



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Rankings baseados en problemas DEA

Julián Villanustre Otero

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Rankings baseados en problemas DEA

Julián Villanustre Otero

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

| |
|--|
| Área de Coñecemento: Estadística e Investigación Operativa |
| Título: Rankings baseados en problemas DEA |
| Breve descripción do contido |
| A análise DEA (Data envelopment analysis) é un método en investigación operativa con claras orientacións económicas que permiten medir a eficiencia de diferentes unidades de toma de decisión (Decision Making Units, <i>DMUs</i>) que conforman un sistema. Este traballo abordará algunhas metodoloxías descritas na literatura para este fin baixo a perspectiva da teoría de xogos cooperativos. |
| Recomendacións |
| |
| Outras observacións |
| |

Índice xeral

| | |
|---|------------|
| Resumo | VII |
| Introdución | IX |
| 1. Os modelos DEA e a teoría de xogos | 1 |
| 1.1. Modelo DEA | 1 |
| 1.1.1. Formulación lineal do modelo | 2 |
| 1.1.2. Unha medida cuantitativa da eficiencia dunha DMU | 7 |
| 1.2. Xogos cooperativos de utilidade transferible | 10 |
| 1.2.1. Xogos TU | 10 |
| 1.2.2. Solucións de xogos TU | 11 |
| 1.2.3. Outros resultados | 17 |
| 2. Valor de Shapley modificado e coeficiente de Gini | 19 |
| 2.1. Medindo a cooperación das DMUs | 20 |
| 2.2. Modificando o valor de Shapley | 21 |
| 2.3. Coeficiente de Gini | 24 |
| 3. Rankings de DMUs eficientes | 29 |
| 3.1. Medindo a cooperación das DMUs eficientes | 30 |
| 4. Aplicación ao sector hoteleiro | 39 |
| 5. Conclusións | 45 |
| A. Código R | 47 |
| A.1. Funcións de R | 47 |
| A.2. Exemplo de uso | 50 |
| Bibliografía | 55 |

Resumo

Os problema DEA (Charnes et al., 1978) plantéxanse co obxectivo de medir a eficiencia relativa individual dunha *DMU* (Unidades de toma de decisión) dentro dun conxunto delas. En concreto, preténdese clasificar as devanditas *DMUs* dacordo coa súa capacidade de influír na eficiencia global do sistema. Para acadar este obxectivo, faremos uso da teoría de xogos cooperativos a través da definición de xogos TU específicos e o uso de solucións específicas para os mesmos. Neste traballo preséntanse varias opcións de rankings de *DMUs* en problemas DEA descritos na literatura. Finalmente aplicaranse sobre unha situación real, a xurdida na industria hoteleira en España trala crise do sector derivada da COVID-19.

Palabras clave: Data Envelopment Analysis, Xogos cooperativos, Valor de Shapley, Rankings.

Abstract

DEA problems (Charnes et al., 1978) are designed to measure the individual relative efficiency of a *DMU* (Decision Making Unit) within a set of *DMUs*. Specifically, the aim is to classify the *DMUs* according to their ability to influence the overall efficiency of the system. To achieve this goal, we will make use of the theory of cooperative games through the definition of specific TU games and the use of specific solutions for them. In this thesis we present several options of *DMUs* rankings in DEA problems described in the literature. Finally, we apply them to a real situation, the one arising in the Spanish hotel industry after the crisis in the sector derived from COVID-19.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Cooperative game, Shapley value, Rankings.

Introdución

España é un dos principais destinos turísticos de todo o mundo. Os datos abalan esta afirmación, xa que no 2019 recibiu 83.7 millóns de viaxeiros, dos cales 4.3 eran internacionais. Ademais, o sector turístico en España representa un 12 % do PIB (Produto Interior Bruto). É por todos sabido que o sector hoteleiro foi un dos máis azoutados pola crise derivada da COVID-19, xa que durante meses as fronteiras entre países, e mesmo entre comunidades de España, permaneceron pechadas. Incluso tras abrir as fronteiras, as restrición impostas polo goberno seguiron afectando negativamente a industria. Un claro exemplo desta situación é o acontecido na cidade de Santiago de Compostela, na que a súa hostalería sustentase en gran medida sobre os turistas que atrae o camiño de Santiago e que durante este último ano e medio sufriu un descenso de máis do 80 %. Ante esta situación inusual, as medidas adoptadas foron igual de inusuais. Entre outras, destaca o feito de que se estendese, por primeira vez na historia, a celebración do Ano Santo Xacobeo durante 2 anos consecutivos co obxectivo de fomentar a chegada de peregrino a cidade.

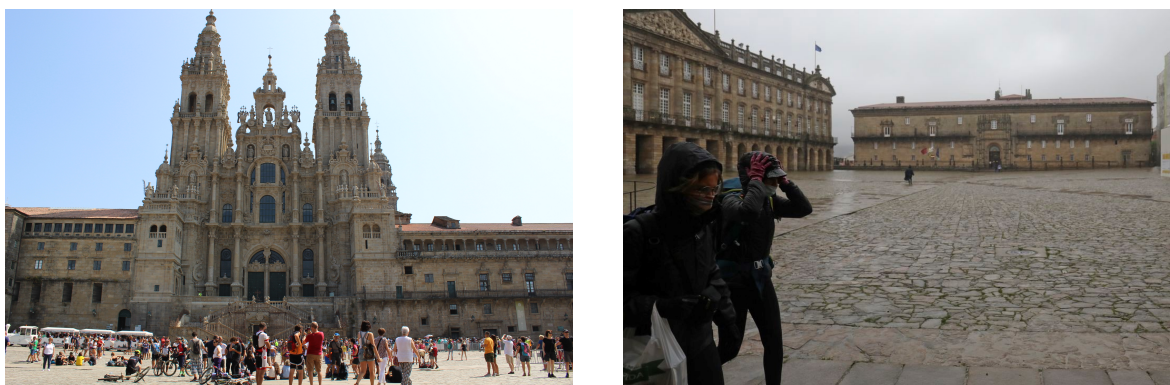


Figura 1: Praza do Obradoiro, antes (esquerda) e despois (dereita) da crise da COVID19.

Nestas situación resulta interesante pensar na posibilidade de cooperación entre os diversos axentes estratéxicos involucrados no sector económico, co fin de minimizar as fluctuacións económicas e aumentar á súa vez a competitividade dentro do mercado turístico.

Entre as múltiples medidas a adoptar, a cooperación entre comunidades autónomas podería ser útil en materia de turismo para mellorar a súa competitividade e eficiencia no mercado turístico global. Ademais, criterios como a proximidade xeográfica ou as políticas adoptadas por cada comunidade xustifican a agrupación de membros da industria hoteleira por rexións. Á par, comprobar que rexión é a mellor en termos de incrementar a eficiencia ó unirse a unha coalición, xustifica o interese por clasificar as autonomías dacordo con este criterio. No Cadro 1 proporcionase unha medida da capacidade anual da industria hoteleira en España no 2019, con este fin tómanse as medias mensuais de indicadores como o número de hoteis abertos, o número de camas dispoñibles, o número de empregados ou outros datos sobre a ocupación hoteleira. Ten sentido considerar os datos do 2019, pese a non seren os actuais, xa que son a última referencia previa a pandemia e polo tanto a última referencia “normal”. Dan mostra do “músculo” de cada unha das autonomías.

| Rexión | Hoteis | Camas | Empregados | Hóspedes | Pernoctacións | Ocupación |
|------------------|---------|-----------|------------|------------|---------------|-----------|
| Andalucía | 2455.00 | 259275.33 | 36287.25 | 1653402.16 | 4576537.92 | 146765.58 |
| Aragón | 766.58 | 37562.33 | 3638.75 | 247598.83 | 480469.00 | 15559.58 |
| Asturias | 547.83 | 24187.41 | 2753.41 | 148125.00 | 311687.17 | 10095.41 |
| Illas Baleares | 773.66 | 202184.75 | 33402.91 | 879083.00 | 4840793.17 | 152446.58 |
| Canarias | 540.66 | 249976.17 | 47752.41 | 814067.25 | 5604536.50 | 180138.16 |
| Cantabria | 325.75 | 15942.25 | 2157.08 | 110174.58 | 246587.50 | 7893.83 |
| Castela e León | 1269.83 | 58019.33 | 6710.50 | 425852.25 | 710568.25 | 23119.08 |
| Castela A Mancha | 728.66 | 31638.50 | 2818.25 | 189637.50 | 319173.25 | 10395.66 |
| Cataluña | 2302.66 | 251134.00 | 34896.00 | 1727974.91 | 4854300.92 | 153449.66 |
| Valencia | 1028.75 | 128020.75 | 16301.16 | 777374.16 | 2487222.00 | 77899.16 |
| Estremadura | 370.00 | 18523.66 | 2350.41 | 122368.25 | 209967.83 | 6841.66 |
| Galicia | 1416.66 | 59754.33 | 6920.91 | 372374.75 | 751117.92 | 24260.08 |
| Madrid | 1170.50 | 114306.50 | 14758.00 | 1052319.08 | 2127934.25 | 69282.50 |
| Murcia | 161.00 | 17745.41 | 2184.33 | 113575.41 | 273159.33 | 8798.83 |
| Navarra | 271.91 | 11899.50 | 1492.00 | 89055.08 | 167078.75 | 5383.33 |
| País Vasco | 554.50 | 29519.58 | 4161.50 | 266280.25 | 513775.25 | 16609.50 |
| A Rioxa | 147.50 | 6210.91 | 785.25 | 47858.33 | 83548.83 | 2718.16 |
| Ceuta | 12.66 | 773.50 | 124.66 | 6371.08 | 14058.17 | 459.08 |
| Melilla | 10.00 | 838.00 | 152.00 | 5604.83 | 11668.33 | 383.16 |

Cadro 1: Media dos indicadores mensuais da industria hoteleira española en 2019. Fonte: Instituto Nacional de Estadística, INE (<https://www.ine.es/>).

O *Data Envelopment Analysis* (DEA) é unha técnica non paramétrica en investigación

operativa e economía, introducida en Charnes et al. (1978), que utiliza modelos de programación lineal para avaliar a eficiencia dun conxunto homoxéneo de unidades de toma de decisión, ás que chamaremos *DMUs*. Cada *DMU* caracterízase por utilizar certos *inputs* ou entradas para producir certos *outputs* ou saídas. A idea tras esta técnica é estimar a fronteira eficiente do conxunto de posibilidades de produción (conxunto factible), na cal se proxectan tódolos *DMUs*. Formalmente, a fronteira eficiente está formada polos puntos de operación non dominados. Así un *DMU* dise ineficiente se existe un punto de operación que, utilizando menos entradas, produce as mesmas saídas, ou se, cas mesmas entradas produce máis saídas. Temos así unha clasificación cualitativa entre *DMUs* eficientes e ineficientes.

A pesar de que esta técnica foi proposta inicialmente para avaliar a actividade de entidades sin ánimo de lucro como sistemas públicos (educación, sanidades, ...), existen múltiples referencias na literatura aplicándoa a unha gran variedade de problemas reais. Destacamos por exemplo Hua et al. (2007) que aplica DEA para a avaliación da eficiencia ecolóxica na industria, ou Cooper et al. (2009) que avalía a eficiencia de xogadores de baloncesto utilizando DEA. Ademais, Yin et al. (2020) céntrase en avaliar o rendemento hoteleiro respecto a súa capacidade operativa e de marketing e Yazdani et al. (2020) usa DEA para seleccionar a localización de centros de loxística en distintas comunidades autónomas de España.

A colaboración das *DMUs* no marco dos problemas DEA favoreceu o uso da teoría de xogos cooperativa para a análise dos mesmos nos últimos anos. Por exemplo, Cook et al. (1999) foron os primeiros en utilizar DEA para facilitar unha asignación de custos. En Lozano (2012) analízanse os beneficios de compartir información entre *DMUs* sobre o consumo de entradas e a produción de saídas. En Yang et al. (2015) propoñen unha asignación de recursos con un alto nivel de equidade utilizando unha modificación de valor de Shapley. A posible comparación das *DMUs* utilizando teoría de xogos cooperativos recibiu moita atención na literatura, sobre todo nos últimos anos dende o aumento substancial do poder discriminatorio do DEA. Li and Liang (2010) utiliza o valor de Shapley para clasificar variables atendendo a eficiencia das *DMUs*, Li et al. (2016) propón unha clasificación distinta baseada no concepto de súper-eficiencia. Nos centraremos na clasificación proposta en, Hinojosa et al. (2017), que utiliza a variación da eficiencia dos *DMUs* cando un grupo de unidades eficientes abandona a mostra, ou de forma equivalente, cando entra na mostra, que como xa veremos en esencia é o mesmo.

Capítulo 1

Os modelos DEA e a teoría de xogos

Neste capítulo presentaremos as ideas básicas sobre as que se sustentará o resto do traballo. Primeiro presentarase o modelo DEA proposto en Charnes et al. (1978) xunto aos conceptos de *DMU* eficiente e grao de eficiencia. Logo exporemos algúns resultados necesarios propios da teoría de xogos cooperativos, extraídos de González-Díaz et al. (2010).

1.1. Modelo DEA

Como xa comentamos, os problemas DEA tratan de medir a eficiencia relativa dun grupo de unidades de toma de decisión (*DMUs*), onde cada *DMU* usa certas entradas para producir certas saídas. Cabe destacar que é habitual que estas entradas e saídas sexan múltiples. En Charnes et al. (1978) analízase este problema dende un punto de vista matemático e propónse un modelo orientado nos datos de saída (*outputs*) con retorno constante a escala (*constant return to scale*). Retorno constante a escala é unha hipótese baixo a cal se as entradas aumentan unha cantidade, as saídas aumentan proporcionalmente a esa cantidade. Que o modelo sexa orientado nas saídas quere dicir que a función obxectivo busca maximizar o ratio entre as saídas ponderadas e as entradas ponderadas do *DMU* que estamos a avaliar, baixo a restrición de que o ratio entre as entradas e as saídas ponderadas non pode ser maior ca un para ningún *DMU* da mostra. Presentamos o modelo como segue

$$\begin{aligned} \max \quad & h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}; \\ \text{suxeito a:} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1; \quad j = 1, \dots, n. \\ & u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde denotamos por x_{ij} os datos de entrada e y_{rj} os de saída das j *DMUs*, con $j = \{1, \dots, n\}$, e por u_r e $v_i \geq 0$, con $r = 1, \dots, s$ e $i = 1, \dots, m$, os pesos asignados aos correspondentes datos. A notación y_{r0} e x_{i0} fai referencia ao *DMU* do cal queremos calcular a eficiencia. Ao conxunto de *DMUs* denotarémolo por *grupo de referencia* ou *mostra*.

Nótese que o problema (1.1) pode ser rescrito mediante a seguinte formulación vectorial.

$$\begin{aligned} \max \quad & h_0 = \frac{uy_0}{vx_0}; \\ \text{suxeito a:} \quad & \\ & \frac{uy_R}{vx_R} \leq 1, \\ & \frac{uy_r}{vx_r} \leq 1, \\ & u, v \geq 0; \end{aligned}$$

Sexa $u^* = (u_1^*, \dots, u_s^*)$ e $v^* = (v_1^*, \dots, v_m^*)$ unha solución óptima do problema. Como $y_R \geq y_r$ e $x_R = x_r$ temos que $u^*y_R = v^*x_R = v^*x_0$, por tanto $h_0 = \frac{y_0}{y_R}$.

Nótese tamén que os pesos u^* e v^* están determinados polos datos de entrada e saída observados suxeitos as restricións do modelo (1.1), ademais baixo estas observacións e restrición ningunha outra configuración de pesos vai acadar unha mellor valoración para o grupo de referencia, é dicir que se con estes pesos non se acada unha eficiencia do 100 %, non se vaia acadar con ningún conxunto de pesos.

1.1.1. Formulación lineal do modelo

O modelo (1.1) é un modelo de programación matemática non lineal. En concreto trátase dun problema de programación fraccional. Dacordo con Charnes et al. (1962) e Charnes et al. (1973) precisamos pasar, na práctica, dun problema de programación fraccional a un de programación linear equivalente.

Primeiro consideramos o seguinte modelo que se corresponde coa formulación do problema DEA orientado ós *inputs*.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0 = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}; \\ \text{suxeito a:} \quad & \\ & \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \geq 1; \quad j = 1, \dots, n. \\ & u_r, v_i \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Agora, o obxectivo é pasar deste problema non lineal e non convexo a un problema de programación lineal. Desta maneira, construímos o problema (1.3) como asociado ó primeiro.

$$\begin{aligned}
& \max \quad z_0; \\
& \text{suxeito a :} \\
& - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + y_{r0} z_0 \leq 0, \quad r = 1, \dots, s. \\
& \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m. \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Trátase dun problema de programación lineal. Polo tanto, é posible obter a formulación do problema dual asociado que expresamos como segue.

$$\begin{aligned}
& \min \quad g_0 = \sum_{i=1}^m w_i x_{i0}; \\
& \text{suxeito a :} \\
& - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{i=1}^m w_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} = 1; \\
& \mu_r, w_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

A estrutura do modelo (1.4) correspóndese a un problema de programación lineal, polo que seguindo o exposto en Charnes et al. (1962) e Charnes et al. (1973), aplicamos as seguintes transformacións:

$$\begin{aligned}
w_i &= t v_i, \quad i = 1, \dots, m. \\
\mu_r &= t u_r, \quad r = 1, \dots, s. \\
\frac{1}{t} &= \sum_r u_r y_{r0},
\end{aligned}$$

onde $t > 0$. Tras ditos cambios obtemos a seguinte formulación:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_0 = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}, \\
\text{suxeito a:} \quad & \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0; \quad j = 1, \dots, n. \\
& u_r, v_i \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

que é un modelo de programación lineal fraccional equivalente a (1.4). Ademais é evidente que as restricións

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0; \quad j = 1, \dots, n$$

do problema (1.5) equivalen a

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \geq 1; \quad j = 1, \dots, n$$

que son as restricións do modelo orientado nos *inputs* (1.2). Polo tanto podemos usar (1.4) para resolver (1.5), que a súa vez aporta a solución de (1.2), de onde conseguimos facilmente a solución de (1.1) que é o que queríamos encontrar nun comezo.

Resumindo, para resolver o modelo (1.1), basta resolver o proposto en (1.4) xa que $f_0^* = g_0^* = z_0^*$ e polo tanto $h_0^* = \frac{1}{z_0^*}$. Referirémonos a estas solucións como grao de eficiencia. Debemos notar tamén que o valor dos pesos v_i^* e u_r^* son os mesmos para a solución óptima de calquera dos modelos anteriores.

Agora co obxectivo de abordar varias ideas sobre *Data Envelopment Analysis* definimos:

$$P_j = \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}; \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.6}$$

onde Y_j é o vector que contén os datos de saída y_{rj} con $r = 1, \dots, s$, e X_j é o vector que contén os datos de entrada x_{ij} , con $i = 1, \dots, m$.

Expresamos o problema en (1.3) en forma vectorial:

$$\begin{aligned}
& \max z_0; \\
& \text{suxeito a :} \\
& - \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j + Y_0 z_0 \leq 0; \\
& \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X_0; \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

e denotamos por

$$z_0^*, \lambda_j^*, s^{*+}, s^{*-}; \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

á solución óptima e as súas variables de folgura. Sendo, s^{*+} un vector non negativo asociado as desigualdades dos datos de saída e s^{*-} un vector non negativo asociado as desigualdades dos datos de entrada.

Se $z_0^* > 1$, é dicir, $h_0^* < 1$, a fronteira eficiente do conxunto factible non se acada. Pero debemos notar que se algunha das compoñentes de s^{*+} é distinta de cero, podemos aumentar os datos de saída asociados sen alterar o valor das λ_j^* e sen violar ningunha restrición. De forma similar, se s^{*-} ten algunha compoñente distinta de cero, podemos reducir o valor dos datos de entrada de X_0 a $X_0 - s^{*-}$, polo tanto non se acada eficiencia (relativa) nin sequera cando $z_0^* = 1$.

Proposición 1.1. *Unha condición necesaria e suficiente para valorar como eficiente un DMU é que satisfaga as seguintes condicións no problema (1.3):*

- i) $z_0^* = 1$
- ii) $s^{*+} = s^{*-} = 0$

Observación 1.2. Estas condicións son tamén as condicións de eficiencia de Pareto estendidas para cubrir tanto a produción como o consumo.

Con isto, xa temos unha noción cualitativa de cando un *DMU* é eficiente, máis adiante facemos contacto co traballo de Farrell para dar unha noción cuantitativa da eficiencia dunha determinada *DMU* respecto a un conxunto de observacións.

Supoñamos agora que queremos axustar tódalas observacións con algún propósito en concreto, por exemplo, para avaliar o potencial dun determinado programa para unha *DMU* dada, supoñendo que o programa é eficiente baixo esa *DMU* específica, para iso debemos eliminar as ineficiencias. Iso pódese facer utilizando as condicións necesarias da seguinte maneira.

Primeiro dado un *DMU*, resolvemos (1.7) e coas súas solucións formulamos o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \hat{z}_0; \\
& \text{suxeito a :} \\
& - \sum_{j=1}^n Y_j \hat{\lambda}_j + (Y_0 z_0^* - s^{*+}) \hat{z}_0 \leq 0; \\
& \sum_{j=1}^n X_j \hat{\lambda}_j \leq X_0 - s^{*-}; \\
& \hat{\lambda}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

A (1.9) coñéceselle como “*varied problem*”, e usámolo para eliminar tódalas ineficiencias que se detectan ao resolver (1.7). Para eliminar as ineficiencias reducimos os datos de entrada de X_0 a $X_0 - s^{*-}$ e aumentamos os datos de saída de $Y_0 z_0$ a $Y_0 z_0^* - s^{*+}$, as novas observación chamarémoslles datos de entrada e saída axustados.

Proposición 1.3. *Os novos datos axustados satisfán a condición necesaria e suficiente para a eficiencia.*

Demostración. Consideramos o problema (1.9) e sexa \hat{z}_0^* a súa solución. Temos que $\hat{z}_0^* \geq 1$, se $\hat{z}_0^* = 1$ podemos calcular facilmente a solución óptima usando (1.8). Supoñamos que $\hat{z}_0^* > 1$, entón:

$$\begin{aligned}
- \sum_{j=1}^n Y_j \hat{\lambda}_j^* + Y_0 \hat{z}_0^* z_0^* &\leq - \sum_{j=1}^n Y_j \hat{\lambda}_j^* + (Y_0 \hat{z}_0^* + s^{*+}) z_0^* \leq 0, \\
\sum_{j=1}^n X_j \hat{\lambda}_j^* &\leq X_0 - s^{*-} \leq X_0,
\end{aligned}$$

xa que s^{*+} e s^{*-} son vectores non negativos. Polo tanto tomando $\hat{z}_0^* z_0^*$ e $\hat{\lambda}_j^*$ en (1.7) satisfanse as restricións, ademais $\max z_0 \geq z_0^* \hat{z}_0^* > z_0^*$ xa que $\hat{z}_0^* > 1$ por hipótese. Pero $\max z_0 > z_0^*$ é unha contradición, xa que por hipótese $\max z_0 = z_0^*$, entón $\hat{z}_0^* = 1$ é o valor óptimo en (1.9), polo que se cumpre i).

Agora vexamos que a solución óptima de (1.7), λ_j^* , con $j = 1, \dots, n$, é tamén solución óptima de (1.9) cos vectores das variables de folgura \hat{s}^{*+} e \hat{s}^{*-} igual a 0. Por ser (1.8) solución de (1.7) temos que:

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j^* + Y_0 z_0^* + s^{*+} &= 0, \\
\sum_{j=1}^n X_j \lambda_j^* &= X_0 - s^{*-}.
\end{aligned}$$

Polo tanto λ_j^* é solución do *varied problem* para $\hat{z}_0^* = 1$ que como vimos antes é solución óptima. Ademais as variables de folgura valen todas cero. Queda así probado o resultado. \square

En resume, os axustes nos datos que fixemos anteriormente levan as observacións iniciais a dentro do conxunto de produción eficiente.

1.1.2. Unha medida cuantitativa da eficiencia dunha DMU

A continuación aproximáremos ao traballo de Farrell co propósito de dar unha medida cuantitativa para a eficiencia dunha *DMU*.

Exemplo 1.4. Vexamos un exemplo tomado da bibliografía Charnes et al. (1977) onde consideramos 6 *DMUs* con 2 entradas normadas no valor da súa respectiva saída. Polo tanto cada P_j representa unha versión normada de (1.6), coas compoñentes de X_j divididas entre as súas correspondentes saídas (y_j) e onde os datos de saída son eliminados e asociados aos coeficientes unitarios das variables λ_j . Sexan,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

os valores de entrada normados. Supoñamos que queremos estudar por exemplo a eficiencia de P_2 , resolvemos mediante o método símplex o problema DEA que plantexamos anteriormente, para iso podemos utilizar o paquete de **R IpSolveAPI** dacordo co código do Apéndice A.

Tras a súa resolución, obtemos que a solución óptima toma $\lambda_4^* = \frac{5}{6} \approx 0,8333$, $\lambda_3^* = \frac{1}{3} \approx 0,3333$, $z_0^*(P_2) = \frac{7}{6} \approx 1,1667$. Claramente non satisfai as condicións necesarias de eficiencia (1.1).

Para analizar os datos seguindo o estudo de Farrell, traballaremos baixo 2 hipóteses, a primeira é que cada dato de entrada pode ser contraído ou expandido ao longo dun raio que vai do orixe cara o punto que representa eses datos, a segunda hipótese é que toda combinación convexa dos datos de entrada pertence ao conxunto factible, i.e., é unha

opción de produción posible. Os puntos eficiente serán a unión das fronteiras dos símplex (caras) formados polos puntos extremos eficientes, no caso particular do noso problema é a unión dos segmentos que unen os puntos extremos. A unión de todos os puntos eficientes chamarémoslle *efficient isoquant* ou *fronteira eficiente*.

Definición 1.5. *Un símplex* é unha envoltura convexa dun conxunto de $n + 1$ puntos independentes afíns nun espazo euclídeo de dimensión n ou maior.

Farrell (1957) traballou con tres conceptos de eficiencia distintos:

1. Eficiencia técnica.
2. Eficiencia de prezos.
3. Eficiencia xeral.

Naquel traballo tratouse principalmente o concepto de eficiencia técnica, xa que é o máis cómodo e flexible debido a que a súa única esixencia é que tódalas entradas e saídas teñan un valor. O Algoritmo do símplex danos unha expresión de P_2 como combinación de puntos extremos do conxunto factible $\frac{5}{6}P_4 + \frac{1}{3}P_3 = P_2$, esta combinación podémola facer convexa dividindo entre $\frac{7}{6}$. Obtemos:

$$\frac{5}{7}P_4 + \frac{2}{7}P_3 = \frac{6}{7}P_2 = P'_2.$$

A interpretación destas contas é que estamos calculando cal é o punto P'_2 que pertence a fronteira eficiente máis próximo á orixe no raio de P_2 . En termos de eficiencia, diremos que se P_2 producise tan eficientemente como P'_2 entón debería poder producir unha unidade de saída con tan só $\frac{6}{7}$ das cantidades de entrada. En concreto defínese a eficiencia técnica como segue:

Definición 1.6. Sexa P_i un punto correspondente a unha *DMU* e sexa $l(OP_i)$ a distancia dende a orixe ata P_i . Sexa P'_i a proxección de P_i sobre a fronteira eficiente do conxunto factible. Defínese a eficiencia técnica de P_i como

$$0 \leq TEF(P_i) = \frac{l(OP'_i)}{l(OP_i)}, \text{ con } TEF(P_i) \geq 0,$$

obtemos así unha medida cuantitativa da eficiencia de P_i .

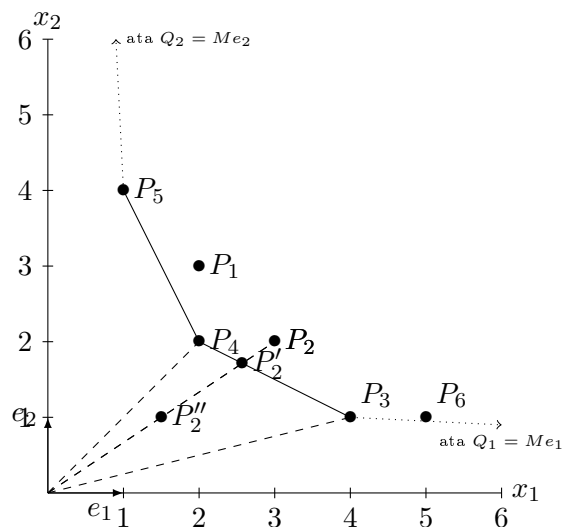


Figura 1.1: Representación gráfica do problema.

No caso anterior como $\frac{6}{7}P_2 = P'_2$, é inmediato ver que a eficiencia técnica $TEF(P_2) = \frac{6}{7}$.

A liña que conecta P_3 e P_4 forma parte da *fronteira eficiente* e ao igual que P'_2 tódolos puntos deste segmento son eficientes. Nótese que non pode existir un punto P''_2 entre a *fronteira eficiente* e a orixe, xa que non pertence ao conxunto factible.

Se agora consideramos $P_0 = P_1$, tras aplicar o simplex obtemos $\frac{5}{6}P_4 + \frac{2}{6}P_5 = P_1$, $z_0^*(P_1) = \lambda_4^* + \lambda_5^* = \frac{7}{6}$ vemos que P_1 non cumpre (1.1) e polo tanto non é eficiente. Igual que fixemos anteriormente dividindo entre $\frac{7}{6}$ obtemos $P'_1 = \frac{6}{7}P_1 = \frac{5}{7}P_4 + \frac{2}{7}P_5$ que pertence á *fronteira eficiente*. Notemos que a única diferenza respecto ao caso de P_2 é que a base óptima é distinta, isto débese a que P_1 non pode ser expresado como combinación de P_4 e P_3 sen romper as condicións de non negatividade. Graficamente isto equivale a que P_1 non pertence ao cono xerado ao unir a orixe con P_4 e P_3 .

Para rematar de analizar este exemplo, consideraremos o caso $P_0 = P_6$, se aplicamos o método simplex podemos obter 2 solucións que teñen o mesmo valor na función obxectivo, $1P_6 = P_6$ e $1P_3 + 1e_1 = P_6$, en ambos casos $z_0^*(P_6) = 1$, sen embargo na segunda solución vemos que non se cumpre a condición de eficiencia ii), i.e., non todas as variables de folgura son cero. Para evitar esta ambigüidade, basta con maximizar as variables de folgura con menor prioridade que as λ_j . Para eso consideramos o modelo:

$$\max z_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^m s_i;$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^n P_j \lambda_j + \sum_{i=1}^m e_i s_i = P_0, \tag{1.10}$$

$$\lambda_j, s_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

onde M é unha cantidade suficientemente grande (non arquimediana) como para que $\frac{1}{M} > 0$ sexa sempre menor que calquera valor positivo que poida tomar λ_j en calquera das iteracións do símplex. Desta forma asegurámonos que o resultado obtido ao aplicar o método símplex non de lugar a ambigüidades.

1.2. Xogos cooperativos de utilidade transferible

Nesta sección trataremos con problemas baseados na colaboración dun conxunto de axentes que trata de repartirse os beneficios ou os custos derivados da súa cooperación.

1.2.1. Xogos TU

Para caracterizar esta clase de problemas, para os cales suporemos que os beneficios xerados por unha coalición pódense repartir libremente entre os xogadores da mesma, definiremos formalmente os chamados *xogos cooperativos de utilidade transferible*.

Definición 1.7. Un xogo de utilidade transferible (ou xogo TU) é un par (N, v) onde N é un conxunto finito de xogadores e $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función que cumpre que $v(\emptyset) = 0$

A función v denomínase función característica do xogo. Para cada subconxunto $S \in 2^N$, ao cal chamaremos coalición, $v(S)$ representa os beneficios que se poden asegurar os xogadores de S , independentemente de como actúen os demais xogadores. Denotamos por $G(N)$ o conxunto de tódolos xogos TU con conxunto de xogadores N . Por comodidade identificaremos un xogo (N, v) coa función característica v .

Definición 1.8. Sexa un xogo $v \in G(N)$. Diremos que v é superaditivo se, para calquera par de coalición $S, T \in 2^N$ con $S \cap T = \emptyset$, tense que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Ao conxunto de xogos superaditivos denotarémolo por $SG(N)$.

Notemos que cando un xogo é superaditivo, os xogadores teñen un incentivo real para colaborar, xa que o beneficio que se poden asegurar ao cooperar é sempre maior ou igual ca o que se poden asegurar por si mesmos.

1.2.2. Solucións de xogos TU

Como xa mencionamos ao principio, o obxectivo principal da teoría de xogos cooperativos é repartir os beneficios, ou custos, derivados da cooperación de varios xogadores. A cada configuración do reparto de recursos chamáremoslle asignación, máis formalmente definimos asignación como:

Definición 1.9. Sexa un xogo $v \in G(N)$. Diremos que o vector $x \in \mathbb{R}^N$, con compoñentes x_i , é unha asignación se,

$$\sum_{i=1}^N x_i = v(N), \quad x_i \geq 0,$$

onde cada compoñente x_i é a parte do beneficio que recibe o xogador i .

A teoría de xogos cooperativos serve para distinguir que asignacións do conxunto de asignación dun xogo $v \in G(N)$ poden ser aceptadas por tódolos xogadores. Esta distinción pode enfocarse baseándonos en dúas ideas distintas, a estabilidade e a ecuanimidade. A continuación veremos dous dos conceptos máis importantes relacionados con cada unha destas ideas, o núcleo e o valor de Shapley.

O núcleo

A idea de estabilidade trata de encontrar un conxunto de asignacións de recursos que sexa estable, é dicir que conteña a asignación que finalmente decidan os xogadores. O concepto relacionado coa estabilidade que estudaremos aquí é o núcleo.

Definición 1.10. Sexa un xogo $v \in G(N)$. Unha imputación de v , é un vector $x \in \mathbb{R}^N$ que satisfai as seguintes condicións:

1. $x_i \geq v(i)$, para todo $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Denotaremos por $I(v)$ ao conxunto de imputacións de v .

As imputacións non son máis cas asignacións para as cales tódolos xogadores reciben un beneficio maior ou igual ao que se poden asegurar por si mesmos. Definimos o núcleo como segue:

Definición 1.11. Sexa un xogo $v \in G(N)$. O núcleo de v , que denotaremos por $C(v)$, é un subconxunto de $I(v)$ definido por

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \in 2^N \right\}.$$

Nótese que os elementos de $C(v)$ asignan a cada coalición uns beneficios maiores ou iguais aos que se poden garantir por elas mesmas. Presentamos agora unha definición e un resultado que nos proporcionan outro punto de vista para entender a conexión entre o núcleo e a estabilidade.

Definición 1.12. Sexa $v \in G(N)$ un xogo TU e sexan $S \in 2^N \setminus \emptyset$ e $x, y \in I(v)$. Dise que x domina a y a través de S se cumpre,

1. $x_i > y_i, \forall i \in S$.
2. $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Dise que x domina a y se existe unha coalición $T \in 2^N \setminus \emptyset$ tal que x domina a y a través de T . Dise que x é non dominada se non existe $z \in I(v)$ tal que z domina a x .

Obsérvese que x domina a y a través de S cando tódolos xogadores de S prefiren x fronte a y , e ademais x é alcanzable para S no sentido de que a cantidade total proposta por x non supera á cantidade que se poden garantir os xogadores de S por si mesmos. Respecto ao tema anterior é importante notar tamén que os puntos da fronteira eficiente son non dominados.

Proposición 1.13. Sexa $v \in G(N)$ un xogo TU.

1. Si $x \in C(v)$, entón x é non dominada.
2. Se ademais, $v \in SG(N)$, entón $C(v) = \{x \in I(v) : x \text{ é non dominada}\}$.

Demostración. Pode consultarse a proba deste resultado en González-Díaz et al. (2010). □

Esto resúltanos interesante xa que os xogos cos que traballaremos máis adiante para medir a cooperación entre *DMUs* serán sempre superaditivos. Presentamos a continuación un exemplo que nos acompañará durante toda a sección co fin de ilustrar os conceptos de núcleo e valor de Shapley.

Exemplo 1.14 (Xogo do luva). Tres xogadores están dispostos a repartirse os beneficios xerados pola venda dun par de luvas. O xogador 1 ten unha luva esquerda, os xogadores 2 e 3 teñen unha luva dereita cada un. As luvas só se venderán con éxito se están ben emparelladas, de ser así venderanse por unha centena de euros. Esta situación corresponde co xogo (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = v(2, 3) = 0$ e $v(1, 2) = v(1, 3) = v(N) = 1$. Neste caso o núcleo é o conxunto unitario $\{(1, 0, 0)\}$ xa que $v \in SG(N)$ e $\{(1, 0, 0)\}$ é o único punto do conxunto de imputacións non dominado, polo que podemos interpretar que o prezo das luvas dereitas no mercado é cero debido ao exceso de oferta.

Achegamos agora un exemplo un pouco máis complexo.

Exemplo 1.15 (A profesora visitante). Tres grupos de investigación pertencente a 3 universidades distintas, universidade de Amsterdam (grupo un), universidade de París (grupo dous) e universidade de Santiago de Compostela (grupo tres), plantexan a visita dunha profesora da universidade de Oxford a impartir unha *masterclass* en física de partículas. Para minimizar custos, as 3 universidades coordinaranse para que a profesora as visite todas nunha mesma viaxe. Os grupos queren repartir os custos. Sexa $N = \{1, 2, 3\}$ o conxunto das tres universidades, o custo estimado da viaxe para cada posible coalición de grupos é:

$$\begin{aligned} c(1) &= 1500, c(2) = 1600, c(3) = 1900, \\ c(12) &= 1600, c(13) = 2900, c(23) = 300 \text{ e} \\ c(123) &= 3000. \end{aligned}$$

Para cada $S \in 2^N$, $c(S)$ representa o custo da viaxe para visitar os grupos de S . Tomando $N = \{1, 2, 3\}$, obtemos un xogo (N, c) , ao que chamaremos xogo de custos e onde $c(S)$ representa os custos derivados da coalición en vez dos beneficios. Definimos o xogo de aforro asociado ao xogo de custos (N, c) como o xogo (N, v) onde para cada $S \in 2^N$ v é:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Entón temos,

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, v(12) = 1500, v(13) = 500, v(23) = 500 \text{ e } v(123) = 2000$$

O núcleo deste xogo será:

$$\begin{aligned} C(v) &= \{ x \in I(v) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ &\quad x_1 + x_2 \geq 1500, x_1 + x_3 \geq 500, \\ &\quad x_2 + x_3 \geq 500, x_1 + x_2 + x_3 \geq 2000 \}. \end{aligned}$$

Na Figura 1.2 representamos $C(v)$ como un subconxunto de $I(v)$.

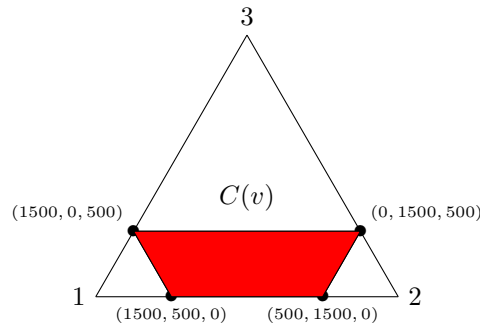


Figura 1.2: O núcleo do xogo da profesora visitante.

O valor de Shapley

Cando establecemos unha asignación, un dos factores a ter en conta é a ecuanimidade. O **valor de Shapley** é unha solución dos xogos TU baseada sobre este principio.

Definición 1.16. Sexa $v \in G(N)$ un xogo TU.

1. Dicimos que $i \in N$ é un xogador nulo de v se, para cada $S \in 2^N$, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.
2. Dous xogadores $i, j \in N$ denomínanse simétricos en v se, para cada $S \in 2^{N/\{i,j\}}$, tense que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Sexa f unha aplicación $f : G(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$, a cal chamaremos valor, e consideremos as seguintes propiedades.

- **Eficiencia:** f satisfai eficiencia se, para todo $v \in G(N)$,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N).$$

- **Propiedade do xogador nulo:** f satisfai a propiedade do xogador nulo se, para todo $v \in G(N)$ e para todo $i \in N$ xogador nulo de v , tense que $f_i(v) = 0$.
- **Simetría:** f satisfai simetría se, para todo $v \in G(N)$ e para todo par de xogadores $i, j \in N$ simétricos en v , tense que $f_i(v) = f_j(v)$.

- **Aditividade:** f satisfai aditividade se, para todo par de xogos $v, w \in G(N)$, $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

O seguinte resultado amosa un valor que cumpre estas propiedades e asegura a súa unicidade.

Teorema 1.17. *Existe un único valor satisfacendo as propiedades anteriores. Este valor denomínase valor de Shapley, e é o vector cuxas compoñentes veñen dadas por:*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \quad (1.11)$$

para todo $v \in G(N)$ e todo $i \in N$, onde s e n denotan os cardinais de S e N , respectivamente.

Demostración. Para máis detalle sobre a súa demostración, ver o Capítulo 5 de González-Díaz et al. (2010). \square

O valor de Shapley podémolo interpretar como o vector de beneficios esperado correspondente a seguinte situación:

- Os xogadores recordan acudir a certo lugar.
- Tódolos posibles ordes de chegada son igual de probables.
- Cando chega o xogador recibe a súa contribución á coalición formada polos xogadores que chegaron antes ca él.

Entón podemos expresar o valor de Shapley alternativamente como

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} (v(B^\pi(i) \cup \{i\}) - v(B^\pi(i))) \quad \forall i \in N,$$

onde $\Pi(N)$ é o conxunto de permutacións de N e $B^\pi(i)$ é o conxunto $\{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$, i.e., o conxunto de xogadores que chegan antes que i para a permutación π .

A continuación, próbase a pertenza ó conxunto de imputacións do valor de Shapley para xogos superaditivos.

Proposición 1.18. *Para todo $v \in SG(N)$, $\Phi(v) \in I(v)$.*

Demostración. Sexa $v \in SG(N)$, notemos que para todo $i \in N$,

$$\sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = 1.$$

Entón como $v \in SG(N)$,

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &\geq \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(i) = v(i),\end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Ademais, como Φ é eficiente por hipótese, $\Phi(v) \in I(v)$. \square

Rescatemos agora o Exemplo 1.14 para ilustrar o cálculo do valor de Shapley nun caso sinxelo con poucos xogadores.

Exemplo 1.19. Na seguinte táboa recóllense os cálculos necesario para obter o valor de Shapley do xogo da luva.

| π | 1 | 2 | 3 |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| 123 | 0 | 1 | 0 |
| 132 | 0 | 0 | 1 |
| 213 | 1 | 0 | 0 |
| 231 | 1 | 0 | 0 |
| 312 | 1 | 0 | 0 |
| 321 | 1 | 0 | 0 |
| Φ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Na táboa calcúlanse os vectores de contribucións marxinais para os distintos ordes de chegada, e finalmente calcúlase a contribución media de cada xogador para obter así o valor de Shapley. Nótese que o valor de Shapley neste caso non é estable xa que non pertence ao núcleo.

Como caso especial, preséntase unha clase de xogos para os cales o valor de Shapley sempre pertence ao núcleo: **os xogos convexos**.

Definición 1.20. Sexa $v \in G(N)$ un xogo TU, dise que v é **convexo** se, para calquera $i \in N$, $S, T \in 2^{N \setminus \{i\}}$ con $S \subset T$,

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Esta propiedade garante que a aportación de cada xogador i , con $i \in N$, a cada coalición a que non pertence i aumenta a medida que tamén o fai a coalición á que se une.

Resulta fácil comprobar que todo xogo convexo é superaditivo. A proba deste resultado pode seguirse en González-Díaz et al. (2010).

Teorema 1.21. *Sexa $v \in G(N)$ un xogo convexo. Entón $\Phi(v) \in C(v)$. Ademais o núcleo é a envoltura convexa dos vectores de contribución marxinais.*

Por último comentar que o custo computacional do cálculo do valor de Shapley medra enormemente segundo aumenta o número de xogadores. Segundo un experimento levado a cabo co software Matlab por **TUG lab** (Mirás et al., 2008), o tempo estimado para conxuntos de ata 15 xogadores é de arredor de 15 minutos, para máis xogadores son necesarios métodos de estimación coma os expostos en Castro et al. (2009). Isto débese en gran parte ao crecemento exponencial do número de subconxunto dun conxunto de n elementos, que é da orde de 2^n .

1.2.3. Outros resultados

Nesta sección presentaremos uns conceptos menos xerais, co fin específico de xustificar que os dous xogos definidos máis adiante na Definición 3.1 son equivalentes, de cara a medir a cooperación entre *DMUs* eficiente.

Primeiro definimos un tipo especial de xogos, os xogos duais.

Definición 1.22. Sexa un xogo cooperativo $v \in G(v)$ chamarémoslle xogo dual de v a v^d definido por

$$v^d(S) = v(N) - v(N \setminus S), \quad \forall S \in 2^N.$$

Polo tanto o dual de v é o xogo que a cada coalición S lle asigna os beneficios que aporta S ao unirse a $N \setminus S$. Diremos que v e v^d son xogos duais. Vexamos agora que o dual do dual é o primal.

Proposición 1.23. *O xogo dual do xogo dual de v é v , i.e., $(v^d)^d = v$*

Demostración. Sexa $v \in G(N)$ e sexa (v^d) o seu dual. Vexamos que $(v^d)^d(S) = v(S)$ para todo $S \in 2^N$,

$$\begin{aligned} (v^d)^d(S) &= v^d(N) - v^d(N \setminus S) \\ &= v(N) - v(N \setminus N) - v(N) + v(N \setminus (N \setminus S)) \\ &= v(N) - v(\emptyset) - v(N) + v(S) = v(S), \end{aligned}$$

quedando probado o resultado. □

Recordemos que definiamos un valor como unha aplicación $f : G(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Definición 1.24. Dise que un valor f é auto-dual se $f(v) = f(v^d)$.

Para finalizar o capítulo, cabe destacar que o valor de Shapley é un valor auto-dual.

Teorema 1.25. *O valor de Shapley é auto-dual.*

A proba deste resultado pode consultarse en Kalai et al. (1987).

Capítulo 2

Valor de Shapley modificado e coeficiente de Gini

O obxectivo deste capítulo é introducir, mediante as técnica DEA e a teoría de xogos cooperativos, un primeiro mecanismo para o establecemento de rankings de *DMUs*. Para isto, partiremos dun procedemento de asignación plantexado para o reparto dos beneficios xerados da cooperación dun conxunto de *DMUs*. Ao longo do capítulo seguirase principalmente a referencia Yang et al. (2015).

Supoñamos que temos un sistema formado por m *DMUs* con características comparables e homoxéneas, é dicir, que se miden as mesmas magnitudes de entrada e saída para tódalas *DMUs*. Denotemos por DMU_{j_0} , con $j_0 \in M = \{1, \dots, m\}$, á *DMU* baixo estudo.

O modelo de programación matemática (1.7) orientado nos *outputs* pode ser rescrito como segue:

$$\begin{aligned} \max \quad & d_{j_0} = d_{j_0}^*; \\ \text{suxeito a:} \quad & \\ & \sum_{j=1}^m Y_j \lambda_j \geq Y_{j_0} d_{j_0}; \\ & \sum_{j=1}^m X_j \lambda_j \leq X_{j_0}; \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como xa comentamos anteriormente a eficiencia calculada por este modelo dise relativa, xa que depende do conxunto de *DMUs* considerado. Entón, se modificamos dito conxunto podemos alterar o valor da eficiencia calculada para cada unha das *DMUs* do grupo de

referencia.

No caso de que un subconxunto de *DMUs* decida cooperar asumiremos a formación dunha certa coalición S . Nese caso, o problema asociado para o cómputo desa eficiencia é o que se expón a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad d_{j_0} = d_{j_0}^*; \\
 & \text{suxeito a :} \\
 & \quad \sum_{j=1}^m Y_j \lambda_j \geq Y_{j_0} d_{j_0}; \\
 & \quad \sum_{j=1}^m X_j \lambda_j \leq X_{j_0}; \\
 & \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in S, j_0 \in S.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notemos que no único no que se diferencia este problema do anterior é no grupo de referencia. Respecto a solución óptima do modelo, sabemos que será $d_{j_0}^* \geq 1$, e será $d_{j_0}^* = 1$ se cumpre as condicións xa mencionadas en (1.1).

2.1. Medindo a cooperación das *DMUs*

Nesta sección plantexaremos o problema de cooperación das *DMUs* dende o enfoque da teoría de xogos cooperativos.

Primeiramente trasladaremos as definicións máis importantes ao caso particular do problema do reparto de recursos, para o cal debemos encontrar unha función característica v que sirva para medir a cooperación en termos de eficiencia dunha coalición de *DMUs*. A continuación definimos a función característica escollida con ese fin.

Definición 2.1. Definimos un xogo que relaciona a eficiencia das *DMUs* cos beneficios da súa cooperación, $\bar{v} \in G(M)$ como:

$$\bar{v}(S) = \sum_{j_0 \in S} \bar{v}_{j_0}(S) = \sum_{j_0 \in S} d_{j_0}^*, \text{ para cada } S \in 2^M,$$

onde $\bar{v}_{j_0}(S) = d_{j_0}^*$ sendo $d_{j_0}^*$ o óptimo do modelo (2.2).

Polo tanto $\bar{v}(S)$ pode interpretarse como a suma dos graos de eficiencia de cada *DMU* de S cando consideramos a coalición S . Vexamos agora que \bar{v} é un xogo superaditivo, e polo tanto baixo esta propiedade as *DMUs* teñen verdadeiros incentivos para cooperar.

Proposición 2.2. $\bar{v} \in SG(M)$, é dicir, para calquera $S, T \in 2^M$ con $S \cap T = \emptyset$ tense que $\bar{v}(S \cup T) \geq \bar{v}(S) + \bar{v}(T)$.

Demostración. Dada a definición da función característica que achegamos e sexan $S, T \in 2^M$, $S \cap T = \emptyset$,

$$\begin{aligned}\bar{v}(S) &= \sum_{j_0 \in S} \bar{v}_{j_0}(S) = \sum_{j_0 \in S} d_{j_0}^* \\ \bar{v}(T) &= \sum_{j_0 \in T} \bar{v}_{j_0}(T) = \sum_{j_0 \in T} d_{j_0}^* \\ \bar{v}(S \cup T) &= \sum_{j_0 \in S \cup T} \bar{v}_{j_0}(S \cup T) = \sum_{j_0 \in S \cup T} d_{j_0}^*,\end{aligned}$$

Notemos que cando en (2.2) quitamos xogadores dunha coalición o valor de $d_{j_0}^*$ mantense ou aumenta, pero nunca diminúe, xa que as únicas posibilidades cando quitamos un xogador e que non afecte a eficiencia relativa ou en caso de afectar faga ao noso DMU máis eficiente. Desta observación séguese que:

$$\sum_{j_0 \in S \cup T} d_{j_0}^* = \sum_{j_0 \in (S \cup T) \setminus T} d_{j_0}^* + \sum_{j_0 \in (S \cup T) \setminus S} d_{j_0}^* \quad (2.3)$$

$$\geq \sum_{j_0 \in S} d_{j_0}^* + \sum_{j_0 \in T} d_{j_0}^* \quad (2.4)$$

onde $\sum_{j_0 \in (S \cup T) \setminus T} d_{j_0}^*$ denota os sumando de $\sum_{j_0 \in S \cup T} d_{j_0}^*$ con j_0 pertencente a S , e $\sum_{j_0 \in (S \cup T) \setminus S} d_{j_0}^*$ aos demais sumandos de $\sum_{j_0 \in S \cup T} d_{j_0}^*$. Concluimos así que,

$$\bar{v}(S \cup T) \geq \bar{v}(S) + \bar{v}(T),$$

quedando probado o resultado. \square

2.2. Modificando o valor de Shapley

Nesta sección abordaremos o problema do reparto dos beneficios\custos xerados da cooperación de $DMUs$. Para iso, plantexaremos unha modificación do valor de Shapley.

Usando a función característica do xogo \bar{v} definimos o **valor de Shapley modificado** como segue,

Definición 2.3. Definimos o valor de Shapley modificado para calquera xogo $v \in G(M)$ como o vector $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_m(v))$ onde:

$$\varphi_{j_0}(v) = \sum_{S \in 2^M} \frac{s!(m-s-1)!}{m!} \cdot \frac{\sum_{j \in S} v_j(S \cup \{j_0\}) / \sum_{j \in S} v_j(S)}{v_{j_0}(S \cup \{j_0\}) / v_{j_0}(\{j_0\})}, \quad j_0 \notin S, \quad j_0 = 1, \dots, m.$$

Para entender esta fórmula, recordemos que a compoñente Φ_{j_0} do valor de Shapley era a media dos beneficios que aporta o xogador j_0 ao unirse a unha coalición de $M \setminus j_0$ supoñendo que a probabilidade de tódalas permutacións de M é a mesma, e notemos que a idea subxacente baixo esta fórmula é a mesma. Analicémola por partes, $\frac{s!(m-s-1)!}{m!}$ onde s é o número de elementos de S e m o cardinal de M , está formado polo numerador, que é o número de permutacións de S multiplicado polo número de permutacións dos elementos que non están en S e son distintos de j_0 , ou o que é o mesmo, son todas as posibles permutacións do orde de chegada para os cales j_0 entra a mesma coalición. Por outro lado o denominador non é máis ca o número de posibles ordes de chegada, i.e., as permutacións de M , polo tanto en conxunto este primeiro termo é unha ponderación para o termo da dereita. Ata aquí o valor de Shapley modificado coincide co que xa coñecemos, a diferenza está no termino que mide a contribución que fai o xogador j_0 ao unirse a coalición S . Este segundo termo está formado polo numerador

$$\frac{\sum_{j \in S} v_j(S \cup \{j_0\})}{\sum_{j \in S} v_j(S)},$$

que aporta unha medida de canto varía a función característica da coalición S cando a DMU_{j_0} entra ao grupo de observacións. Notemos que, pola natureza do modelo (2.2) sobre o que construímos a definición de v , canto máis eficiente sexa a DMU_{j_0} maior será o valor do numerador. E polo denominador

$$\frac{v_{j_0}(S \cup \{j_0\})}{v_{j_0}(\{j_0\})}$$

que nos dá unha referencia sobre a variación da función característica de j_0 cando entra na coalición. Notemos que $v_{j_0}(\{j_0\}) = 1$ xa que cando j_0 é a única DMU do grupo de observación a súa eficiencia relativa é trivialmente un. Polo tanto podemos reformular a expresión como segue:

$$\varphi_{j_0}(v) = \sum_{S \in 2^M} \frac{s!(m-s-1)!}{m!} \cdot \frac{\sum_{j \in S} v_j(S \cup \{j_0\}) / \sum_{j \in S} v_j(S)}{v_{j_0}(S \cup \{j_0\})}, \quad j_0 \notin S, \quad j_0 = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Observación 2.4. O valor de Shapley modificado susténtase sobre un obxectivo común ao valor orixinal, sen embargo non cumpre as propiedades que caracterizan ao valor de Shapley orixinal, cousa que resulta obvia xa que sabemos que Φ é a única función cumprindo tódalas condicións.

Presentaremos agora algúns exemplos extraídos de Yang et al. (2015), co fin de clarificar o método descrito anteriormente.

Exemplo 2.5. Sexa o problema DEA xurdido de 4 *DMUs*, cada unha delas cun único *input* e un único *output* (véxase o Cadro 2.1). A simple vista, parece que a *DMU* máis eficiente é a primeira, mentres que a cuarta parece a menos eficiente.

Mediante o modelo (2.2), calculamos o valor óptimo de eficiencia de cada *DMU* para cada coalición, obtemos así os valores do Cadro 2.2.

Finalmente calculamos o valor de Shapley e mostrámolo no Cadro 2.3

| DMU_j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|---|---|---|---|
| Entrada | 1 | 3 | 5 | 8 |
| Saída | 4 | 6 | 5 | 4 |

Cadro 2.1: Conxunto de observacións do Exemplo 2.5.

| Coalicións | 1 | 2 | 3 | 4 | Coalicións | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---|---|---|---|---------------------------|---|---|---|---|
| $S_1 = \{1\}$ | 1 | - | - | - | $S_9 = \{2, 4\}$ | - | 1 | - | 4 |
| $S_2 = \{2\}$ | - | 1 | - | - | $S_{10} = \{3, 4\}$ | - | - | 1 | 2 |
| $S_3 = \{3\}$ | - | - | 1 | - | $S_{11} = \{1, 2, 3\}$ | 1 | 2 | 4 | - |
| $S_4 = \{4\}$ | - | - | - | 1 | $S_{12} = \{1, 2, 4\}$ | 1 | 2 | - | 8 |
| $S_5 = \{1, 2\}$ | 1 | 2 | - | - | $S_{13} = \{1, 3, 4\}$ | 1 | - | 4 | 8 |
| $S_6 = \{1, 3\}$ | 1 | - | 4 | - | $S_{14} = \{2, 3, 4\}$ | - | 1 | 2 | 4 |
| $S_7 = \{1, 4\}$ | 1 | - | - | 8 | $S_{15} = \{1, 2, 3, 4\}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
| $S_8 = \{2, 3\}$ | - | 1 | 2 | - | | | | | |

Cadro 2.2: Valores óptimos de eficiencia para cada coalición do Exemplo 2.5.

| DMU_j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| $\varphi_j(v)$ | 2.333 | 0.917 | 0.375 | 0.146 |

Cadro 2.3: Valor de Shapley modificado para os datos do Exemplo 2.5.

Xa que $\varphi(v)$ non cumpre eficiencia, resulta obvio que non vai ser unha asignación para o noso problema. Recordemos que un valor f era eficiente se, para todo $v \in G(N)$,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N).$$

Con todo o valor de Shapley modificado si que reflexa racionalmente a contribución que cada *DMU* fai ao conxunto de *DMUs*. Polo tanto podemos usar o valor de Shapley modificado para crear unha asignación baseada na eficiencia das *DMUs* da seguinte maneira:

$$V = \left(\frac{\varphi_1(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)}, \dots, \frac{\varphi_i(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)}, \dots, \frac{\varphi_m(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)} \right). \quad (2.6)$$

O valor de Shapley, como regra de reparto, é amplamente utilizado nunha gran variedade de problemas que van dende o estudo do reparto do poder en parlamentos ata o reparto de custos en problemas de asignación. En particular, se supoñemos que o conxunto de xogadores debe repartir un total de R recursos, con $R > 0$, podemos plantexar a seguinte asignación baseada na normalización do valor de Shapley modificado.

$$V = \left(\frac{R\varphi_1(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)}, \dots, \frac{R\varphi_i(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)}, \dots, \frac{R\varphi_m(v)}{\sum_{j_0=1}^m \varphi_{j_0}(v)} \right),$$

Baixo este contexto está xustificada a súa aplicación.

Exemplo 2.6. Consideramos o problema do Exemplo 2.5 e calculamos a asignación de recursos (2.6) supoñendo que o total de recursos dos que se dispón é $R = 100$. Expoñemos os resultados no Cadro 2.4. O xogador 1 recibe mais ca o resto xa que é o que máis aporta as distintas coalicións.

| <i>DMU_j</i> | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|-------|-------|------|------|
| Asignación de recursos | 61.87 | 24.32 | 9.94 | 3.87 |

Cadro 2.4: Asignación de recursos para o Exemplo 2.5.

2.3. Coeficiente de Gini

Nesta sección pretendemos medir a equidade da asignación que acabamos de definir, para iso presentaremos o coeficiente de Gini.

O coeficiente de Gini foi proposto polo matemático italiano Gini (1921), co fin de medir a equidade. Unha primeira interpretación do coeficiente de Gini é a relacionada coa curva de Lorenz da cal se fala en Berne and Stiefel (1984). Primeiro definimos a curva de Lorenz.

Definición 2.7. A curva de Lorenz está formada polos puntos (x, y) , onde y é a proporción acumulativa de servizo recibido polo $x \cdot 100\%$ máis pobre da poboación (en termos de

servizo). A liña diagonal que conecta $(0,0)$ con $(1,1)$ é a curva de Lorenz para o caso de máxima equidade, e chamáremoslle liña de equidade.

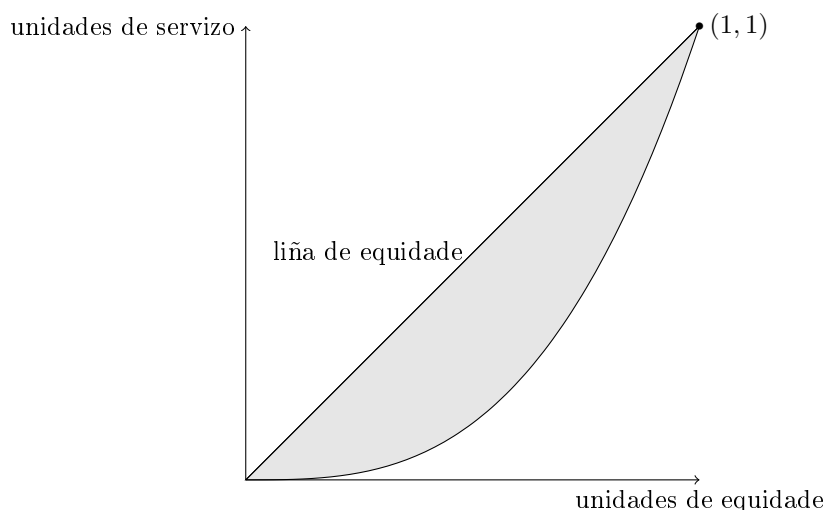


Figura 2.1: Ilustración da Curva de Lorenz.

Proporcionaremos agora unha definición do coeficiente de Gini baseándonos na definición da curva de Lorenz.

Definición 2.8. Defínese o **coeficiente de Gini** como a relación entre a área entre a curva de Lorenz e a liña de equidade, e a área total baixo a curva de equidade.

Dacordo coa Figura 2.3, a área sombreada correspondese coa área entre a curva de Lorenz e a liña de equidade. Notemos que canto máis se axuste a curva de Lorenz á liña de equidade, máis próximo a cero será o valor do coeficiente de Gini. Pola contra canto máis difira a curva de Lorenz da liña de equidade, máis próximo a un será o valor do coeficiente de Gini. Esta definición non é moi cómoda para traballar no noso modelo, por eso consideraremos unha expresión equivalente proposta en Mandell (1991).

Definición 2.9. Defínese $G \equiv$ **coeficiente de Gini** como

$$G = \frac{\sum_i \sum_{j>i} |q_j S_i - q_i S_j|}{\sum_i S_i},$$

onde

$$q_j = \frac{Q_j}{\sum_{j=1}^n Q_j},$$

e con S_i, Q_j unidades de servizo e unidades de equidade respectivamente.

Particularizando a definición anterior para o noso problema de asignación de recursos con m *DMUs* e R recursos (con $R > 0$). Temos que as unidades de servizo serán as asignacións dos recursos e as unidades de equidade serán as eficiencias relativas de cada *DMU* respecto ao conxunto de tódalas *DMUs*. É dicir

$$q_{j_0} = \frac{d_{j_0}^*}{\sum_{i=1}^m d_i^*},$$

onde $d_{j_0}^*$ é o óptimo do modelo (2.1). Entón o coeficiente de Gini queda

$$G = \frac{\sum_{j_0} \sum_{h>j_0} |q_h \frac{R\varphi_{j_0}}{\sum_{j_0} \varphi_{j_0}} - q_{j_0} \frac{R\varphi_h}{\sum_{j_0} \varphi_{j_0}}|}{R} = \frac{\sum_{j_0} \sum_{h>j_0} |q_h \varphi_{j_0} - q_{j_0} \varphi_h|}{\sum_{j_0} \varphi_{j_0}}$$

Dacordo co lado dereito da expresión anterior, obtívose unha fórmula aplicable en calquera problema DEA baixo a hipótese de cooperación independentemente de que se busque a asignación ou non de recursos.

Exemplo 2.10. Presentamos agora un exemplo máis complexo que usaremos para comparar a equidade da asignación (2.6) con outras asignacións. Os datos, extraídos de Cook et al. (1999), móstranse no Cadro 2.5. Supoñemos que a cantidade total de beneficios/costos é $R = 100$.

| DMU_j | Entrada 1 | Entrada 2 | Entrada 3 | Saída 1 | Saída 2 |
|------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|
| DMU_1 | 350 | 39 | 9 | 67 | 751 |
| DMU_2 | 298 | 26 | 8 | 73 | 611 |
| DMU_3 | 422 | 31 | 7 | 75 | 584 |
| DMU_4 | 281 | 16 | 6 | 70 | 665 |
| DMU_5 | 301 | 16 | 6 | 75 | 445 |
| DMU_6 | 360 | 29 | 17 | 83 | 1070 |
| DMU_7 | 540 | 18 | 10 | 72 | 457 |
| DMU_8 | 276 | 33 | 5 | 78 | 590 |
| DMU_9 | 323 | 25 | 5 | 75 | 1074 |
| DMU_{10} | 444 | 64 | 6 | 74 | 1072 |
| DMU_{11} | 323 | 25 | 5 | 25 | 350 |
| DMU_{12} | 444 | 64 | 6 | 104 | 1199 |

Cadro 2.5: Valores descritivos das 12 *DMUs* do exemplo de Cook et al. (1999), con tres *inputs* e dous *outputs*.

Utilizamos o modelo (2.1) para calcular a eficiencia relativa de cada DMU . Logo usando as expresións (2.5) e (2.6) calculamos o valor de Shapley modificado para o xogo \bar{v} e a cantidade de recursos que se lle asigna a cada DMU . Mostramos os resultados no Cadro 2.6.

| DMU_j | d_k^* | $\Phi_k(\bar{v})$ | Valor da asignación |
|------------|---------|-------------------|---------------------|
| DMU_1 | 1.32153 | 0.7743 | 7.5350 |
| DMU_2 | 1.08342 | 0.8889 | 8.6508 |
| DMU_3 | 1.33866 | 0.7728 | 7.5208 |
| DMU_4 | 1.00000 | 0.9304 | 9.0547 |
| DMU_5 | 1.00000 | 0.9325 | 9.0747 |
| DMU_6 | 1.04034 | 0.9049 | 8.8062 |
| DMU_7 | 1.16224 | 0.8392 | 8.1667 |
| DMU_8 | 1.00000 | 0.9311 | 9.0613 |
| DMU_9 | 1.00000 | 1.0745 | 10.457 |
| DMU_{10} | 1.20224 | 1.20224 | 8.0072 |
| DMU_{11} | 3.00000 | 0.4673 | 4.5471 |
| DMU_{12} | 1.00000 | 0.9370 | 9.1186 |

Cadro 2.6: Eficiencias das $DMUs$, asignación proposta polo valor de Shapley modificado e reparto da asignación de recursos.

Finalmente compararemos a equidade desta asignación alternativa con outras citadas na bibliografía utilizando o coeficiente de Gini como medida. As asignacións consideradas son as introducidas nos seguintes traballos:

- Beasley (2003), que só utiliza métodos DEA e propón un modelo máis xeral e flexible que os existentes ata a fecha.
- Li et al. (2008a), que propón unha asignación de recursos baseada en equilibrios de Nash (teoría de xogos non cooperativa) e métodos DEA.
- Li et al. (2008b), que tamén utiliza métodos DEA e teoría de xogos cooperativa.
- Lin (2011), que só utiliza métodos DEA para achegar unha asignación de recursos que reflexa a eficiencia relativa e mantén a eficiencia de cada DMU sen cambios.
- Li et al. (2013), que só utiliza métodos DEA para propoñer unha asignación que custos que fai a cada DMU eficiente.

- Yang et al. (2015), que presentamos neste capítulo e utiliza métodos DEA e teoría de xogos cooperativa.

No Cadro 2.7 mostramos os valores que toma o devandito coeficiente de Gini para cada asignación. Observamos que a asignación Yang et al. (2015), vista nestas páxinas, presenta o menor valor de tódolos coeficiente, polo tanto podemos concluír que a asignación de recursos tratada nestas páxinas é a máis xusta de tódalas que estamos comparando.

| Coeficiente de Gini | Asignación de Yang et al. (2015) | Asignación de Lin (2011) | Asignación de Beasley (2003) |
|---------------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| G | 0.2362 | 0.3230 | 0.3520 |
| | Asignación de Li et al. (2013) | Asignación de Li et al. (2008a) | Asignación de Li et al. (2008b) |
| G | 0.3801 | 0.2695 | 0.4227 |

Cadro 2.7: Comparativa do coeficiente de Gini para diferentes asignacións na literatura.

Capítulo 3

Rankings de DMUs eficientes

Neste capítulo proporemos un método alternativo para clasificar *DMUs*. A diferenza doutras propostas na literatura centrarémonos en establecer rankings das *DMUs* eficiente, xa que o seu grao de eficiencia non aporta ningún valor discriminante para este fin (é un para toda *DMU* eficiente). A idea é utilizar a variación que sofre o grao de eficiencia das *DMUs* ineficientes cando unha *DMU* eficiente abandona o grupo de observacións como indicador do potencial discriminante de cada *DMU*, para iso botaremos man dos conceptos da teoría de xogos TU que vimos no Capítulo 1. A principal referencia que se segue neste capítulo é Hinojosa et al. (2017).

Primeiramente definiremos o modelo que usaremos para calcular a eficiencia de cada *DMU*. Neste caso consideraremos un modelo análogo ao modelo (1.7) que está orientado nos datos dos *outputs*. Agora consideramos o problema orientado nos datos de *inputs*, polo que pasamos dun problema de maximización a un problema de minimización. Isto facémolo por comodidade pero os métodos descritos ao longo do capítulo son aplicables independentemente do modelo DEA que se considere para calcular a eficiencia.

Supoñamos un conxunto $M = \{1, 2, \dots, m\}$ composto por m *DMUs*, que consumen k entradas diferentes e producen h saídas diferentes, en cantidades x_{ij}, y_{rj} respectivamente, e denotemos por I, H aos conxuntos de entradas e saídas. Para medir a eficiencia da *DMU*, $j_0 \in M$ temos:

$$\begin{aligned}
E_{j_0}(M) &= \min h_{j_0}; \\
\text{suxeito a :} \\
\sum_{j=1}^m x_{ij} \lambda_j &\leq h_{j_0} x_{ij_0}, \quad \forall i \in I; \\
\sum_{j=1}^m y_{rj} \lambda_j &\geq y_{rj_0}, \quad \forall r \in H; \\
\lambda_j &\geq 0, \quad \forall j \in M,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

que desfacendo as desigualdades e engadindo as variables de folgura queda:

$$\begin{aligned}
E_{j_0}(M) &= \min h_{j_0} - \epsilon \left(\sum_{i \in I} s_{ij_0}^- + \sum_{r \in H} s_{rj_0}^+ \right); \\
\text{suxeito a :} \\
\sum_{j=1}^m x_{ij} \lambda_j &= h_{j_0} x_{ij_0} - s_{ij_0}^-, \quad \forall i \in I; \\
\sum_{j=1}^m y_{rj} \lambda_j &= y_{rj_0} + s_{rj_0}^+, \quad \forall r \in H; \\
\lambda_j, s_{rj_0}^+ &\geq 0, \quad \forall j \in M, \forall r \in H, \\
s_{ij_0}^- &\leq 0, \quad \forall i \in I,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde ϵ é unha constante non arquimediana. Recordemos que ϵ engádese co obxectivo de forzar á solución a priorizar aquelas solucións con variable de folgura distinta de cero en caso de varias solucións.

3.1. Medindo a cooperación das DMUs eficientes

A continuación proporemos un xogo TU no que o conxunto de xogadores serán as *DMUs* eficientes, co fin de medir os beneficios da cooperación entre elas.

Denotemos por N o conxunto de *DMUs* eficientes. Para cada coalición $T \in 2^M$, defínese $E_{j_0}(T)$ como a eficiencia da *DMU* $j_0 \in T$ cando o grupo de observación esta formado por T . Agora estamos en condicións de presentar a solución ao problema de clasificación de *DMUs* eficientes utilizando a teoría xogos cooperativos.

Sexa $M \setminus N$ o conxunto de *DMUs* ineficientes, e $S \in 2^N$ unha coalición de *DMUs* eficientes, tense que:

$$E_{j_0}(M \setminus N) \geq E_{j_0}((M \setminus N) \cup S),$$

e en particular cando S se une a coalición $M \setminus N$ o valor de eficiencia de j_0 diminúe en

$$E_{j_0}(M \setminus N) - E_{j_0}((M \setminus N) \cup S).$$

Polo tanto ten sentido definir os seguintes xogos:

Definición 3.1. Sexa N o conxunto de *DMUs* eficientes. Para cada $j \in M \setminus N$, definimos o xogo \hat{v}_j como,

$$\hat{v}_j(\emptyset) = 0 \text{ e } \hat{v}_j(S) = E_j(M \setminus N) - E_j((M \setminus N) \cup S), \text{ para cada } S \in 2^N.$$

Analogamente podemos definir uns xogos cuxas compoñentes da función característica midan canto aumenta a eficiencia de cada *DMU* ineficiente $j \in M \setminus N$ cando unha coalición de *DMUs* eficientes abandona o grupo de observacións. Así

Definición 3.2. Sexa N o conxunto de *DMUs* eficientes. Para cada $j \in M \setminus N$, definimos o xogo v_j^* como,

$$v_j^*(\emptyset) = 0 \text{ e } v_j^*(S) = E_j(M \setminus S) - E_j(M), \text{ para cada } S \in 2^N.$$

Ámbolos dous xogos serven para medir a cooperación das *DMUs* eficientes dende o punto de vista da *DMU* ineficiente j con dúas perspectivas diferentes. A continuación probase a relación dual entre ambos xogos, co obxectivo final de ver que de cara á clasificar *DMUs* eficientes utilizando o valor de Shapley, a perspectiva de \hat{v}_j e a de v_j^* son equivalentes.

Proposición 3.3. \hat{v}_j e v_j^* son xogos duais.

Demostración. Fixemos unha certa coalición $S \in 2^N$ de *DMUs* eficiente e denotemos por \hat{v}_j^d o xogo dual de \hat{v}_j . Entón,

$$\begin{aligned} \hat{v}_j^d(S) &= \hat{v}_j(N) - \hat{v}_j(N \setminus S) \\ &= (E_j(M \setminus N) - E_j((M \setminus N) \cup N)) - (E_j(M \setminus N) - E_j((M \setminus N) \cup (N \setminus S))) \\ &= (E_j(M \setminus N) - E_j(M)) - (E_j(M \setminus N) - E_j(M \setminus S)) \\ &= E_j(M \setminus S) - E_j(M) = v_j^*, \end{aligned}$$

quedando probado así o resultado. □

Logo, como xa vimos que o valor de Shapley é un valor autodual, temos que se utilizamos o valor de Shapley para clasificar as *DMUs* eficientes respecto a unha *DMU* ineficiente j , vamos a obter o mesmo ranking independentemente de cal dos dous enfoques anteriores se considere, xa que $\Phi(\hat{v}_j) = \Phi(v_j^*)$.

Sen embargo, non debemos facer a clasificación baseándonos só na sensibilidade que nos aporta unha única *DMU* ineficiente, debemos considerar a contribución de información que nos dan tódalas *DMUs*, con ese fin definimos os xogos cooperativos TU \hat{v} e v^* como a suma dos xogos asociados a cada *DMU* ineficiente anteriormente descritos:

Definición 3.4. Sexa N o conxunto de *DMUs* eficientes dun problema DEA. Definimos a función característica \hat{v} como,

$$\hat{v}(S) = \sum_{j \in M \setminus N} \hat{v}_j(S) = \sum_{j \in M \setminus N} (E_j((M \setminus N) \cup S)),$$

para cada $S \in 2^N$, sendo $\hat{v}(\emptyset) = 0$

Definición 3.5. Sexa N o conxunto de *DMUs* eficientes dun problema DEA. Definimos a función característica v^* como,

$$v^*(S) = \sum_{j \in M \setminus N} v_j^*(S) = \sum_{j \in M \setminus N} (E_j(M \setminus S) - E_j(M)),$$

para cada $S \in 2^N$, sendo $v^*(\emptyset) = 0$

Obviamente \hat{v} e v^* son xogos duais un do outro, xa que o son cada termo da suma, \hat{v}_j e v_j^* . O valor de Shapley é o mesmo para ambos xogos e polo tanto tamén se obtén o mesmo ranking independentemente do xogo considerado. Noutras palabras, de cara aos nosos obxectivos ambos xogos son totalmente equivalentes.

Observación 3.6. Nótese que a aditividade do valor de Shapley, tratada na Definición 1.16, é clave para contar a ineficiencia descuberta para tódalas *DMU*.

Observación 3.7. Non se teñen en conta as variacións das *DMUs* eficientes porque estas valen sempre cero xa que o valor dunha *DMU* eficiente é un, independentemente das *DMUs* consideradas na mostra.

A idea de achegar un ranking DEA mediante a teoría de xogos cooperativos ten sentido porque en DEA o conxunto factible ou conxunto de posibilidades de produción infírese dos datos iniciais, xa que por hipótese é combinación convexa dos mesmos, entón pode pensarse como un esforzo cooperativo entre as diferentes *DMUs*. A intención de cooperar das *DMUs*, ou empresas para que a explicación sexa máis clara, está implícita, xa que de non quere cooperar bastaría con que mantivesen os datos en privado. Como en tódolos

xogos TU hai unha cantidade determinada de recursos transferibles entre as empresas, neste caso os recursos totais ($\hat{v}(N) = v^*(N)$) son a cantidade de ineficiencia que se descubre quitando ou engadindo conxuntos de *DMUs* eficientes. O valor de Shapley proporciónanos unha asignación de recursos en base a ineficiencia que descubre cada *DMU* eficiente, o que graficamente equivale a sensibilizar o impacto que ten cada *DMU* sobre a fronteira eficiente. Vexamos por exemplo a transformación que sofre a fronteira eficiente da Figura 3.3 á Figura 3.4.

A continuación veremos un dos exemplos de Hinojosa et al. (2017) no cal se clasificarán *DMUs* eficientes co método explicado unhas páxinas antes, e comparárase o ranking obtido con outro especificado en Li et al. (2016) mediante a correlación de Spearman. Está última é un análogo a correlación de Pearson pero en vez de traballar con variables continuas, traballa con variables ordinarias resultantes da súa ordenación. A interpretación, en esencia, é a mesma. A correlación de Spearman toma valores entre -1 e 1 , para valores próximos a cero non hai correlación lineal, para valores próximos a 1 a correlación lineal é positiva e para valores próximos a -1 a correlación lineal é negativa. A fórmula para obter a correlación de Spearman é:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_i p_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

onde $i \in N$ con $N = \{1, \dots, n\}$ sendo n o número de datos que se clasifican e p_i é a diferenza entre os postos que se lle asignan a cada dato en cada clasificación.

Como xa comentamos, antes de que en Hinojosa et al. (2017) propuxese o ranking tratado nestas páxinas, xa se utilizara a teoría de xogos para crear clasificacións de *DMUs* eficientes como por exemplo en Li et al. (2016), onde se utiliza o concepto de súper-eficiencia como discriminante entre *DMUs* eficientes. No seguinte exemplo calcularanse os dous rankings e comparáranse.

Exemplo 3.8. Considérase unha mostra M con $m = 6$ *DMUs* independentes, con cadanseus dous datos de entrada e cunha saída común igual a 1. Temos que $N = \{A, B, C, D\}$ son as *DMUs* eficiente da mostra e $\{E, F\}$ son as ineficiente. Representamos estes datos no Cadro 3.1. Na Figura 3.1 está representada a fronteira eficiente para o conxunto das 6 *DMUs*, e tamén as proxeccións de E e F sobre a mesma, E^0 e F^0 respectivamente .

Vamos a ver agora un precedente ao modelo de Hinojosa et al. (2017) na utilización da teoría de xogos cooperativos para a clasificación de *DMUs* eficientes. En Li et al. (2016) a función característica elixida para medir a cooperación entre as *DMUs* basease no concepto de súper-eficiencia. Entón considérase un xogo cooperativo TU (N, v') , onde

| <i>DMUs</i> | x_{1j} | x_{2j} | y_j | $E_j(M)$ |
|-------------|----------|----------|-------|----------|
| A | 1 | 8 | 1 | 1.00 |
| B | 2 | 4 | 1 | 1.00 |
| C | 4 | 2 | 1 | 1.00 |
| D | 8 | 1 | 1 | 1.00 |
| E | 5 | 5 | 1 | 0.60 |
| F | 3 | 10 | 1 | 0.55 |

Cadro 3.1: Datos exemplo 1

a función característica é

$$v'(S) = \sum_{j \in S} (E_j(M \setminus S) - 1).$$

e os xogadores son $N = \{A, B, C, D\}$, é dicir as *DMUs* eficientes.

O obxectivo desta función é medir a súper-eficiencia das *DMUs* eficientes extraídas da mostra, para que se vexa máis claramente, observemos a Figura 3.2, na cal esta representada a fronteira eficiente cando $S = \{B, C\}$. Vemos que B e C están a esquerda da fronteira eficiente, o cal quere dicir que con menos entradas producen tamén 1 unidade de saída, sen embargo isto significa que están superando a eficiencia das súas proxeccións sobre a fronteira eficiente, B^1 e C^1 . A diferenza entre a eficiencia de B e C con respecto a B^1 e C^1 é o que se define en Li et al. (2016) como súper-eficiencia, e tamén é xustamente o que mide a función característica que se describe nese traballo. En particular para o caso representado na Figura 3.2:

$$v'(S) = (E_B(M \setminus S) - 1) + (E_C(M \setminus S) - 1) = (1,5 - 1) + (1,5 - 1) = 1$$

| S | $v'(S)$ | S | $v'(S)$ | S | $v'(S)$ |
|------------|---------|------------|---------|------------------|---------|
| $\{A\}$ | 1 | $\{A, C\}$ | 1.25 | $\{A, B, C\}$ | 3.53 |
| $\{B\}$ | 0.25 | $\{A, D\}$ | 2 | $\{A, B, D\}$ | 3.7 |
| $\{C\}$ | 0.25 | $\{B, C\}$ | 1 | $\{A, C, D\}$ | 4 |
| $\{D\}$ | 1 | $\{B, D\}$ | 1.25 | $\{B, C, D\}$ | 6.1 |
| $\{A, B\}$ | 2.7 | $\{C, D\}$ | 4 | $\{A, B, C, D\}$ | 8.44 |

Cadro 3.2: Función característica para o método considerado en Li et al. (2016).

No Cadro 3.2 está o valor que toma a función característica de Li et al. (2016) para cada subconxunto $S \in 2^N$. Unha vez calculada a función característica para cada un destes

subconxuntos é sinxelo calcular o valor de Shapley e así obter unha clasificación para os xogadores. O ranking obtivo está representado no Cadro 3.3.

| $DMUs$ | Valor de Shapley para v' | Clasificación |
|---------|----------------------------|---------------|
| $\{A\}$ | 1.6246633 | 4 |
| $\{B\}$ | 1.90496633 | 3 |
| $\{C\}$ | 2.221633 | 2 |
| $\{D\}$ | 2.69318182 | 1 |

Cadro 3.3: Ranking das $DMUs$ obtivo polo método descrito en Li et al. (2016).

Agora calculemos o ranking de Hinojosa. Para o caso $S = \emptyset$ a mostra está formada tan só polas $DMUs$ ineficientes. Representátese ese caso no Cadro 3.3, e como vemos tanto E coma F son eficientes baixo a mostra considerada. Canto máis eficientes sexan os $DMUs$ pertencentes a S máis se aproximará a fronteira eficiente modificada a súa auténtica forma, e ademais máis se aproximará a puntuación da eficiencia modificada ao seu auténtico valor.

Para o caso $S = \{B, C\}$, exposto no Cadro 3.4, vemos que as novas proxeccións de E e F sobre a fronteira eficiente, E^2 e F^2 , están máis próximas a E^0 e F^0 , en particular para o DMU ineficiente E é a mesma e polo tanto a eficiencia de E , cando se considera a mostra completa e cando se considera a mostra sen A e D , é a mesma (0,6). A eficiencia de F para a mostra modificada non é a mesma, é lixeiramente máis eficiente, en concreto é (0,67). Polo tanto,

$$\hat{v}(S) = (1 - 0,6) + (1 - 0,67) = 0,4 + 0,33 = 0,73.$$

No Cadro 3.4 mostramos o valor das funcións características para cada coalición de $DMUs$, e no Cadro 3.5 o valor de Shapley e a clasificación baseada nel. Finalmente cunhas sinxelas contas obtemos que $\rho = -0.4$ polo que de existir correlación lineal será negativa e débil. Isto débese a que unha clasificación basease na súper-eficiencia das $DMUs$ eficientes e a outra en como as $DMUs$ eficientes afectan a eficiencia das $DMUs$ ineficientes.

| | | | | | | | | |
|------------|--------------|----------|------------|--------------|----------|------------------|--------------|----------|
| S | $\hat{v}(S)$ | $v^*(S)$ | S | $\hat{v}(S)$ | $v^*(S)$ | S | $\hat{v}(S)$ | $v^*(S)$ |
| $\{A\}$ | 0.2857 | 0.1212 | $\{A, C\}$ | 0.7084 | 0.1879 | $\{A, B, C\}$ | 0.8545 | 0.8545 |
| $\{B\}$ | 0.5354 | 0.1462 | $\{A, D\}$ | 0.4077 | 0.1212 | $\{A, B, D\}$ | 0.7879 | 0.6101 |
| $\{C\}$ | 0.2424 | 0.0606 | $\{B, C\}$ | 0.7374 | 0.4468 | $\{A, C, D\}$ | 0.7084 | 0.3212 |
| $\{D\}$ | 0 | 0 | $\{B, D\}$ | 0.6667 | 0.1462 | $\{B, C, D\}$ | 0.7374 | 0.5688 |
| $\{A, B\}$ | 0.6545 | 0.6101 | $\{C, D\}$ | 0.2424 | 0.2 | $\{A, B, C, D\}$ | 0.8545 | 0.8545 |

Cadro 3.4: Funcións características para o xogo considerado en Hinojosa et al. (2017).

| $DMUs$ | Valor de Shapley para \hat{v} | Clasificación |
|--------|---------------------------------|---------------|
| A | 0.24332088 | 2 |
| B | 0.38152642 | 1 |
| C | 0.19730925 | 3 |
| D | 0.03238889 | 4 |

Cadro 3.5: Proposta de ranking utilizando o método descrito en Hinojosa et al. (2017).

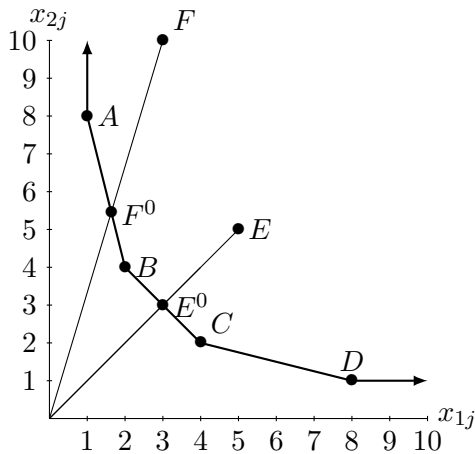


Figura 3.1: Fronteira eficiente considerando a mostra M .

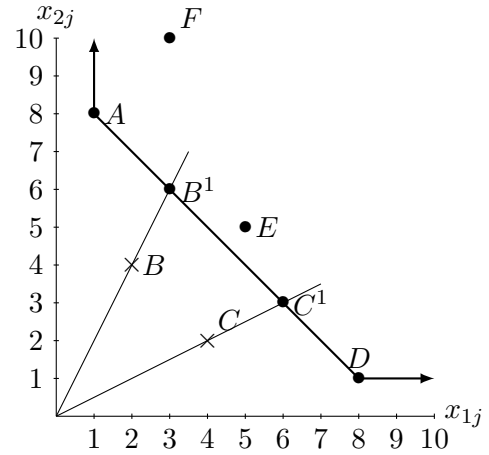


Figura 3.2: Fronteira eficiente considerando a mostra $M \setminus \{B, C\}$.

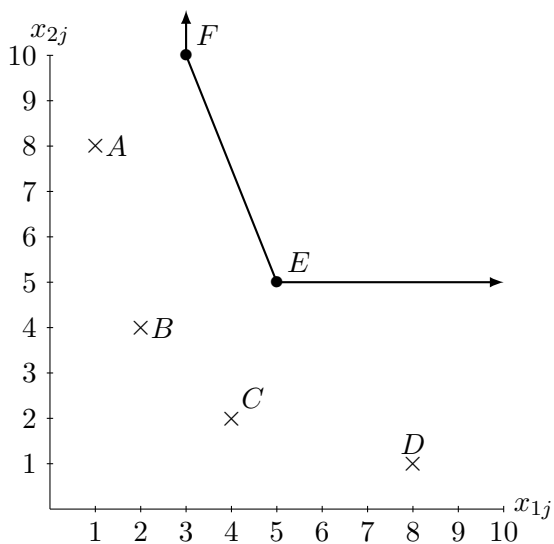


Figura 3.3: Fronteira eficiente considerando a mostra $M \setminus N$.

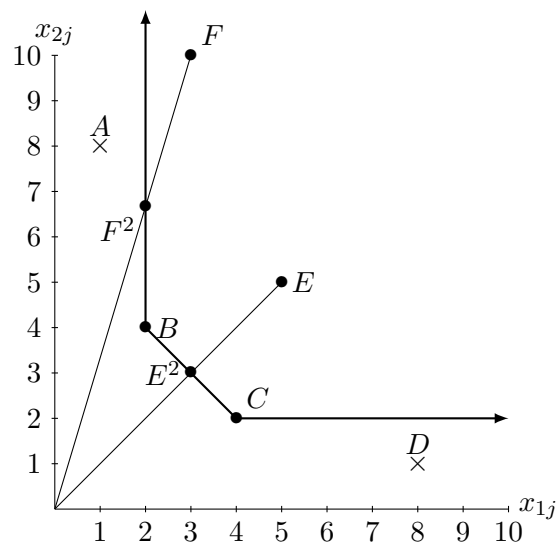


Figura 3.4: Fronteira eficiente considerando a mostra $(M \setminus N) \cup \{B, C\}$.

Capítulo 4

Aplicación ao sector hoteleiro

O obxectivo deste último capítulo é ilustrar as utilidades dos métodos DEA. En concreto, aplicaranse as diferentes metodoloxías sobre o caso real do sector hoteleiro en España trala crise da COVID-19, que foi presentado na introdución.

A avaliación da eficiencia de *DMUs* funciona especialmente ben no contexto das agrupación sen ánimo de lucro, como sistemas públicos de educación ou de sanidade, pero tamén ten múltiples aplicacións noutras areas como a economía e a enxeñería. Un exemplo é o programa *Follow Through* sobre o que se discute en Rhodes (1978) que trata de medir a eficiencia de varios colexios de Estados Unidos utilizando como *outputs* parámetros como as habilidades matemáticas ou as habilidades psicomotrices dos alumnos, que son facilmente medibles mediante probas escritas ou físicas, e como *inputs* datos como o número de profesores ou as horas dunha determinada materia.

A metodoloxía DEA tamén ten moito interese no ámbito económico e máis despois de achegarlle a teoría de xogos cooperativos. Sen embargo no sector privado aparecen algunhas dificultades como por exemplo, cando supoñemos liberdade para intercambiar recursos entre empresas moi afastadas. Nestes casos requiriríase da introdución de prezos ou outros medios de ponderación para avaliar alternativas que doutra forma non serían comparables. Con todo as aplicación da metodoloxía DEA abranguen dende a enxeñería de combustibles ata a política, facendo da DEA un dos métodos de investigación operativa máis estudados nos últimos anos.

Agora recordemos o contexto do problema que se expón na introdución deste traballo. España é unha potencia turística a nivel mundial, unha mostra do seu potencial e que no 2019 recibiu 83.7 millóns de viaxeiros, dos cales 4.3 eran internacionais, ademais o sector turístico en España representa un 12 % do PIB (Produto Interior Bruto). É por todos sabido que o sector hoteleiro está a sufrir unha das crises máis fortes da súa historia por mor da COVID-19, xa que durante meses as fronteiras entre países, e mesmo entre comunidades de

España, permaneceron pechadas. As restricións impostas polo goberno seguiron afectando negativamente á industria incluso unha vez relaxadas as medidas adoptadas. Un claro exemplo desta situación é o acontecido en Santiago de Compostela. A súa economía depende fortemente da chegada de peregrinos que fan o Camiño de Santiago e, igual que outros destinos turísticos ben coñecidos, sufriu o impacto desta crise sanitaria. Outro exemplo é a comunidade das Illas Canarias, que é un dos grandes afectados, xa que nos últimos anos o sector turístico representou entre un 35 % e un 40 % do PIB en Canarias.

Neste contexto podemos pensar na posibilidade de cooperación entre membros do sector hoteleiro, para intentar minimizar resgos económicos e aumentar á súa vez a competitividade. Existe unha infinita variedade de medidas que se poderían adoptar nesta situación, a cooperación entre comunidades autónomas é unha delas. Ademais, a agrupación de membros da industria hoteleira por rexións está xustificada, xa que axentes dunha mesma comunidade terán en común factores tales como o tempo, as fechas do ano con maior afluencia ou a facilidade para transportar recursos entre eles. A continuación combinaremos a metodoloxía DEA cos enfoques da teoría de xogos cooperativos presentados neste traballo para encontrar aquela rexión que máis contribúe á eficiencia do sistema hoteleiro, e crear a partir deste estudo un ranking das autonomías baseado na eficiencia.

Os elementos do problema DEA asociados a esta situación real son os seguintes. Primeiro ao conxunto de *DMUs* denotarémolo como M , este está formado por 17 comunidades autónomas e dúas cidades autónomas (Ceuta e Melilla). No Cadro 1 proporcionase unha medida da capacidade anual da industria hoteleira en España no 2019. Os datos de entrada teñen como obxectivo medir o potencial da industria hoteleira en cada comunidade. De maneira natural, escollemos a cantidade media mensual de hoteis abertos, a cantidade media mensual de camas dispoñibles e o número medio de traballadores en activo. Os datos de saída son os encargados de medir o grao de produtividade obtida cos recursos dispoñibles. Neste caso, a cantidade media mensual de persoas que de hospedan nalgún hotel, a media mensual de noites de estancia e a media mensual de camas ocupadas poden ser vistas como resultado da xestión hoteleira. Cada rexión (*DMU*) xestiona os seus recursos co obxectivo de promover o turismo, por iso é interesante comparar como de eficiente é en comparación ao resto.

Durante o estudo que faremos destes datos vamos calcular a eficiencia relativa para cada rexión. Veremos que, comunidades que a priori podíamos pensar que eran as máis eficientes, como poden ser Cataluña ou Andalucía, que son das que teñen unha maior capacidade, non van a formar parte do noso conxunto eficiente. Representamos, entre outros, os datos da media mensual de hoteis abertos no 2019 utilizando \mathbf{R} na Figura 4.1. Dacordo co descrito no Capítulo 3, plantexaremos o ranking correspondente sobre un exemplo realista.

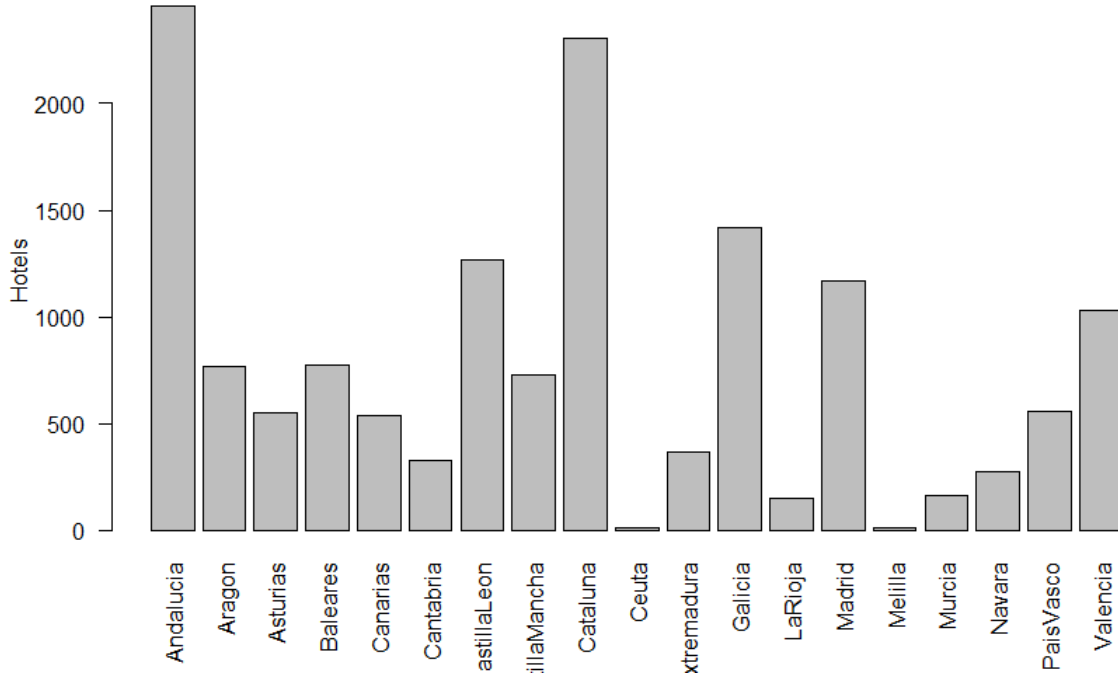


Figura 4.1: Diagrama de barras do datos *Hotels* por rexións.

Para os cálculos botaremos man do entorno de software libre **R** e do código especificamente creado para este fin e que pode consultarse no Apéndice A. Resolvendo o problema (3.1) mediante o uso do paquete **lpSolveAPI** obtemos a eficiencia relativa para cada *DMU*. Os resultados obtidos móstranse no Cadro 4.1. Como xa comentabamos no Capítulo 3, esta clasificación non distingue entre as *DMUs* eficientes. Por esa razón, asignalles a todas elas o posto medio, neste caso 2.5.

A continuación, abordaremos o problema de ordenar as *DMUs* eficientes. Para iso utilizaremos o paquete **CoopGame** de **R**, para máis detalle consultar Apéndice A. A vista dos resultados,

$$N = \{\text{Illas Baleares, Canaria, Comunidade Valenciana e Comunidade de Madrid}\},$$

é o noso conxunto de *DMUs* eficientes, sempre e cando as variables de folgura sexan cero. Por simplificar a notación vamos denotalas como A, B, C e D respectivamente. Agora calculamos o valor da función característica do xogo \hat{v} para cada coalición de xogadores de N . Para isto utilizamos a función **createBitMatrix()** do paquete **CoopGame**, que xera unha matriz con todas as posibles coalicións de S , e resolvemos o problema (3.1) para

| Rexión | Eficiencia | Clasificación |
|-----------------------------|------------|---------------|
| Andalucía | 0.86858 | 11 |
| Estremadura | 0.73014 | 19 |
| Aragón | 0.95428 | 6 |
| Galicia | 0.75457 | 17 |
| Principado de Asturias | 0.78051 | 16 |
| Comunidade de Madrid | 1.00000 | 2.5 |
| Illas Baleares | 1.00000 | 2.5 |
| Rexión de Murcia | 0.85143 | 13 |
| Canarias | 1.00000 | 2.5 |
| Comunidade Foral de Navarra | 0.83709 | 14 |
| Cantabria | 0.80268 | 15 |
| País Vasco | 0.97983 | 5 |
| Castela e León | 0.88999 | 10 |
| A Rioxa | 0.85473 | 12 |
| Castela A Mancha | 0.94368 | 9 |
| Ceuta | 0.95249 | 8 |
| Cataluña | 0.95315 | 7 |
| Melilla | 0.74557 | 18 |
| Comunidade Valenciana | 1.00000 | 2.5 |

Cadro 4.1: Eficiencia de cada comunidade obtida mediante un modelo DEA.

cada $j_0 \in M \setminus N$ e para cada grupo de referencia $(M \setminus N) \cup S$ con S cada unha das posibles coalicións de $N, S \in 2^N$. Obtemos así os $E_{j_0}((M \setminus N) \cup S)$ necesarios para calcular os valores $\hat{v}(S)$. Os datos obtidos representábase no Cadro 4.2.

| S | $\hat{v}(S)$ | S | $\hat{v}(S)$ | S | $\hat{v}(S)$ |
|------------|--------------|------------|--------------|------------------|--------------|
| $\{A\}$ | 5.3408942 | $\{A, C\}$ | 5.4485277 | $\{A, B, C\}$ | 6.1394056 |
| $\{B\}$ | 5.8221115 | $\{A, D\}$ | 6.4926592 | $\{A, B, D\}$ | 7.1835372 |
| $\{C\}$ | 1.1340882 | $\{B, C\}$ | 5.9814303 | $\{A, C, D\}$ | 6.5805037 |
| $\{D\}$ | 0.9998564 | $\{B, D\}$ | 6.8423313 | $\{B, C, D\}$ | 7.0388736 |
| $\{A, B\}$ | 6.0317721 | $\{C, D\}$ | 2.1468712 | $\{A, B, C, D\}$ | 7.2713817 |

Cadro 4.2: Función característica do xogo \hat{v} para as distintas $DMUs$.

Finalmente co comando `shapleyvalue()`, que ten como argumento o vector dos valores que toma a función característica en cada posible coalición de N , calculamos o valor de Shapley e obtemos a clasificación das *DMUs* eficientes en base a él. Presentamos os resultados no Cadro 4.3.

| Rexión | Valor de Shapley | Clasificación |
|-----------------------|------------------|---------------|
| Illas Baleares | 2.6391603 | 2 |
| Canarias | 3.0994518 | 1 |
| Comunidade Valenciana | 0.4559821 | 4 |
| Comunidade de Madrid | 1.0767875 | 3 |

Cadro 4.3: Valor de Shapley e clasificación das *DMUs* eficientes.

Tal e como comentamos, o uso deste tipo de solucións non é exclusivamente aplicable ao problema de ordenar *DMUs*. Podense usar noutros contextos, como o de asignación de recursos. Imaxinemos entón que o goberno aproba certas políticas co fin de reactivar a economía do sector hoteleiro, pero non dispón dos recursos necesarios inmediatamente, senón que os vai conseguindo mes a mes. Unha solución xusta pasaría por priorizar aquelas comunidades con un sector hoteleiro máis eficiente en termos do DEA. Ademais dentro das eficientes o ranking de Hinojosa et al. (2017) distingue entre aquelas que teñen un maior impacto sobre a fronteira eficiente, recordemos que as *DMUs* ineficientes proxéctanse sobre a fronteira eficiente dando así lugar a puntos que representaan os *inputs* e os *outputs* que terían as *DMUs* ineficientes se fosen eficientes. Visto en termos de competitividade, canto maior sexa a mellora na fronteira eficiente máis alto estará o listón para o resto de comunidades, que cando reciban a axuda poden tomar como referentes as rexión máis eficientes e aprender da súa xestión. Polo tanto a clasificación de Hinojosa et al. (2017) apórtanos un orde lóxico no que ir dando as axudas. Desta forma, a primeira partida de diñeiro será para Canarias, que actuará como referente para o resto de comunidades. En contraposición, destaca o feito da Comunidade Valenciana en última posición.

A asignación de recursos plantexada no Capítulo 2 tamén é aplicable a estes datos, xa que as veces interesa máis ofrecer solucións ecuanimes para evitar o malestar xeneral. Neste contexto de crise, a chegada de fondos europeos destinados a axudas ó sector turístico, pode plantexar un novo problema á hora de repartilos entre as comunidades autónomas. Por exemplo, os procedementos derivados do valor de Shapley modificado poden ser aplicados para este fin. Sen embargo, encontrámonos co problema computacional do cálculo exacto do valor de Shapley xa que o número de coalicións a avaliar é suficientemente alto ($2^{19} - 1$)

no caso de Yang et al. (2015). Aínda que queda fóra dos nosos obxectivos cabe destacar a existencia de procedementos de mostraxe estatística para a súa aproximación. (ver o traballo de Castro et al. 2009).

Capítulo 5

Conclusións

O obxectivo deste traballo é presentar un ranking de *DMUs* baseado en problemas DEA e teoría de xogos cooperativos. En certos contextos, é lóxico plantexarse a cooperación entre as distintas *DMUs* que se avalían en un problema *DEA*. Ademais, ao longo do traballo fíxose mención aos puntos fortes e débiles do método, así como a algunhas das áreas nas que é de interese como a economía, a enxeñería, ou a política. Tamén presentamos un exemplo real no que, tanto a clasificación de *DMUs* eficientes como a asignación baseada en DEA e teoría de xogos cooperativos, resultan de interese.

Cabe destacar que os métodos anteriormente descritos son aplicables independentemente do modelo DEA utilizado para calcular as eficiencias das *DMUs*. Ademais, nótese que quedan abertas moitas posibilidades que combinan a teoría de xogos coa DEA, como pode ser considerar outra solución dos xogos cooperativos distinta ao valor de Shapley como pode ser o *nucleolus* ou o τ – *valor*, asignacións específicas do núcleo, ou incluso tomando un enfoque dende a teoría de xogos non cooperativos, como xa se fixo en Li et al. (2008a), considerando por exemplo os equilibrios de Nash como solucións. Toda esta rama da investigación operativa está actualmente en pleno desenvolvemento e cada ano publícanse novos artigos relacionados con ela debido a súa versatilidade. Cabe destacar que estas metodoloxías de clasificación xustifican, en paralelo, a definición de regras de reparto de recursos en contextos DEA, garantindo un enfoque equitativo das asignacións resultantes. Sen embargo, aqueles problemas computacionais xurdidos para o computo de solucións en problemas con un gran número de *DMUs* non foron aínda abordados.

Apéndice A

Código R

Co fin de obter os resultados numéricos necesarios para moitos dos cálculos deste traballo, achegamos neste capítulo unhas liñas de código programadas en R.

A.1. Funcións de R

Primeiro definimos unha función de R que permite identificar, dentro dun conxunto de *DMUs*, aquelas que son eficientes. É importante recordar que, ademais dunha eficiencia igual a 1, as variables de folgura asociadas ao problema de optimización resultante deben ser igual a cero.

```
#Cálculo de DMUs eficientes
DMUsEficientes<-function(A,numero_inputs,numero_outputs){

m<-nrow(A)
n<-ncol(A)
Sol<-rep(0,n)
eficientes<-rep(0,n)
z<-c(rep(0,n),1)#coef. función objetivo
for (j_0 in 1:n) {#DMU que estamos a avaliar
A_mod<-cbind(A,c(-1*A[1:numero_inputs,j_0],c(rep(0,numero_outputs))))
n_mod<-length(A_mod[1,])
b<-c(rep(0,numero_inputs),A[numero_inputs+1:numero_outputs,j_0])
lprec <- make.lp(0, n_mod)
set.objfn(lprec, z)
for (i in 1:numero_inputs) {
```

```

add.constraint(lprec, A_mod[i,], "<=", b[i])
}
for (i in (numero_inputs+1):m) {
add.constraint(lprec, A_mod[i,], ">=", b[i])
}
solve(lprec)
Sol[j_0]<-get.objective(lprec)
if (get.objective(lprec)>0.9999){#Son candidatas a eficientes, veamos que
#as variables de folgura valen cero

if ( length(which(abs(A_mod%*%get.variables(lprec)-b)<0.0001))==6){
eficientes[j_0]<-1
}
}

}
Sol
N<-which(eficientes==1)

N
return(N)
}

```

Definimos tamén unha función que nos devolve o valor da función característica do xogo \hat{v} definida na Definición 3.4 para cada coalición do conxunto N de $DMUs$ eficientes.

```

FuncionCaracteristica<-function(A,numero_inputs,numero_outputs,N){

#Agora debemos calcular a función característica para cada S
#subconxunto de N, 2^4 subconxuntos(un é o vacio).
#Creo un vector no que gardar v(S)
m<-nrow(A)
n<-ncol(A)
numero_eficientes<-length(N)
v_S<-rep(0,2^numero_eficientes-1)

```

```

#Definimos o modelo sen os DMUs eficientes e resolvemolo

A_sinN<-A[,-N]
z<-c(rep(0,(n-numero_eficientes)),1)
aux=0
for (j_0 in 1:(n-numero_eficientes)) {#DMU que estamos a avaliar
A_mod<-cbind(A_sinN,c(-1*A[1:numero_inputs,j_0],c(rep(0,numero_outputs))))
n_mod<-length(A_mod[1,])
b<-c(rep(0,numero_inputs),A[numero_inputs+1:numero_outputs,j_0])
lprec <- make.lp(0, n_mod)
set.objfn(lprec, z)
for (i in 1:numero_inputs) {
add.constraint(lprec, A_mod[i,], "<=", b[i])
}
for (i in (numero_inputs+1):m) {
add.constraint(lprec, A_mod[i,], ">=", b[i])
}
solve(lprec)
aux=aux+get.objective(lprec)
}
E_jMN<-aux
subconjuntos<-createBitMatrix(4)[,1:4]
indice<-0
aux<-0
#Calculamos a diferenza da eficiencia das comunidades ineficientes
#cando extraemos o subconjunto S da mostra
for (k in 1:(2^4-1)){
S<-subconjuntos[k,]*N
z<-c(rep(0,(n-numero_eficientes+length(which(subconjuntos[k,]!=0))))),1)
for (j_0 in 1:(n-numero_eficientes)) {
#DMU que estamos a avaliar (só ineficientes)
A_mod<-cbind(A_sinN,A[,S])
A_mod<-cbind(A_mod,c(-1*A[1:numero_inputs,j_0],c(rep(0,numero_outputs))))
n_mod<-length(A_mod[1,])
b<-c(rep(0,numero_inputs),A[numero_inputs+1:numero_outputs,j_0])

```

```

lprec <- make.lp(0, n_mod)
set.objfn(lprec, z)
for (i in 1:numero_inputs) {
  add.constraint(lprec, A_mod[i,], "<=", b[i])
}
for (i in (numero_inputs+1):m) {
  add.constraint(lprec, A_mod[i,], ">=", b[i])
}
solve(lprec)
aux<-aux+get.objective(lprec)
}
indice<-indice+1
v_S[indice]<-E_jMN-aux
aux<-0
}
#función característica para cada subconjunto de DMU's eficientes
return(v_S)
}

```

A.2. Exemplo de uso

A continuación, ilustramos o uso das funcións aquí descritas sobre o exemplo do sector hoteleiro en España. Antes da avaliación dos procedementos propostos, compre cargar os datos do sector hoteleiro español e os paquetes necesarios.

```

#install.packages("lpSolve")
#install.packages("lpSolveAPI")
#install.packages("CoopGame")
#install.packages("rgl")
#install.packages("geometry")
#install.packages("rcdd")
library(rgl);
library(geometry);
library(rcdd);

## If you want correct answers, use rational arithmetic.

```

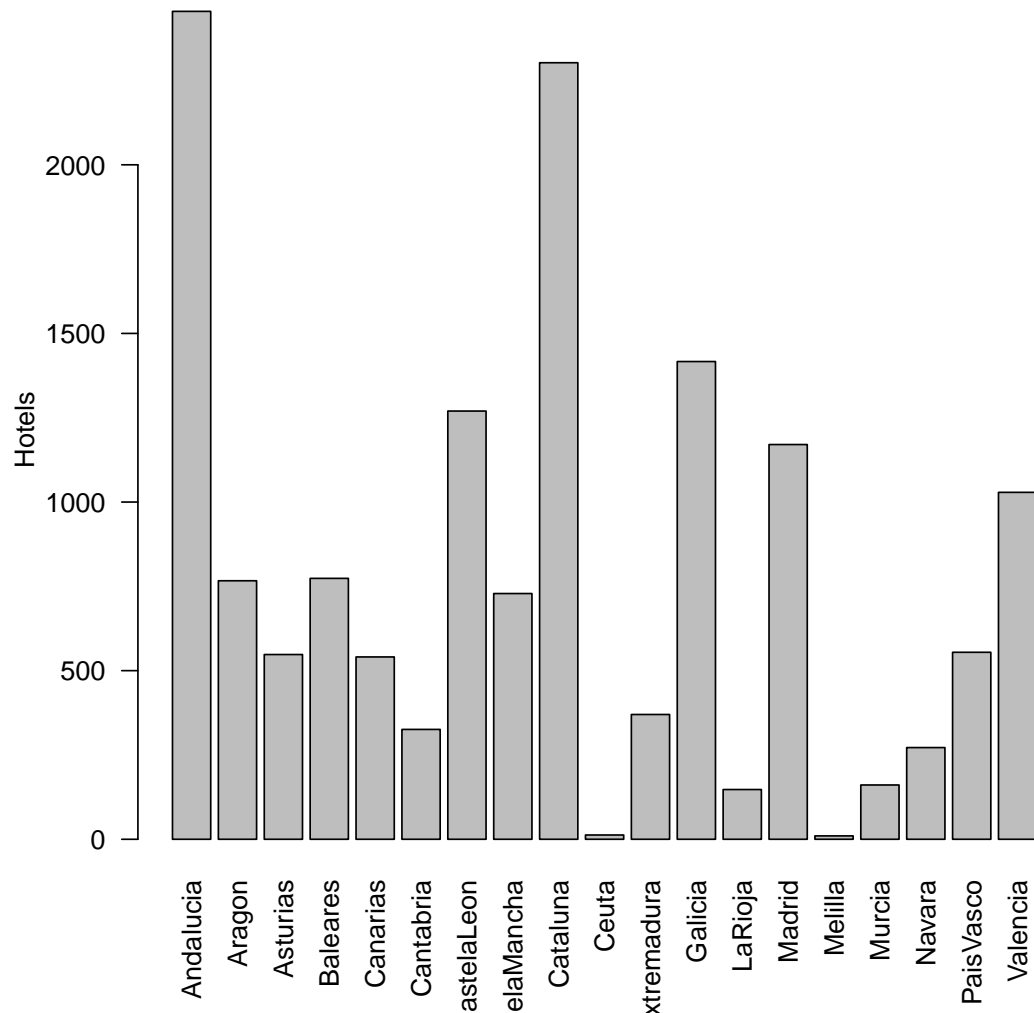
```
## See the Warnings sections added to help pages for
##     functions that do computational geometry.

library(lpSolveAPI);
library("lpSolveAPI", character.only=TRUE);
library("CoopGame");

#Cargamos os datos
datos<-read.table("DatosTFG.txt",header=TRUE,sep=" ",dec=".")
A<-datos[,-1]
A<-t(A)
Comunidades<-datos[,1]
numero_inputs<-3
numero_outputs<-3
```

Representamos a magnitud *Hotels* fronte a *Regions* mediante un diagrama de barras.

```
barplot(Hotels ~ Region, data=datos, las=2, xlab="")
```



Chamamos a función que nos devuelve o conxunto de *DMUs* eficientes.

```
N<-DMUsEficientes(A,numero_inputs,numero_outputs)
Comunidades[N]

## [1] "Baleares" "Canarias" "Valencia" "Madrid"
```

Agora obtemos o valor da función característica para cada coalición.

```
v_S<-FuncionCaracteristica(A,numero_inputs,numero_outputs,N)
createBitMatrix(4,v_S)

##                cVal
```

```
## [1,] 1 0 0 0 5.3408942
## [2,] 0 1 0 0 5.8221115
## [3,] 0 0 1 0 1.1340882
## [4,] 0 0 0 1 0.9998564
## [5,] 1 1 0 0 6.0317721
## [6,] 1 0 1 0 5.4485277
## [7,] 1 0 0 1 6.4926592
## [8,] 0 1 1 0 5.9814303
## [9,] 0 1 0 1 6.8423313
## [10,] 0 0 1 1 2.1468712
## [11,] 1 1 1 0 6.1394056
## [12,] 1 1 0 1 7.1835372
## [13,] 1 0 1 1 6.5805037
## [14,] 0 1 1 1 7.0388736
## [15,] 1 1 1 1 7.2713817
```

Finalmente coa función `shapleyValue()` do paquete `CoopGame` calculamos o valor de Shapley para cada unha das *DMUs* eficientes.

```
shapleyValue(v_S)
## [1] 2.6391603 3.0994518 0.4559821 1.0767875
```

A modo de comprobación vemos que o valor de Shapley que obtemos cumpre eficiencia, xa que suma o valor da cooperación de N .

```
sum(shapleyValue(v_S))
## [1] 7.271382
```


Bibliografía

- [1] Beasley, J. E. (2003). *Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, 147(1), 198-216.
- [2] Berne, R., and Stiefel, L. (1984). *The measurement of equity in school finance: Conceptual, methodological, and empirical dimensions*. Johns Hopkins University Press.
- [3] Castro, J., Gómez, D., and Tejada, J. (2009). *Polynomial calculation of the Shapley value based on sampling*. Computers and Operations Research, 36(5), 1726-1730.
- [4] Charnes, A., and Cooper, W. W. (1962). *Programming with linear fractional functionals*. Naval Research logistics quarterly, 9(3-4), 181-186.
- [5] Charnes, A., and Cooper, W. W. (1973). *An explicit general solution in linear fractional programming*. Naval Research Logistics Quarterly, 20(3), 449-467.
- [6] Charnes, A., Cooper, W. W., and Rhodes, E. (1977). *Measuring the efficiency of decision making units with some new production functions and estimation methods*. Texas University at Austin Center for Cybernetic Studies.
- [7] Charnes, A., Cooper, W. W., and Rhodes, E. (1978). *Measuring the efficiency of decision making units*. European journal of operational research, 2(6), 429-444.
- [8] Cook, W. D., and Kress, M. (1999). *Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach*. European Journal of Operational Research, 119(3), 652-661.
- [9] Cooper, W. W., Ruiz, J. L., and Sirvent, I. (2009). *Selecting non-zero weights to evaluate effectiveness of basketball players with DEA*. European journal of operational research, 195(2), 563-574.
- [10] Farrell, M. J. (1957). *The measurement of productive efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General), 120(3), 253-281.

- [11] Gini, C. (1912). *Variability and mutability*. Studi Economico-Giuridici Univeritiá di Cagliari, 3, 1-156.
- [12] González-Díaz, J., García-Jurado, I., and Fiestras-Janeiro, M. G. (2010). *An introductory course on mathematical game theory*. Graduate studies in mathematics, 115.
- [13] Hinojosa, M. A., Lozano, S., Borrero, D. V., and Mármol, A. M. (2017). *Ranking efficient DMUs using cooperative game theory*. Expert Systems with Applications, 80, 273-283.
- [14] Hua, Z., Bian, Y., and Liang, L. (2007). *Eco-efficiency analysis of paper mills along the Huai River: An extended DEA approach*. Omega, 35(5), 578-587.
- [15] Kalai, E., and Samet, D. (1987). *On weighted Shapley values*. International journal of game theory, 16(3), 205-222.
- [16] Li, Y. J., and Liang, L. (2008a). *A method of allocating the fixed cost based on data envelopment analysis and Nash bargain game*. Systems Engineering, 6.
- [17] Li, Y. J., and Liang, L. (2008b). *Method of allocating the fixed cost based on data envelopment analysis and cooperative game [J]*. Systems Engineering-Theory and Practice, 11, 80-84.
- [18] Li, Y., and Liang, L. (2010). *A Shapley value index on the importance of variables in DEA models*. Expert systems with Applications, 37(9), 6287-6292.
- [19] Li, Y., Yang, M., Chen, Y., Dai, Q., and Liang, L. (2013). *Allocating a fixed cost based on data envelopment analysis and satisfaction degree*. Omega, 41(1), 55-60.
- [20] Li, Y., Xie, J., Wang, M., and Liang, L. (2016). *Super efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game*. European Journal of Operational Research, 255(3), 884-892.
- [21] Lin, R. (2011). *Allocating fixed costs and common revenue via data envelopment analysis*. Applied Mathematics and computation, 218(7), 3680-3688.
- [22] Lozano, S. (2012). *Information sharing in DEA: A cooperative game theory approach*. European Journal of Operational Research, 222(3), 558-565.
- [23] Mandell, M. B. (1991). *Modelling effectiveness-equity trade-offs in public service delivery systems*. Management Science, 37(4), 467-482.

- [24] Mirás, M., and Sánchez, E. (2008). *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab*. (<http://mmiras.webs.uvigo.es/TUGlab/>).
- [25] Rhodes, E. L. (1978). *Data envelopment analysis and approaches for measuring the efficiency of Decision-Making Units with an application to program FOLLOW-THROUGH in UNITED STATES education*. Carnegie Mellon University.
- [26] Yang, Z., and Zhang, Q. (2015). *Resource allocation based on DEA and modified Shapley value*. Applied Mathematics and Computation, 263, 280-286.
- [27] Yazdani, M., Chatterjee, P., Pamucar, D., and Chakraborty, S. (2020). *Development of an integrated decision making model for location selection of logistics centers in the Spanish autonomous communities*. Expert Systems with Applications, 148, 113208.
- [28] Yin, P., Chu, J., Wu, J., Ding, J., Yang, M., and Wang, Y. (2020). *A DEA-based two-stage network approach for hotel performance analysis: An internal cooperation perspective*. Omega, 93, 102035.