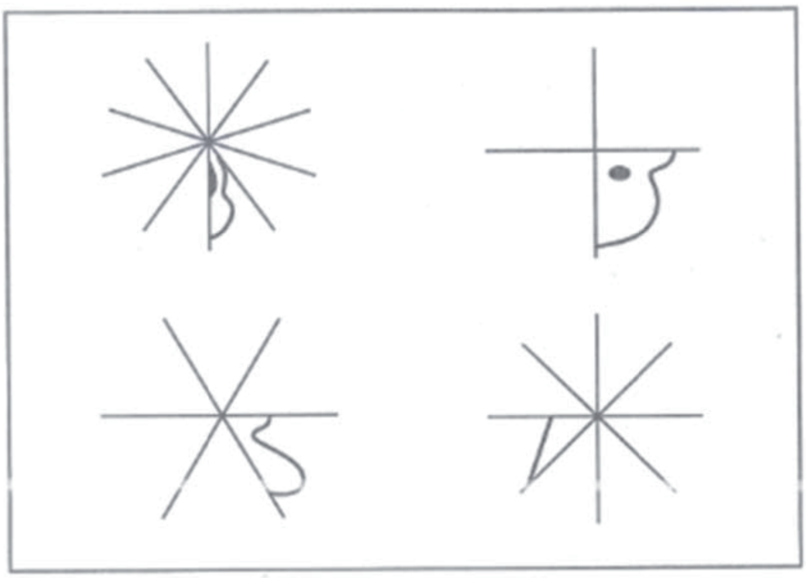


(Jaime y Gutiérrez, 1996, p.73)

¿Cómo se debe colocar el espejo para ver un cuadrado? ¿Y un rombo no cuadrado?

(Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 199)

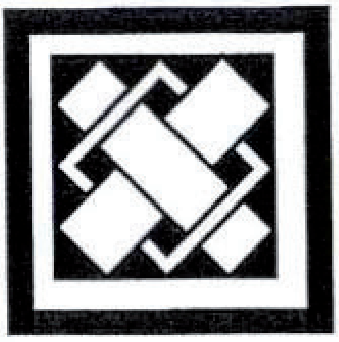
S-2.16 En cada dibujo de la lámina hay una parte de una figura y los ejes de simetría de esa figura. Dibuja la figura completa y explica cómo lo haces.



Tareas P10

Identificar/Reconocer si una figura es simétrica, contar ejes de simetría

(Jaime y Gutiérrez, 1996, p.73)



¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

(Jaime y Gutiérrez, 1996, p.76)

se presenta un conjunto de figuras y se pide a cada estudiante que identifique (sin doblar la hoja) las que son simétricas (en la Figura 3.26 se ven algunos ejemplos).

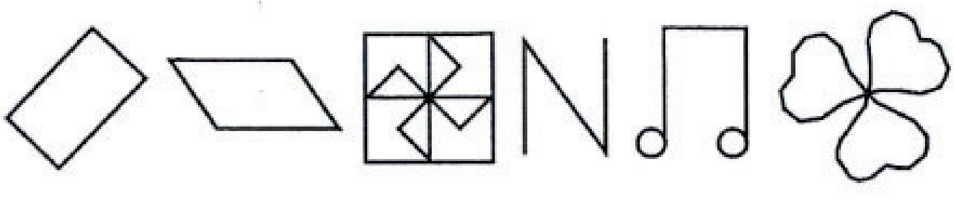
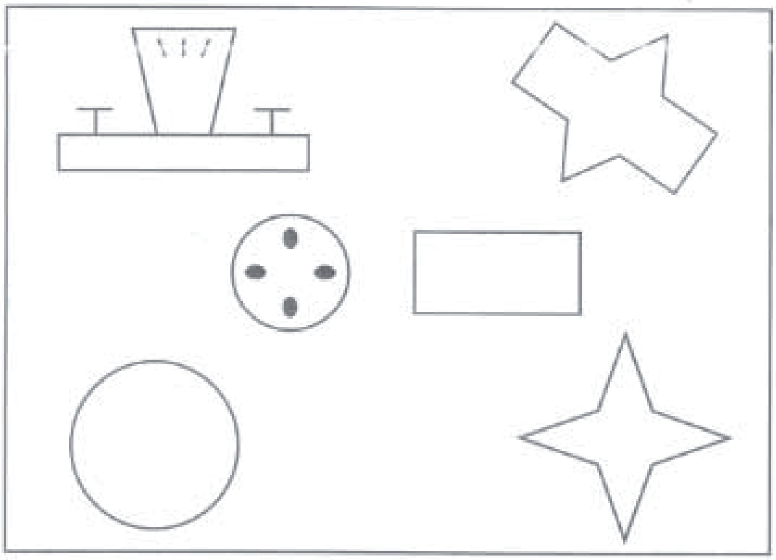


FIGURA 3.26.

(Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 198)

Dibuja todos los ejes de simetría de cada figura de la lámina. Explica cómo los has encontrado, o por qué algunas figuras no tienen ninguno.

Escribe las letras mayúsculas del abecedario y di cuáles tienen ejes de simetría.



(Presmeg, 1989, p. 22)

in figures 3 and 4, to fill in all the lines of symmetry.

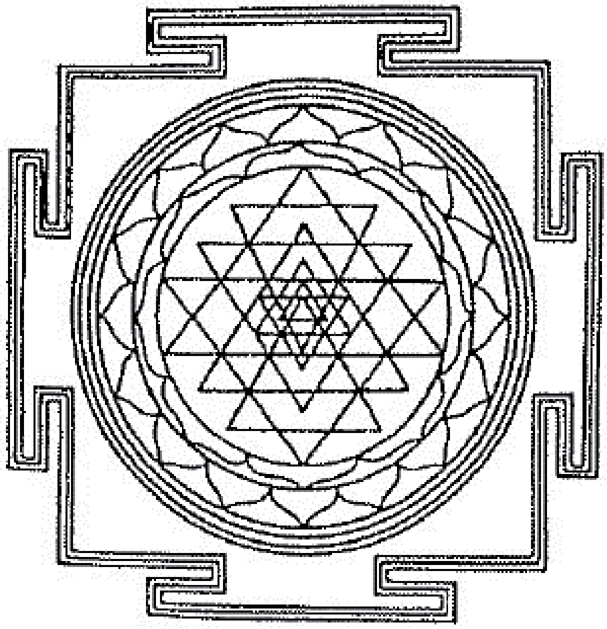


Figure 4. Shri Yantra.

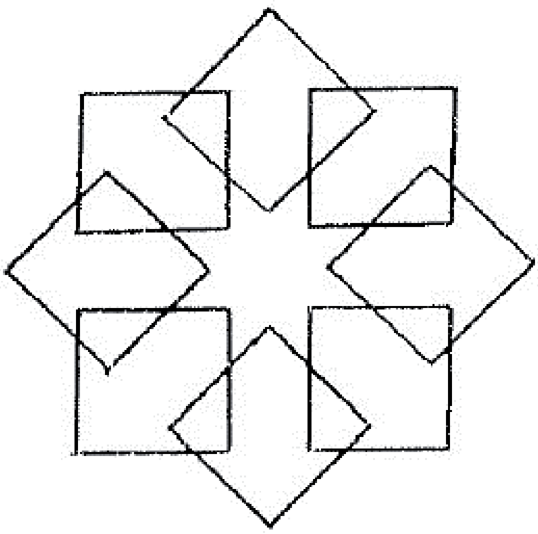


Figure 3. Sufi mandala

Tareas **P11**

Identificar una figura en diferentes posiciones.

(Clements & Battista, 1989, p. 462)

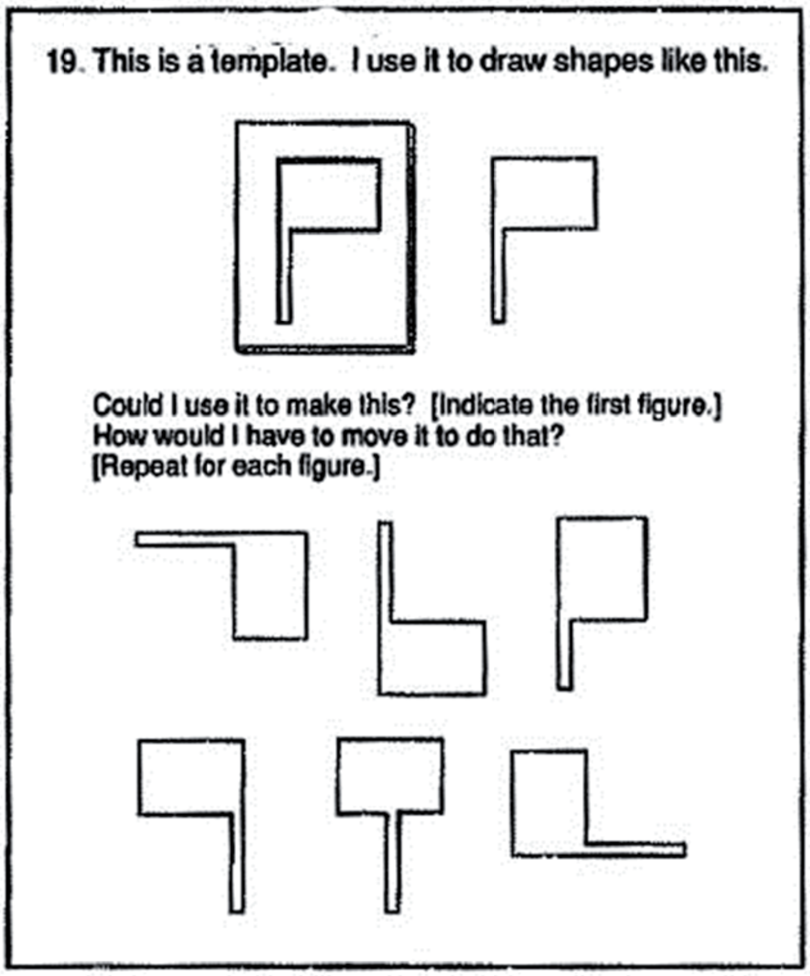
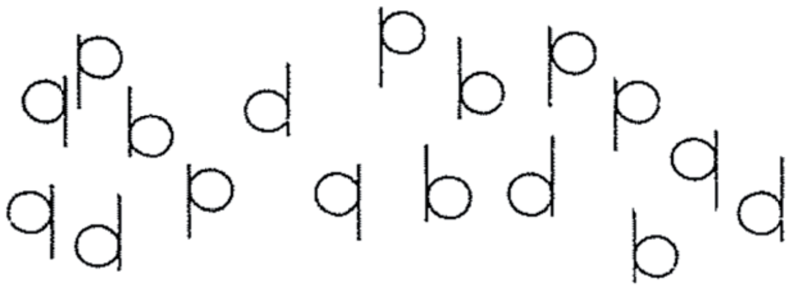


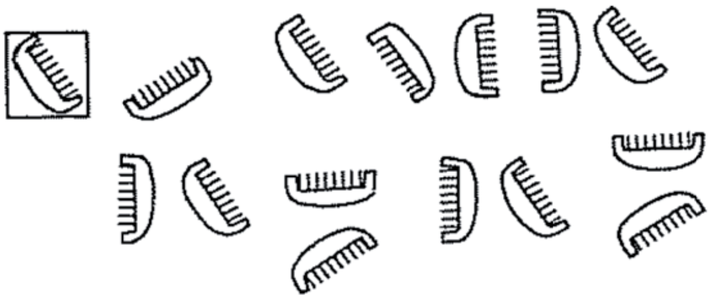
Figure 4. Item 19.

(Del Grande, 1987, pp. 131, 132)

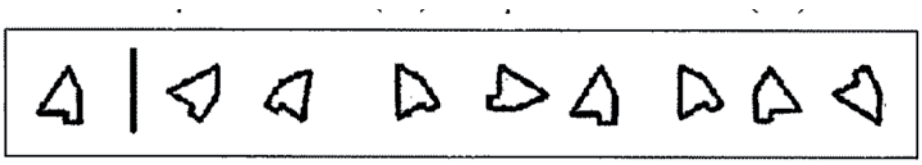
- Look at the letters in the box
- Color them
- Color all letters below that are the same as the red one
- Color all the rest the same way



- Look at the picture of the comb in the box
- Find combs that are *slide images* of the comb in the box
- Circle them



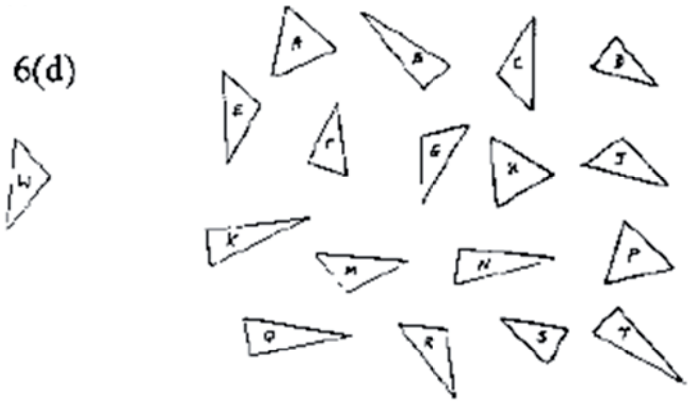
(Olkun, 2003, p. 10)



2D Mental rotation task (SR)

(Orton, 1987, p. 305)

6(d)



Which triangles could be cut out and placed on top of the triangle W?

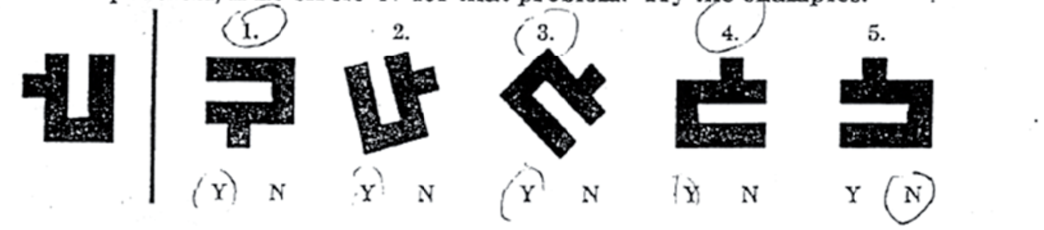
Figure 1

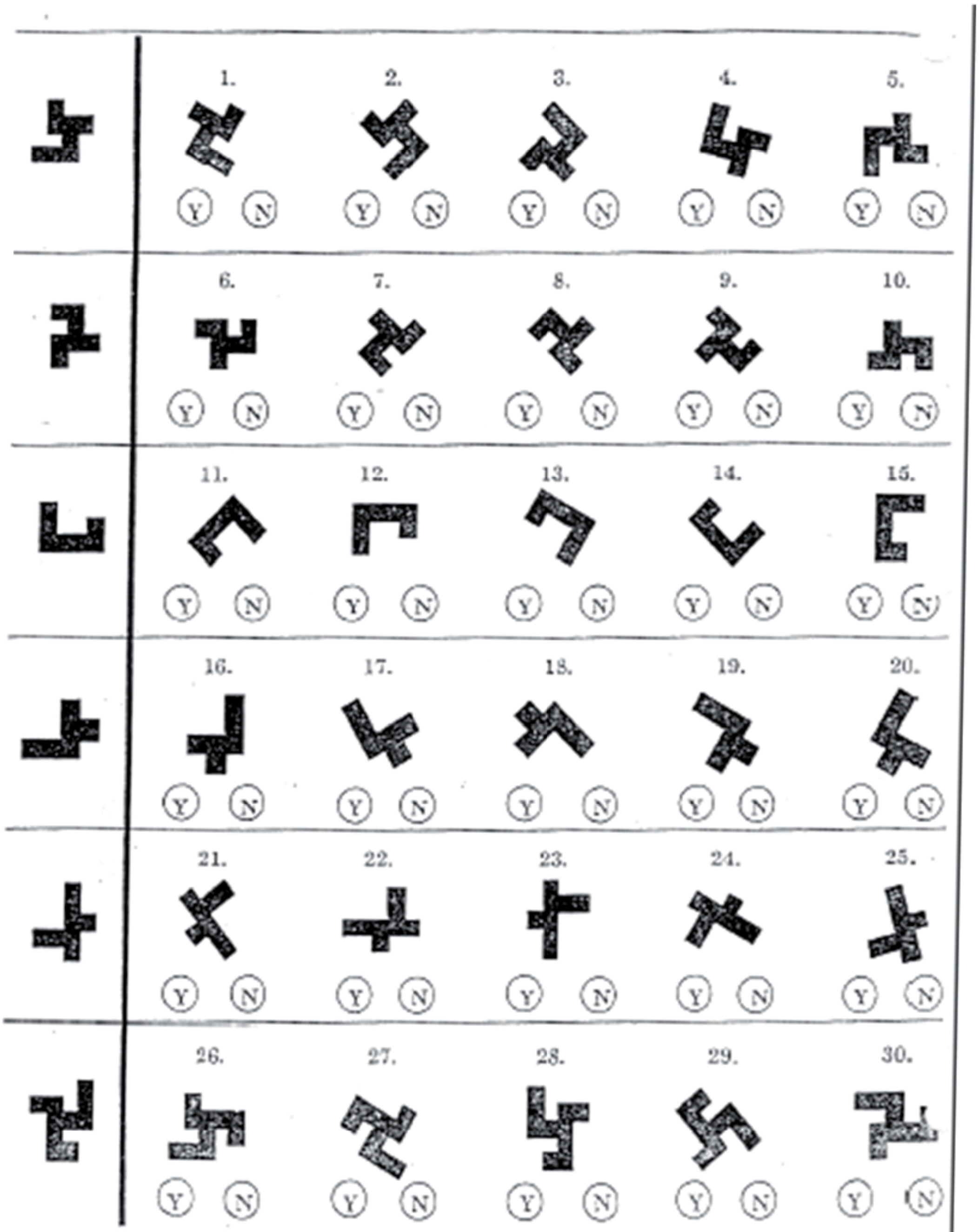
(Owens, 1992, p. 304)

Subtest 1 requires respondents to recognise congruent shapes in rotated or reflected positions. Some of the items in this subtest are more easily solved by analytic than by holistic procedures.

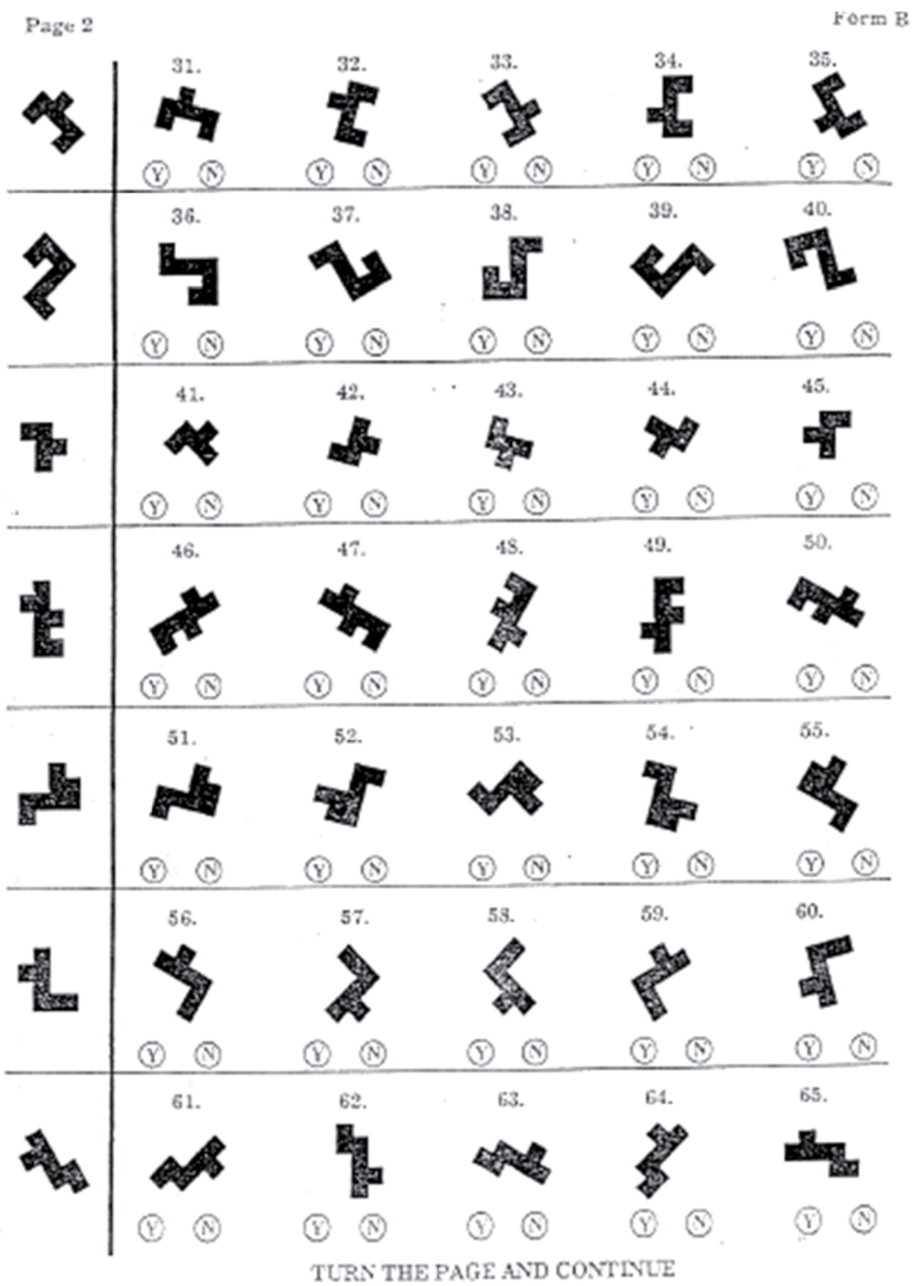
(Wheatley Spatial ability test, 1978)

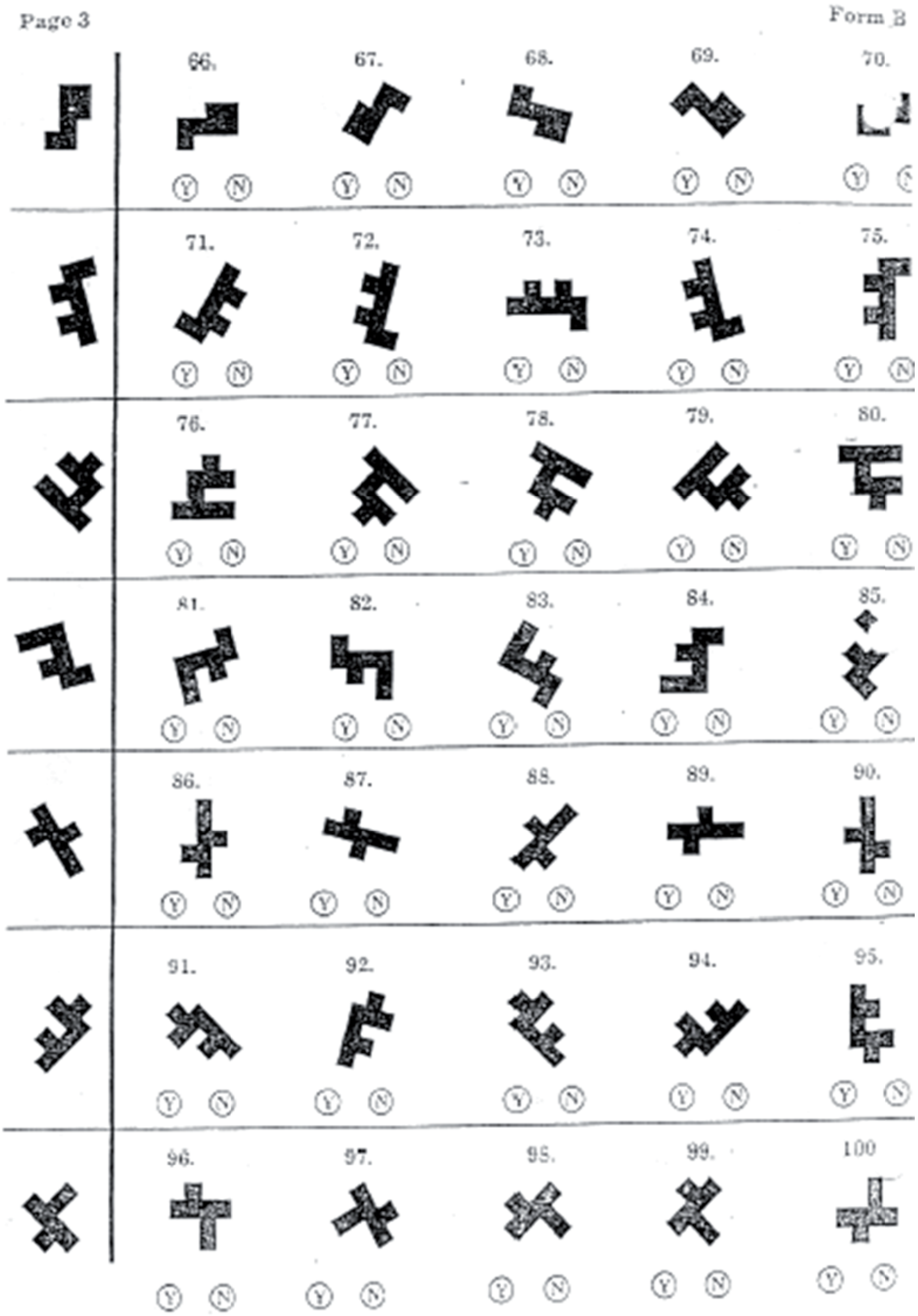
This test consists of sets of drawings, one drawing on the left of a vertical line and five problem drawings on the right. For each problem, you are to decide if the problem figure is like the figure on the left of the vertical line. If yes, circle the Y for that problem; if no circle N for that problem. Try the examples:





TURN THE PAGE AND CONTINUE


Page 2
Form B
31. 32. 33. 34. 35.
36. 37. 38. 39. 40.
41. 42. 43. 44. 45.
46. 47. 48. 49. 50.
51. 52. 53. 54. 55.
56. 57. 58. 59. 60.
61. 62. 63. 64. 65.
Y N
TURN THE PAGE AND CONTINUE


Page 3
Form B
66. 67. 68. 69. 70.
71. 72. 73. 74. 75.
76. 77. 78. 79. 80.
81. 82. 83. 84. 85.
86. 87. 88. 89. 90.
91. 92. 93. 94. 95.
96. 97. 98. 99. 100

Tareas **P12**

Reconocimiento de un movimiento aplicado a una figura dada y/o aplicación a otra figura distinta.

(Orton, 1997, p. 308)

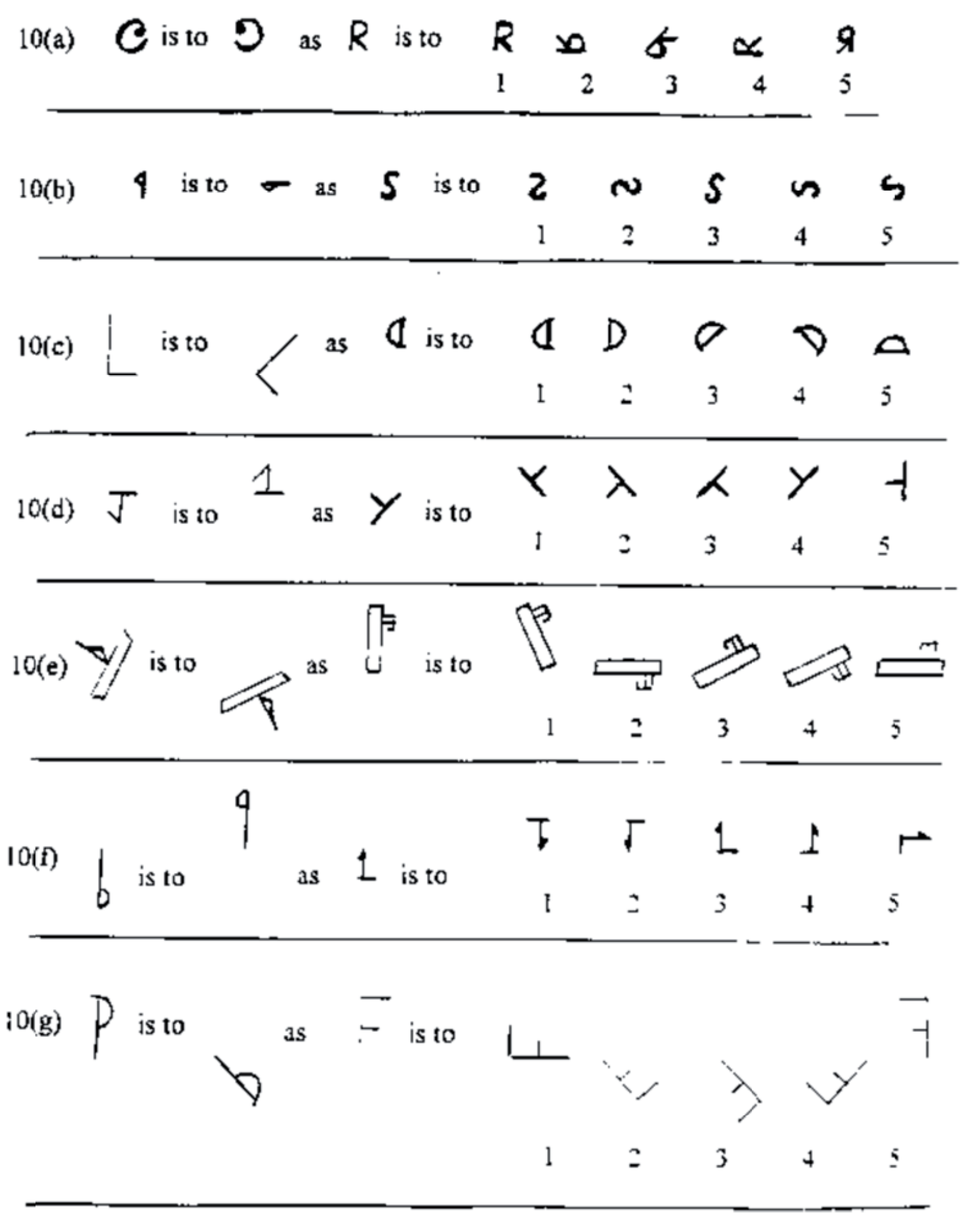


Figure 4

(Yakimanskaya, 1991, p. 184)

1. $[AB] \cong [CD]$ (Figure 19). What translation will map $[AB]$ onto $[CD]$ such that $A \rightarrow D$ and $B \rightarrow C$?

Figure 19.

<u>Tareas **P13**</u>

Completar/marcar/dibujar los elementos que integran una figura a la que se aplica un determinado movimiento

(Clements & Battista, 1989, p. 464)

Figure 4. Item 19.

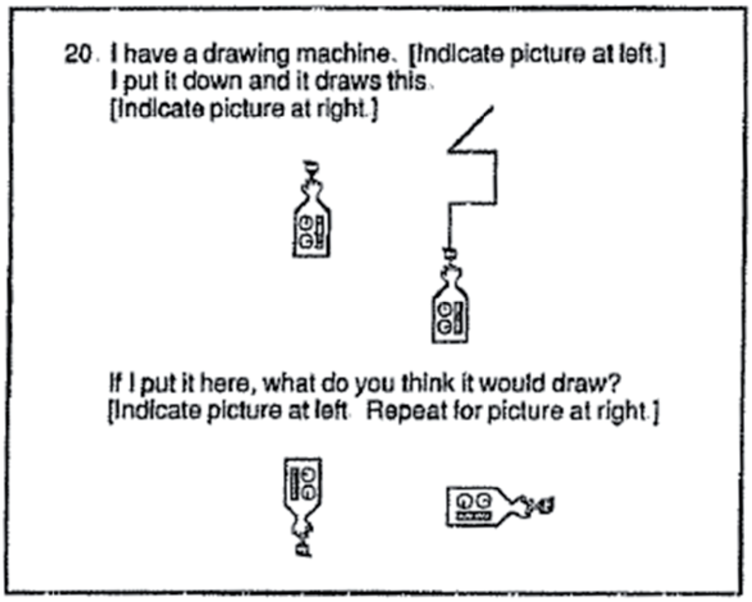
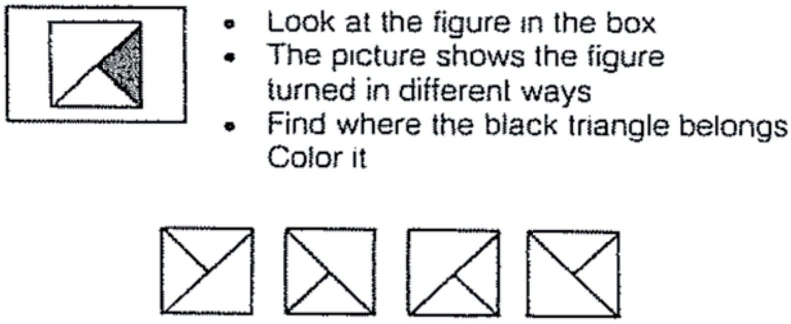


Figure 5 Item 20.

(Del Grande, 1987, p. 131)



(Orton, 1997, p. 306)

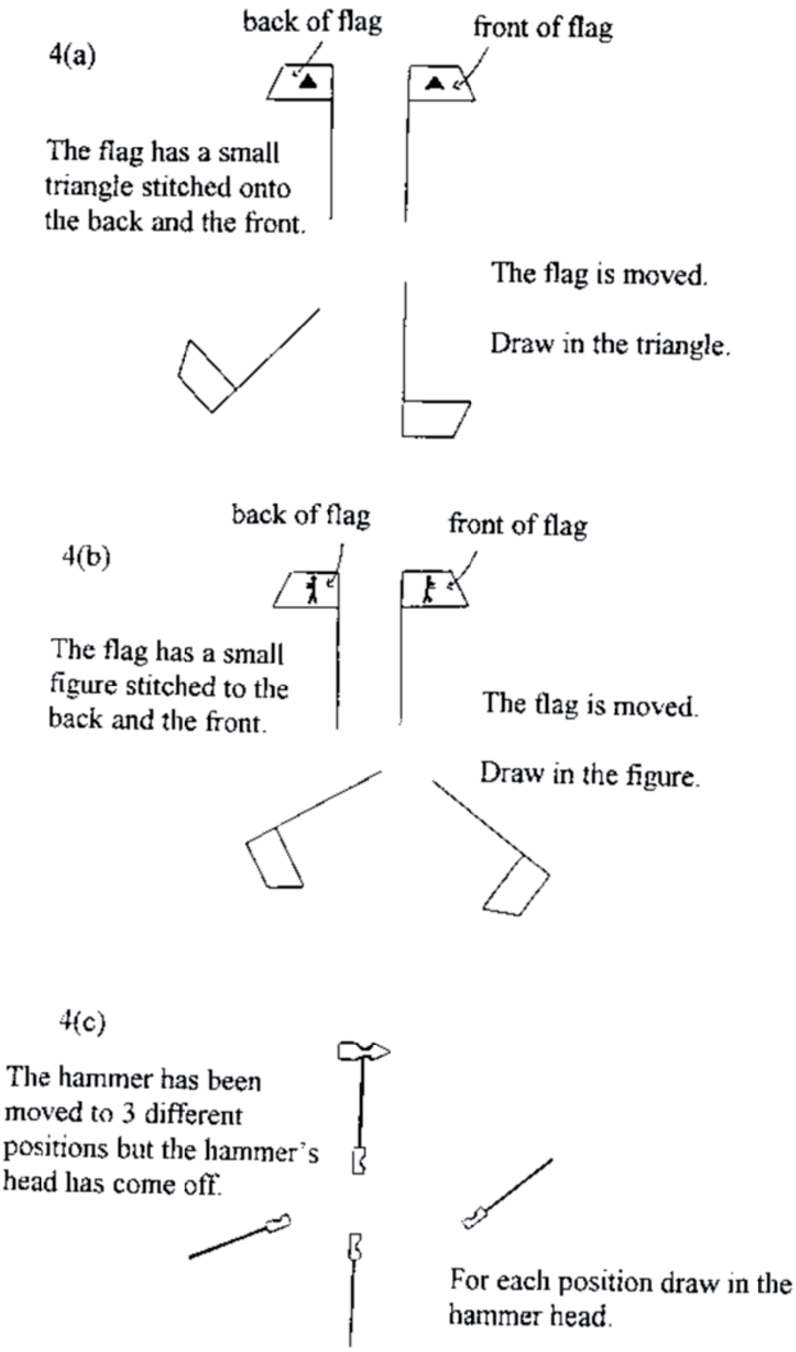


Figure 2

(Yakimanskaya, 1991, p. 184)

2. Figure 20 shows two pairs of equal figures. Which points of the second figure in each pair correspond to points B, E, P, M, and O of the first figure? Label them.

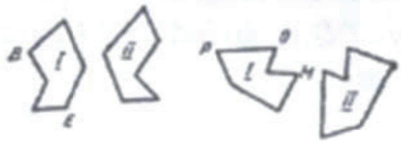


Figure 20.

Tarea **P14**

Completar/copiar una figura. Se da una figura completa y al lado la misma incompleta y se pide terminarla o bien se pide copiarla sin más

(Bishop, 1983, p. 189)

2. Copy drawings *The student was asked to copy the drawings from a specimen set, taken from Plate 1 of Bender (1938). The drawings involved straight and curved lines, dots, closed and open shapes, geometric and irregular shapes.*

(Brown & Wheatley, 1997, pp. 48, 60)

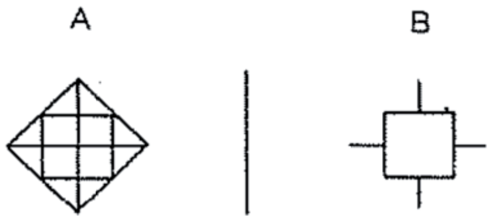
In the Quick Draw Task, students were given a brief look at a line drawing and then asked to "draw what they saw." The three line drawings used in these interviews are shown in Figure 1. We found that the methods used by students to construct images of these figures differed greatly.

A B C

Figure 1. The three line drawings presented to students in the Quick Draw Task. Drawings were shown in the order A, B, C.

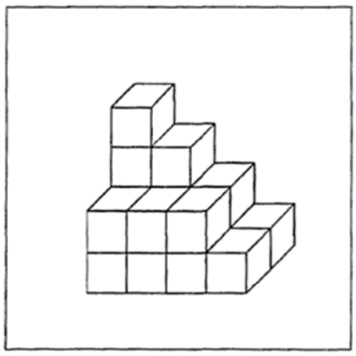
(Del Grande, 1987, p. 131)

Finish the figure in B to look like A.



(Gorgorió, 1995, Anexo 7, p. 6)

Copia, fent servir el paper quadriculat,
el dibuix de l'objecte del full "ACTIVITATS-A", és a dir,
has de fer exactament el mateix dibuix.



Objecte del full "activitats-A".

(Gutiérrez, 1996c, p. 40)

Figure 11 shows two attempts of a student who was asked to copy the drawing in Figure 11-a.

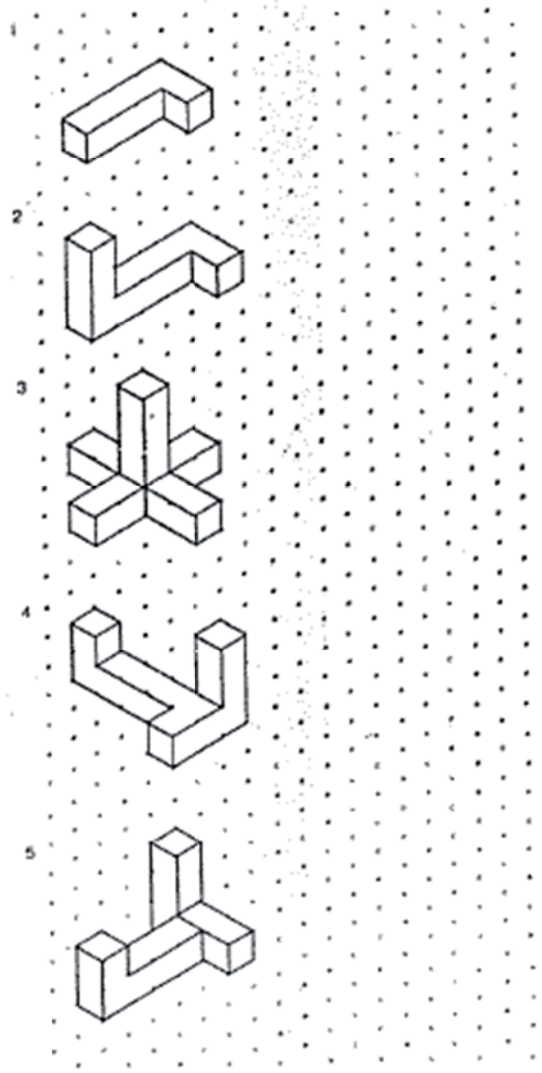
- a - - b - - c -

Figure 11.

(Lappan, Phillips y Winter, 1984, p. 619)

For each solid shown, do the following:

- Build the solid from cubes.
- Copy the drawing.
- Count the number of cubes used in the drawing.
- Check your count from the solid.

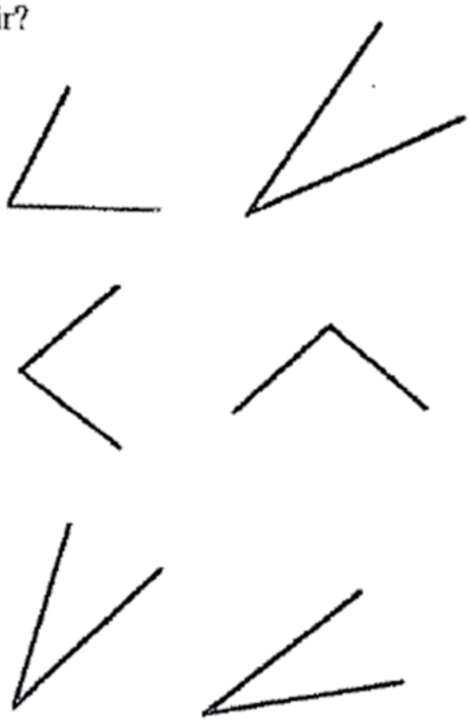


Tareas **P15**

Comparar dos (o más) figuras ya terminadas, analizar si son iguales, si una es más grande/pequeña que la otra, en qué se diferencian, etc.

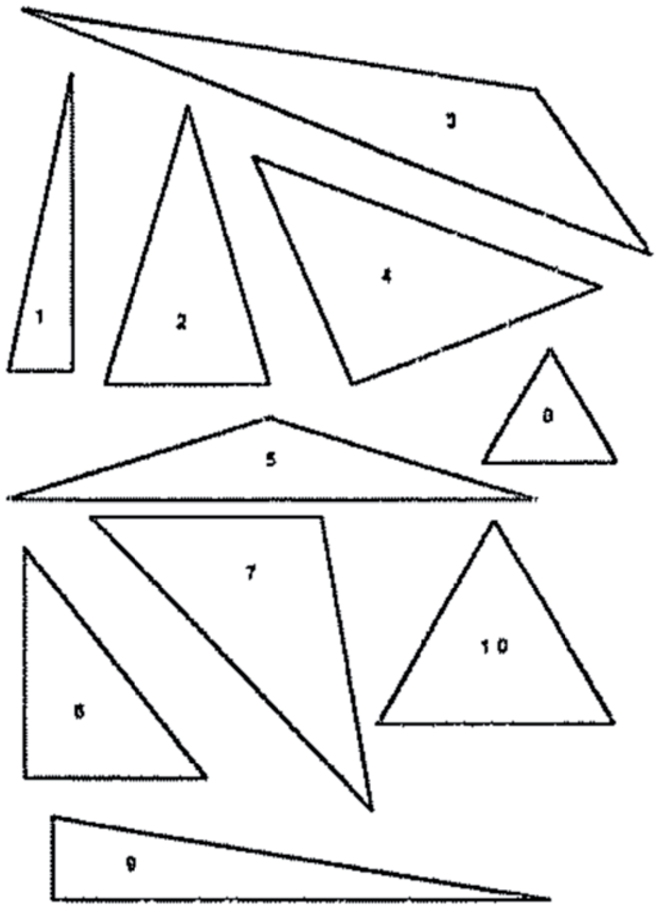
(Clements & Battista, 1990, p. 360)

9–11 Which angle is bigger in each pair?



(Clements & Battista, 1990, p. 361)

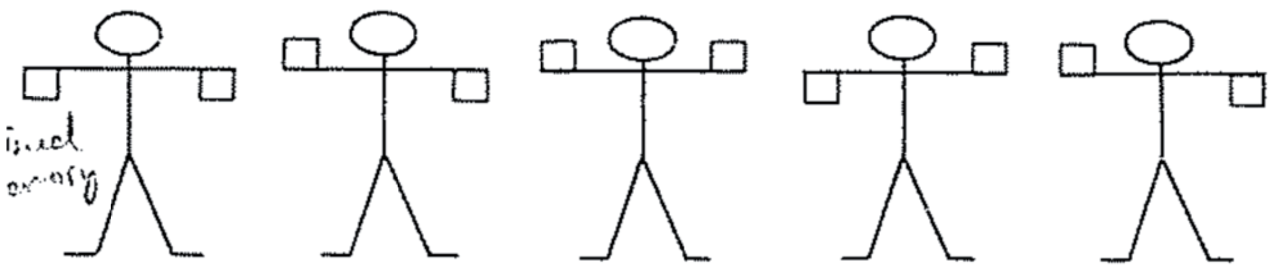
18. Can you put some of these together that are alike in some way? How are they alike? Can you put some together that are alike in a different way How are they alike? (3)



(Del Grande, 1987, p. 134)

- One figure is different from the rest
- Circle the figure

Two figures are exactly the same. Circle them.



(Deliyianni, Elia & Gagatsis, 2009, p. 705)

3. Underline the right sentence:

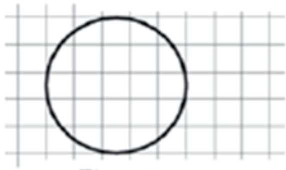


Figure 1

Figure 2

(Op4)

a) Fig. 1 has equal perimeter with Fig. 2
b) Fig. 1 has smaller perimeter than Fig. 2
c) Fig. 1 has bigger perimeter than Fig. 2

Tareas **P16**

Llenado/composición/recomposición/descomposición de figuras

(Brown & Wheatley, 1997, p. 50)

Perhaps the clearest example of decomposition/recombination was seen in the mathematical activity of students as they solved an area problem. All the students who were successful at solving this problem used a similar approach. Figure 4 illustrates the problem and the method used by these students.

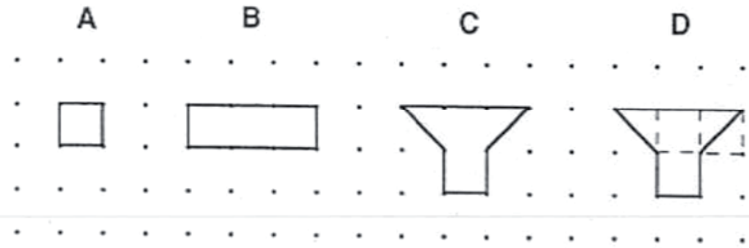


Figure 4. Problem and solution to the Area Task. A and B are the sample figures given to establish the unit. C is the figure whose area needed to be found. D represents the solution involving decomposition/recombination.

(Brown & Wheatley, 1997, p. 55-56)

The first task in the first imagery interview was the Tangram Pattern Task

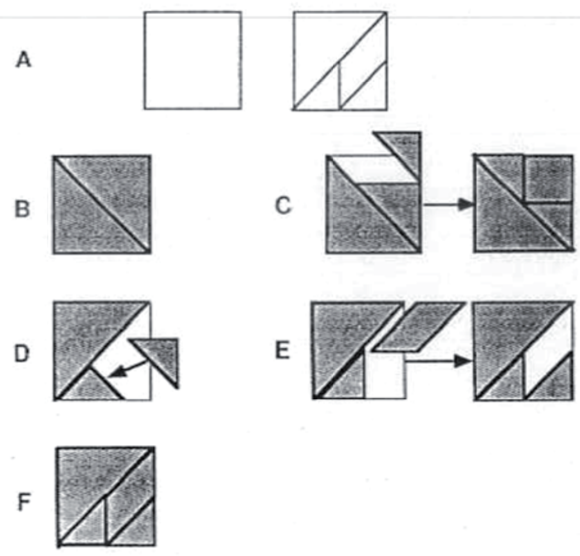
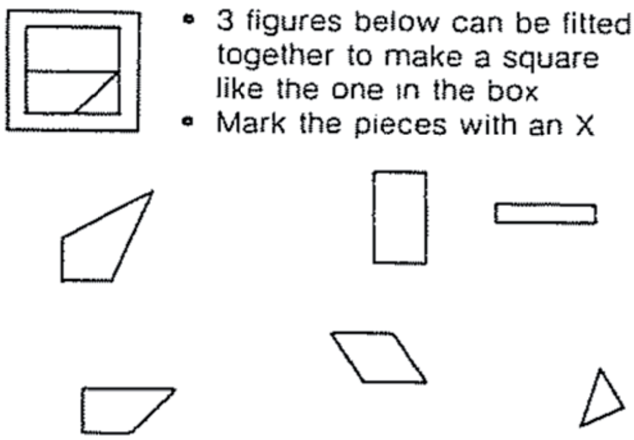


Figure 8. Jean's solutions to the third Tangram Pattern Task. Line A is the form and pattern. B and C are her original solutions. Lines D and E are her attempts after looking at the pattern and F is her final solution, completed while looking at the pattern.

(Del Grande, 1987, pp. 130-131)



Use as many pieces as you need to fill the figure

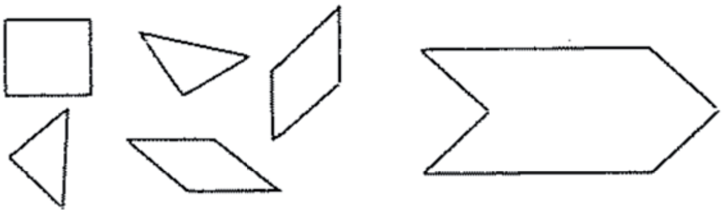
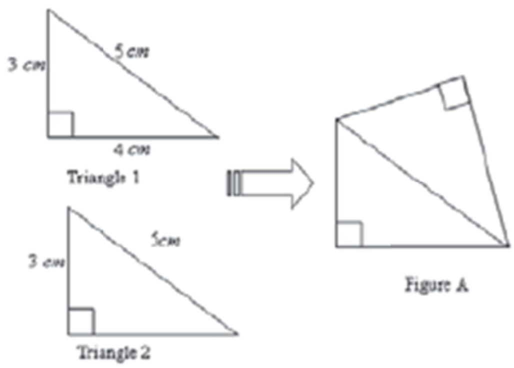


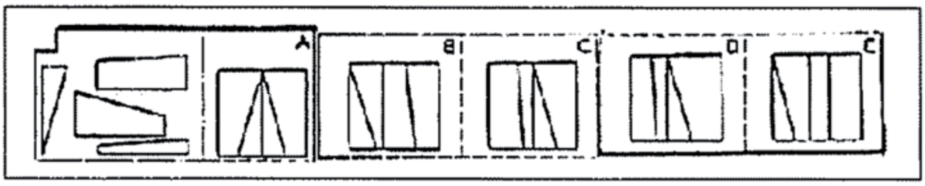
Fig. 11.3

(Deliyianni, Elia & Gagatsis, 2009)

4.Peter combines Triangle 1 and Triangle 2 making Figure A. Calculate the perimeter of Figure A. (Op6a)



(Olkun, 2003, p. 10)



Form Board (SV)

(Owens, 1992, p. 208)

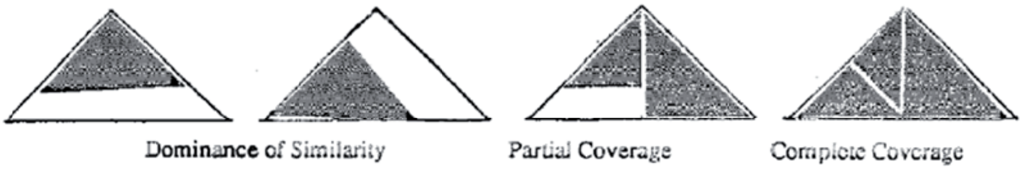


Figure 1: Covering the Large Triangle

(Yakimanskaya, 1991, p. 184)

4. Cut a rectangle 9 cm long and 4 cm wide into equal parts that can make up a square.

Tareas **P17**

Seguir caminos

(Del Grande, 1987, p. 129)

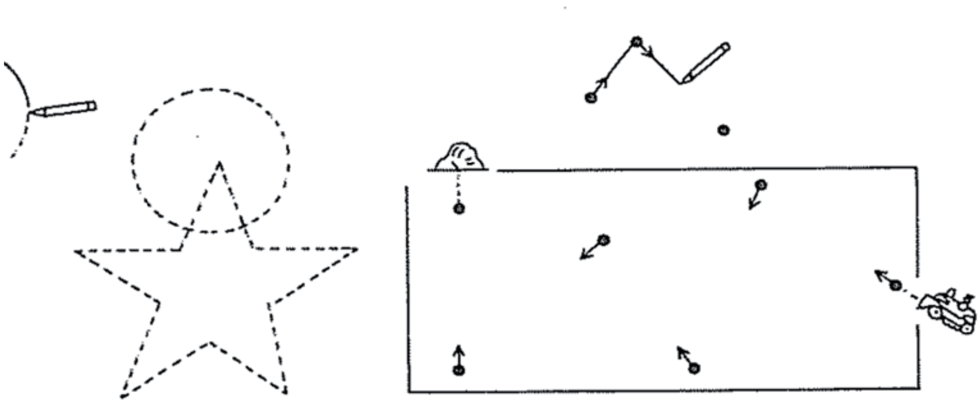
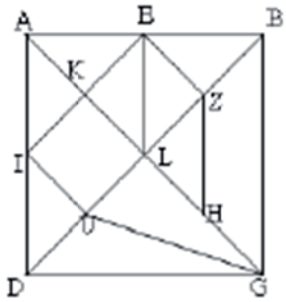


Fig. 11.1

(Deliyianni, Elia y Gagatsis, 2009, p. 705)

2. Recognize the figures in the parenthesis (KEZL, IEZU, EZHL, IKGU, LGU, BIL)



<u>Tareas **P18**</u>

Situar/describir verbalmente la situación de un elemento en el plano para que otro lo sitúe.

(Bishop, 1983, pp. 190-191)

6 Location cards. *Location cards were based on the diagrams used by Asso and Wyke (1973) They had two or three intersecting lines and a small circle, and the student was asked to say where on the card the circle was drawn*