

MARÍA PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA

NÚMERO DE RAMIFICACIÓN
Y PERCOLACIÓN
DE UN PSEUDOGRUPO

MARÍA PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA

**NÚMERO DE RAMIFICACIÓN
Y PERCOLACIÓN
DE UN PSEUDOGRUPO**

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del profesor Fernando Alcalde Cuesta, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidade de Santiago de Compostela.

A Cristina y Chema.

Agradecimientos

Siempre he pensado que escribir los agradecimientos no sería tarea fácil. En cierto modo, no me equivocaba. Ahora que el momento ha llegado, tengo tantas cosas que agradecer a tantas personas que lo que me resulta realmente difícil es limitarme a un par de folios.

Gracias Fernando, entre otras muchas razones, por haberme guiado a lo largo de estos años, por la originalidad y belleza de los temas propuestos, por el equilibrio entre exigencia y paciencia demostrado y, ya que estamos, por los cursos de la licenciatura donde potenciaste mi pasión por la topología.

Quisiera mostrar también mi agradecimiento a los referees y a los miembros del tribunal por aceptar valorar mi trabajo. En especial, quiero dar las gracias a Felipe por sus consejos a lo largo de estos años y a Eduardo por sus aportaciones tanto para la investigación como para la docencia. Gracias por supuesto a Bertrand por escucharme y transmitirme optimismo en los momentos más críticos y por el trabajo desarrollado en común durante mi estancia en París. Gracias también a Françoise Dal’bo por su acogida durante mi estancia en Rennes. Han sido y serán de gran ayuda sus consejos sobre cómo conciliar la familia y las matemáticas siendo mujer.

Por la compañía y el buen ambiente, muchas gracias a todos los becarios. Gracias Silvia por los muchos cafés compartidos y por estar siempre dispuesta a ayudar. Gracias Coté por haberme acompañado desde el principio de esta aventura, por haber compartido dificultades, nervios y sobre todo tantas alegrías. Gracias Pablo y Álvaro, por los congresos compartidos y sus respectivas veladas.

Gracias de manera muy especial a mi familia por su férrea unidad y su apoyo incondicional. Muchas gracias a la *chiquitita*, Cristina, por llenarme de vitalidad en la recta final de la tesis. Por último, muchísimas gracias, Chema. No existen palabras suficientes para mostrarte mi agradecimiento. Gracias por estar ahí y confiar siempre en mí.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	15
1.1. Grafos	15
1.1.1. Definiciones básicas de teoría de grafos	15
1.1.2. Grafos de Cayley y grafos transitivos	16
1.1.3. Tasas de crecimiento de un grafo	19
1.1.4. Casi-isometría de grafos	20
1.1.5. Espacio de finales de un grafo	24
1.2. Pseudogrupos	27
1.2.1. Pseudogrupos topológicos y pseudogrupos medibles	27
1.2.2. Ejemplos	28
1.2.3. Equivalencia de pseudogrupos	30
1.2.4. Medidas	31
1.3. Pseudogrupos grafados	32
1.3.1. Pseudogrupos grafados	32
1.3.2. Ejemplos	33
1.3.3. Equivalencia de Kakutani	33
1.3.4. Recorridos aleatorios en un pseudogrupo grafado	34
1.3.5. Espacio de finales de un pseudogrupo grafado	38
1.4. Promediabilidad	40
1.4.1. Grupo promediable	40
1.4.2. Acción de grupo promediable	42
1.4.3. Pseudogrupo promediable	44
1.5. Propiedad de Liouville	46
2. Número de ramificación	49
2.1. Número de ramificación de un grafo	49
2.1.1. Definición y propiedades del número de ramificación	50

2.1.2.	Tasa de crecimiento y número de ramificación	56
2.1.3.	Casi-isometría y número de ramificación	61
2.1.4.	Número de ramificación y dimensión de Hausdorff del espacio de finales	66
2.2.	Número de ramificación de un pseudogrupo grafado	70
2.2.1.	Definición de número de ramificación de un pseudogrupo	71
2.2.2.	Crecimiento exponencial y número de ramificación.	74
2.2.3.	Proceso de inducción de Gaboriau	76
2.2.4.	Equivalencia de Kakutani y número de ramificación	78
2.3.	Promediabilidad y propiedad de Liouville	79
2.3.1.	Promediabilidad y número de ramificación	79
2.3.2.	Propiedad de Liouville y número de ramificación	81
2.4.	Ejemplos	85
2.4.1.	Grupo del sereno	86
2.4.2.	Una laminación liouviliana con crecimiento exponencial.	92
2.4.3.	Proceso de Galton-Watson	99
3.	Percolación de Bernoulli	101
3.1.	Percolación de Bernoulli clásica	101
3.1.1.	Definición de percolación de Bernoulli y propiedades	102
3.1.2.	Percolación crítica.	106
3.1.3.	Percolación de Bernoulli en grafos de Cayley	109
3.1.4.	Clústeres infinitos y fase de unicidad.	111
3.1.5.	Resultados clásicos para grafos de Cayley.	113
3.2.	Construcciones a la Gaboriau	115
3.2.1.	Relación de equivalencia total	115
3.2.2.	Relación de equivalencia clúster.	117
3.2.3.	Invarianza y ergodicidad de la medida	118
3.2.4.	Propiedades de los clústeres	119
3.2.5.	Promediabilidad	120
3.3.	Percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados	121
3.3.1.	Percolación crítica	122
3.3.2.	Proceso de percolación global	125
3.3.3.	Espacio de finales y percolación crítica	127
3.3.4.	Pseudogrupos con 2 finales	130
3.3.5.	Pseudogrupos con un Cantor de finales	131
3.3.6.	Ejemplos	135
3.4.	Percolación relativa en acciones de grupos	137
3.4.1.	Definición de percolación relativa	137

3.4.2.	Número de clústeres infinitos	139
3.4.3.	Relación clúster relativa a un boreliano	140
3.4.4.	Espacio de finales y percolación relativa	142
3.4.5.	Borelianos de medida pequeña	145
3.4.6.	Propiedades de los clústeres	146
Abstract		149
Conclusions		151
Bibliografía		161

Introducción

El concepto de *pseudogrupo* es una generalización del concepto de grupo que surge de manera natural al estudiar las simetrías de diferentes objetos físicos y matemáticos. En nuestro caso, el interés por los pseudogrupos está motivado por el concepto de *pseudogrupo de holonomía* introducido por A. Haefliger en [38] que constituye una adecuada discretización del concepto de laminación. La noción de *pseudogrupo medible* actuando sobre un espacio de probabilidad generaliza el concepto de acción medible de un grupo. Recordemos que la acción de un grupo numerable G sobre un espacio de probabilidad (X, μ) se dice *medible* si cada elemento g de G determina un isomorfismo boreliano $\tau_g : x \in X \mapsto g.x \in X$. Se dice que la transformación τ_g es *no singular* si conserva los conjuntos de medida nula. Un *pseudogrupo de transformaciones medibles* de (X, μ) es una familia Γ de isomorfismos borelianos $\gamma : A \subset X \rightarrow B \subset X$ entre partes borelianas de X que es cerrada respecto de la composición, la inversión, la restricción y combinación de sus elementos. Como en el caso de los grupos, supondremos que las transformaciones son *no singulares*, o en otros términos que la medida μ es casi-invariante. Si Γ es finitamente generado, podemos dotar a X de una estructura de grafo de manera análoga a la construcción del grafo de Cayley de un grupo finitamente generado. Las componentes conexas son las órbitas del pseudogrupo dotadas de la correspondiente estructura de subgrafo. Si Σ es el sistema finito de generadores considerado, diremos que (Γ, Σ) es un *pseudogrupo grafado*.

El objetivo de la memoria de tesis consiste en extender el concepto de *número de ramificación* y el *proceso de percolación de Bernoulli* sobre grafos al contexto de los pseudogrupos grafados. En general, las órbitas no poseen la homogeneidad propia de los grafos de Cayley de manera que los cálculos se complican y muchas herramientas clásicas ya no funcionan. Nos interesamos principalmente por lo que sucede en las órbitas genéricas respecto de la medida de probabilidad μ . Cuando se trata de una medida armónica, E. Ghys [29] ha demostrado que las órbitas presentan un cierto tipo de 'casi-periodicidad' que nos permitirá obtener algunos resultados interesantes en función del número de finales de las órbitas. Procuraremos comparar nuestros

resultados con los obtenidos en la teoría clásica de ramificación y percolación sobre grafos.

Número de ramificación. La noción de *número de ramificación* de un árbol fue introducida en los años 90 por R. Lyons [52]. Intuitivamente, el número de ramificación $br(T)$ de un árbol enraizado T mide el número medio de descendientes por vértice, entendiendo como descendientes aquellos vértices vecinos que se encuentran más alejados de la raíz. El concepto de número de ramificación se extiende de manera natural a grafos arbitrarios. Si $\mathcal{G} = (V, E)$ es un grafo infinito enraizado en el vértice 0 con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E , se llama *separatriz* a un conjunto de aristas $\Pi \subset E$ que desconecta la raíz del infinito, es decir, si borramos Π la componente conexa de la raíz es finita. La definición de número de ramificación del grafo \mathcal{G} viene dada por

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}.$$

El número de ramificación depende de la métrica, de modo que es natural preguntarse si sucede lo mismo a gran escala. En otros términos, se trata de saber si es invariante o no por casi-isometría (en el sentido de M. Gromov [35]). La respuesta es negativa, ya que el árbol binario y el árbol de Fibonacci son casi-isométricos, pero sus números de ramificación difieren. No obstante, tenemos cierto control sobre los números de ramificación de dos grafos casi-isométricos \mathcal{G} y \mathcal{G}' ; de hecho, probamos en el teorema 2.17 de la subsección §2.1.3 que existe una cierta constante C tal que:

$$br(\mathcal{G})^{\frac{1}{C}} \leq br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})^C.$$

Nótese que, de igual manera que la propiedad *tener crecimiento subexponencial*, la propiedad *tener número de ramificación igual a 1* se mantiene invariante por casi-isometría. Por otra parte, como es natural, el número de ramificación $br(\mathcal{G})$ se relaciona con la tasa de crecimiento

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$$

de la siguiente manera:

$$br(\mathcal{G}) \leq \underline{gr}(\mathcal{G})$$

donde $s(n)$ es el número de elementos a distancia n de la raíz. Para grafos de Cayley se tiene la igualdad entre ambas cantidades, de modo que el interés del número de ramificación y sus propiedades reside en el contexto de los grafos que no son de este tipo.

El objetivo de la primera parte de la memoria es extender la noción de número de ramificación al contexto de los pseudogrupos finitamente generados como el promedio de los números de ramificación de las órbitas genéricas. El interés en este nuevo invariante viene motivado por los resultados de C. Series [63] y V. Kaimanovich [45] según los cuales las relaciones de equivalencia con crecimiento polinomial (respectivamente subexponencial) son promediabiles. La idea original del trabajo era por tanto encontrar un criterio efectivo de promediabilidad para pseudogrupos en términos de número de ramificación, ya que este invariante no siempre coincide con la tasa de crecimiento. Los resultados obtenidos han sido publicados en colaboración con F. Alcalde (véase [3]).

Con ese fin, si (Γ, Σ) es un pseudogrupo grafado finitamente generado actuando sobre un espacio de probabilidad (X, μ) , definimos la *aplicación de ramificación* $br_\Sigma : X \rightarrow [1, +\infty]$ que asocia a cada punto de X el número de ramificación de su órbita. En la proposición 2.27 probamos que se trata de una aplicación medible, luego tiene sentido la siguiente definición:

Definición 1. El *número de ramificación* del pseudogrupo (Γ, Σ) relativo a μ se define como:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int br_\Sigma(x) d\mu(x).$$

Cuando la medida μ es ergódica, deducimos que el número de ramificación del pseudogrupo coincide con el número de ramificación de μ -casi toda órbita. La definición de número de ramificación depende del sistema finito de generadores que tomemos y resulta natural preguntarse qué sucede cuando cambiamos Σ por otro sistema finito Σ' . Puesto que los pseudogrupos (Γ, Σ) y (Γ, Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani, estudiamos en la sección 2.2.4 de qué modo afecta dicha equivalencia al número de ramificación y obtenemos que la propiedad *tener número de ramificación igual a 1* permanece invariante (véase la proposición 2.37).

Como ya hemos adelantado, el interés inicial era encontrar un resultado que relacionase la promediabilidad con el número de ramificación. Recordemos que un pseudogrupo Γ actuando sobre un espacio de probabilidad (X, μ) se dice *promediable* respecto de la medida μ si existe un sistema medible $m = \{m_x\}_{x \in X}$ de medias sobre las órbitas genéricas (i.e. funcionales lineales positivos y unitarios definidos sobre $l^\infty(\Gamma(x))$), invariante en el sentido de que $m_x = m_y$ si x e y pertenecen a la misma órbita. Obsérvese que el pseudogrupo es promediable si y sólo si lo es la relación de equivalencia \mathcal{R} definida por la acción de Γ sobre X . En estos términos, obtenemos el siguiente criterio de promediabilidad (que corresponde al teorema 2.40 demostrado en la subsección §2.3.1):

Teorema 1. *Si el número de ramificación $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ entonces el pseudogrupo es μ -promediable.*

La demostración del teorema consiste en probar que cualquier pseudogrupo con número de ramificación igual a 1 verifica la *condición de Reiter débil* (introducida por C. Anantharaman-Delaroche y J. Renault en [5]), lo que equivale a decir que el pseudogrupo es promediable. Para ello, se construye de manera explícita un sistema de medidas de probabilidad asintóticamente invariantes sobre las órbitas verificando la condición anterior.

No obstante podemos decir más cuando la medida considerada es armónica, ya que en ese caso se obtiene un resultado más fuerte que relaciona el número de ramificación con la propiedad de Liouville. En [58] F. Paulin introduce para relaciones de equivalencia la versión discreta de las nociones de recorrido aleatorio, operador del calor y operador laplaciano de teoría de foliaciones. Recordemos que un *recorrido aleatorio* en un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) actuando en un espacio de probabilidad (X, μ) consiste en elegir un punto de X al azar y moverse aleatoriamente de vértice en vértice a través de las aristas de su órbita. Cuando el paso de un vértice a cualquier vértice vecino es equiprobable, hablamos de *recorrido aleatorio simple*. Si denotamos por E al conjunto de aristas del grafo X , el *núcleo de transición* asociado a un recorrido aleatorio es una aplicación medible $\pi : E \rightarrow [0, 1]$ que nos da la probabilidad de paso de un vértice a cada uno de sus vecinos. Se define un *operador de difusión del calor* D_π sobre las órbitas del pseudogrupo y el correspondiente *operador laplaciano* Δ_π y se llama *función armónica* a toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Delta_\pi(f) = 0$ en casi todo punto. La medida μ sobre X se dice *armónica* respecto de π si es conservada por la difusión del calor.

Recordemos que una función en \mathbb{R}^n es armónica si verifica la ecuación de Laplace de manera que el valor en cada punto coincide con el valor medio de la función sobre una bola centrada en dicho punto. El teorema de Liouville clásico afirma que no existen funciones armónicas acotadas no constantes sobre \mathbb{R}^n . La versión discreta de esta propiedad en el contexto de grafos nos dice que un grafo verifica la *propiedad de Liouville* respecto de un recorrido aleatorio si las únicas funciones armónicas acotadas sobre el grafo son constantes. De manera análoga, un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) verifica la *propiedad de Liouville* respecto de un recorrido aleatorio π si casi toda órbita verifica esta propiedad, es decir, si las únicas funciones armónicas acotadas sobre $\Gamma(x)$ son constantes para casi todo $x \in X$. Cuando la medida es armónica, el operador de difusión es regular, es decir, disponemos de nociones de *entropía* $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$ y *velocidad* $\mathfrak{l}(\Gamma(x))$ en las órbitas, bien definidas y relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)) \leq \log(\underline{Gr}_\Sigma(\Gamma(x))) \mathfrak{l}(\Gamma(x))$$

según prueban V. Kaimanovich y W. Woess en [49], donde $Gr_\Sigma(\Gamma(x))$ es la tasa de crecimiento en las bolas de la órbita. La condición $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ implica que $l(\Gamma(x)) = 0$ y por tanto $h(\Gamma(x)) = 0$ para μ -casi todo punto $x \in X$. Así obtenemos un nuevo criterio en función del número de ramificación (que corresponde al teorema 2.46 enunciado y probado en §2.3.2):

Teorema 2. *Si la medida μ es armónica respecto del recorrido aleatorio simple, entonces $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ implica que el pseudogrupo (Γ, Σ) verifica la propiedad de Liouville.*

Ilustramos nuestra definición con varios ejemplos. El primer ejemplo es una acción esencialmente libre del grupo del sereno G_1 sobre el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_2[[t]]$, que muestra que el recíproco del Teorema 1 no es cierto. En efecto, el grupo del sereno es promediable respecto de cualquier medida invariante, pero su número de ramificación (para un sistema de generadores concreto) es el número de oro $\Phi > 1$.

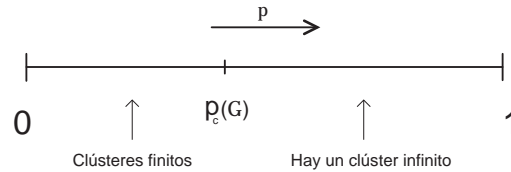
En el segundo ejemplo, construimos una laminación por superficies de Riemann, minimal (i.e. las hojas son densas) y sin holonomía (i.e. los elementos del pseudogrupo de holonomía carecen de puntos fijos). Para ello, consideramos el espacio de Gromov-Hausdorff del grupo libre con tres generadores \mathbb{F}^3 , es decir, el conjunto de subárboles enraizados del grafo de Cayley \mathcal{F}^3 dotado de la topología de Gromov-Hausdorff que hace a dos árboles cercanos si coinciden en una gran bola. Utilizando un proceso de injerto descrito por E. Blanc en [12], construimos un subárbol repetitivo y aperiódico de \mathcal{F}^3 cuya clausura en el espacio de Gromov-Hausdorff está dotada de una relación de equivalencia natural cuyas clases son árboles indistinguibles del subárbol inicial. Según un proceso de engorde descrito por E. Ghys en [30], véase también [2], la clausura del subárbol puede realizarse como transversal completa de una laminación por superficies de Riemann minimal y sin holonomía \mathcal{L}_∞ . Construimos una medida transversa invariante para la que las órbitas genéricas de \mathcal{L}_∞ tienen un final y crecimiento exponencial. La primera condición nos garantiza que el número de ramificación de las órbitas genéricas es igual a 1 y por consiguiente la laminación es Liouvilliana. Este ejemplo muestra que el criterio de promediabilidad que proporciona el Teorema 2 generaliza de manera efectiva los resultados de C. Series y V. Kaimanovich.

Por último, si consideramos un proceso de Galton-Watson supercrítico (i.e. con número medio de descendientes $m > 1$), no es difícil comprobar que su número de ramificación es igual a m . Obsérvese que la relación de equivalencia está definida en este caso por un pseudogrupo que no es de tipo finito.

Percolación de Bernoulli. La palabra *percolar* proviene del latín 'percolare' que significa *filtrar a través*. La teoría de la percolación fue introducida en la década

de los 50 por el ingeniero Simon Broadbent y el matemático John Hammersley para comprender cómo las motas de polvo obstruían las cámaras anti-gas. A partir de entonces ha sido estudiada con el objeto de modelar numerosos procesos físicos aleatorios como la filtración de un fluido en un medio poroso, la expansión de una epidemia, la propagación de un incendio o el paso de la corriente eléctrica en una red. Si suponemos que introducimos una gran roca porosa en un fluido, resulta interesante estudiar si el líquido fluirá hasta alcanzar el centro de la roca o si por el contrario ésta permanecerá húmeda sólo en su superficie. La teoría de la percolación prueba que la probabilidad de que el fluido llegue al centro de la roca no aumenta gradualmente a medida que variamos el grado de porosidad, sino que pasa de ser nula a ser total a partir de un nivel crítico.

Precisando un poco más, la teoría de la percolación estudia la naturaleza y propiedades de las componentes conexas (o *clústeres*) de subgrafos aleatorios de un grafo infinito. Nos interesa en particular el proceso de *percolación de Bernoulli* sobre un grafo infinito, es decir, el proceso aleatorio que asigna a cada arista una probabilidad de permanencia p y una probabilidad de desaparición $1 - p$ (véase [34],[52],[54]). Obviamente, la probabilidad de que exista un clúster infinito en el subgrafo aleatorio que resulta tras percolar es monótona creciente respecto del parámetro $p \in [0, 1]$. De hecho, para cada parámetro p esta probabilidad sólo puede ser nula o total por la ley 0-1 de Kolmogorov. De manera que existe un valor crítico $p_c \in [0, 1]$ que separa el proceso en dos fases diferenciadas, la *fase subcrítica* $p < p_c$ donde los clústeres son finitos (con probabilidad 1) y la *fase supercrítica* $p > p_c$ donde existe al menos un clúster infinito (con probabilidad 1):



En términos matemáticos, dado un grafo \mathcal{G} con conjunto de aristas E y un parámetro $p \in [0, 1]$, el p -proceso de *percolación de Bernoulli* viene dado por el conjunto de coloreados $\Omega = \{0, 1\}^E$ sobre E dotado de la σ -álgebra generada por los cilindros y de la medida de Bernoulli P_p obtenida como producto de la medida de Bernoulli sobre $\{0, 1\}$ que asigna pesos p y $1 - p$ a 1 y 0 respectivamente. Cada coloreado $\omega \in \Omega$ da lugar a un subgrafo \mathcal{G}_ω de \mathcal{G} formado por las aristas coloreadas de 1. Las componentes conexas de \mathcal{G}_ω se llaman *clústeres* y para cada vértice v de \mathcal{G} se denota por $C_\omega(v)$ al clúster que lo contiene.

Definición 2. Se define la *percolación crítica* de \mathcal{G} como

$$p_c(\mathcal{G}) = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ infinito}] = 1\}.$$

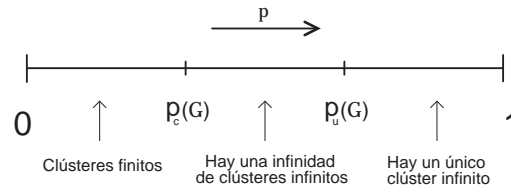
En general, el cálculo de p_c es complicado; una prueba de ello es que no se conoce su valor para los grafos de Cayley de \mathbb{Z}^n con $n > 2$. En el caso de árboles, la probabilidad crítica p_c coincide con el inverso del número de ramificación (véase [52]). También en este contexto el árbol binario y el de Fibonacci son un ejemplo de grafos casi-isométricos cuyas percolaciones críticas no coinciden. No obstante, una vez más se tiene que la propiedad *tener percolación crítica igual a 1* es invariante por casi-isometría.

Cuando el grafo considerado \mathcal{G} es el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado G , se puede decir mucho más acerca del proceso de percolación de Bernoulli. La acción por traslaciones de G sobre \mathcal{G} se extiende de manera natural a una acción sobre el espacio de coloreados Ω dada por $g\omega(e) = \omega(g^{-1}(e))$ que resulta ser invariante y ergódica respecto de la medida P_p . Como consecuencia de la ergodicidad de P_p , C.M. Newman y L.S. Schulman prueban en [56] que para cada $p \in (0, 1)$ el número de clústeres infinitos es constante igual a 0, 1 o ∞ . Además, O. Häggström, Y. Peres, R.H. Schonmann prueban en [42] la existencia de un nuevo valor crítico p_u que limita inferiormente una nueva fase $p_u < p$, llamada *fase de unicidad*, en la que existe un único clúster infinito (con probabilidad 1):

Definición 3. Se define el valor crítico

$$p_u(\mathcal{G}) = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1\}.$$

Cuando $p_c \neq p_u$, existe una fase intermedia llamada *fase de no unicidad* $p_c < p < p_u$ donde hay una infinidad de clústeres infinitos (con probabilidad 1):



La fase de no unicidad puede no existir. Es el caso de los grafos de Cayley de grupos promediables, que verifican $p_c = p_u$, según un resultado de R.M. Burton y M. Keane [15]. En la memoria recopilamos algunos resultados que muestran la relación

de los valores p_c y p_u con propiedades geométricas como el número de finales, el crecimiento exponencial o la casi-isometría, así como resultados sobre las propiedades geométricas de los clústeres infinitos. En la sección §3.2 recordamos la reformulación del proceso de percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley propuesta por D. Gaboriau en [27] usando el lenguaje de las relaciones de equivalencia medibles, que nos permitirá recuperar algunos de los resultados clásicos presentados en la sección anterior usando técnicas propias de foliaciones y relaciones de equivalencia. Gaboriau construye una relación de equivalencia \mathcal{R}^{cl} sobre Ω cuyas órbitas genéricas respecto de la medida invariante P_p se identifican con los clústeres del proceso de percolación sobre un grafo de Cayley. Además, la medida P_p restringida al conjunto de órbitas infinitas es ergódica como consecuencia del Teorema de indistinguibilidad de [55], lo que nos garantiza que los clústeres poseen las mismas propiedades medibles: crecimiento, número de finales, número de ramificación, recurrencia. Obsérvese que las herramientas fundamentales en el estudio de la percolación sobre grafos de Cayley son la existencia de la acción del grupo sobre el espacio de coloreados junto con la invarianza y ergodicidad de la medida P_p .

Como ya hemos adelantado, el objetivo de la segunda parte de la memoria de tesis consiste en extender el proceso de percolación de Bernoulli al contexto de los pseudogrupos grafados. Para ello, hacemos percolación de Bernoulli de parámetro $p \in [0, 1]$ sobre las aristas de cada órbita del pseudogrupo con independencia unas de otras. Ahora, el objetivo es estudiar la naturaleza y propiedades de los clústeres de las órbitas genéricas. De nuevo, debido a que las órbitas carecen de la homogeneidad propia de los grafos de Cayley, las herramientas clásicas no son aplicables en nuestro contexto. No obstante, en la sección §3.3 probamos que la percolación crítica de las órbitas varía de manera medible y definimos valores críticos que actúan como transición de fase en el proceso de percolación de Bernoulli sobre un pseudogrupo.

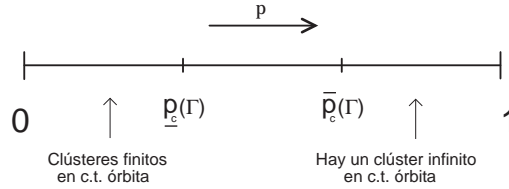
Si (Γ, Σ) es un pseudogrupo grafado finitamente generado actuando sobre un espacio de probabilidad (X, μ) , definimos la *aplicación de percolación* $p_c : X \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada punto de X la percolación crítica de su órbita. Probamos en la proposición 3.43 que se trata de una aplicación medible y por tanto constante en el caso ergódico.

Definición 4. Se define la *percolación crítica inferior* y la *percolación crítica superior* del pseudogrupo (Γ, Σ) como

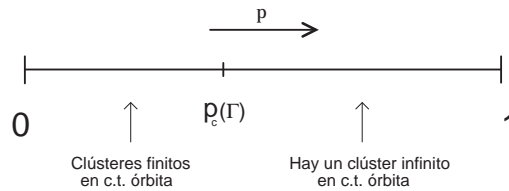
$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \inf \text{ess} \{p_c\}, \quad \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \sup \text{ess} \{p_c\}.$$

Existe por tanto una fase de finitud $p < \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ donde los clústeres de las órbitas genéricas son finitos, mientras que en la fase $p > \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ se tiene que existe al

menos un clúster infinito en las órbitas genéricas. En el caso intermedio $\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$, obtenemos una fase mixta.



Si la medida μ es ergódica entonces todas las órbitas genéricas tienen la misma percolación crítica, que coincide con las cantidades anteriores, de manera que existe un valor crítico $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ que llamamos *percolación crítica* del pseudogrupo grafado que divide el proceso en una *fase subcrítica* $p < p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ donde los clústeres de casi toda órbita son finitos y una *fase supercrítica* $p > p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ donde casi toda órbita contiene un clúster infinito.



Nos interesamos de nuevo en la sección §3.3.3 por la influencia de la equivalencia de Kakutani sobre la percolación y obtenemos que la propiedad *tener percolación crítica igual a 1* permanece invariante (véase la proposición 3.53).

Como ya hemos comentado, el estudio del número de clústeres infinitos y las propiedades de éstos en la percolación de pseudogrupos resulta más complicado que en el caso clásico. No obstante, cuando la medida considerada es armónica y ergódica, contamos con las siguientes herramientas que serán fundamentales para el desarrollo del tercer capítulo de la memoria. Se trata de la versión discreta descrita por F. Paulin en [58] de los resultados de E. Ghys recopilados en [29]:

- El *Teorema de los finales* según el cual el número de finales de las órbitas genéricas es constante igual a 0, 1, 2 o un conjunto de Cantor.
- La *Proposición Fundamental* según la cual cualquier boreliano de medida positiva interseca casi toda órbita aproximando todos los finales de ésta.

- El *Lema de la hipersuperficie* que nos dice que si las órbitas del pseudogrupo tienen más de un final, entonces existe un grafo finito \mathcal{G} de manera que casi toda órbita contiene una infinidad de copias de \mathcal{G} aproximando todos los finales y si eliminamos cualquiera de ellas, la órbita se desconecta en al menos dos componentes conexas no acotadas.

Recordemos que el primero de los resultados se puede demostrar a partir de los otros dos (véase [11]). Podremos por tanto obtener información sobre el número de clústeres de pseudogrupos cuyas órbitas tienen más de un final. Para ello, combinamos los resultados anteriores con el lema siguiente (demostrado en la subsección §3.3.3):

Lema Fundamental 1. *Si un grafo conexo infinito \mathfrak{G} contiene una cantidad infinita numerable de subgrafos $\{\mathcal{G}_n\}$ isomorfos a un grafo finito \mathcal{G} disjuntos dos a dos, entonces al realizar p -percolación de Bernoulli sobre \mathfrak{G} desaparecerá una cantidad infinita de grafos \mathcal{G}_n (con probabilidad 1).*

Obtenemos entonces dos teoremas que muestran la analogía con los resultados clásicos sobre grafos de Cayley según los cuales $p_c = 1$ si el grafo tiene 2 finales y $p_u = 1$ si tiene una infinidad de finales (la prueba puede verse en [54]). En efecto, el primer resultado (que corresponde al teorema 3.55 enunciado y probado en §3.3.4) nos dice que si las órbitas del pseudogrupo tienen 2 finales, entonces los clústeres son finitos para cualquier valor de $p < 1$:

Teorema 3. *Si la medida μ es armónica y ergódica y μ -casi toda órbita tiene 2 finales, entonces*

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1.$$

El segundo resultado (que corresponde al teorema 3.56 enunciado y probado en §3.3.5) nos dice que si las órbitas del pseudogrupo tienen un Cantor de finales, entonces en la fase supercrítica hay una infinidad de clústeres infinitos:

Teorema 4. *Si la medida μ es armónica y ergódica y μ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales, entonces para $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < 1$, existe una infinidad de clústeres infinitos en μ -casi toda órbita.*

Finalizamos el estudio de la percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados con varios ejemplos ilustrativos (véase la subsección §3.3.6). Como primer ejemplo, retomamos la laminación Liouvilliana \mathcal{L}_∞ definida en la primera parte de la memoria. A pesar de que las órbitas tienen crecimiento exponencial, podemos probar que su percolación crítica es 1 y por tanto los clústeres son finitos para $p < 1$. El interés de este ejemplo radica en que muestra que el crecimiento exponencial no implica que $p_c < 1$, como ocurre en la teoría clásica para grafos de Cayley.

Si consideramos la acción del grupo de sereno G_1 sobre el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_2[[t]]$, entonces la percolación crítica verifica $p_c < \frac{1}{\Phi}$ donde Φ es el número de oro. Además para $p > p_c$ existe un único clúster infinito en las órbitas genéricas de la acción ya que éstas son isomorfas al grafo de Cayley del grupo G_1 que verifica $p_c = p_u$ por ser promediable. Es natural preguntarse si, tal y como sucede en este ejemplo, la fase supercrítica es siempre una fase de unicidad cuando el pseudogrupo es promediable. La respuesta es negativa cuando la medida no es invariante. En efecto, la acción del grupo libre \mathbb{F}^2 con dos generadores sobre su espacio de finales $\partial\mathbb{F}^2$ (respecto de una medida de probabilidad equidistribuida μ descrita en el ejemplo 1.51), es promediable, pero las órbitas genéricas tienen percolación crítica $p_c = \frac{1}{3}$ y contienen una infinidad de clústeres infinitos en la fase supercrítica $p > p_c$. Cabría preguntarse si el resultado es cierto cuando las órbitas genéricas son Følner. Pero las órbitas genéricas del proceso de Galton-Watson supercrítico introducido (con percolación crítica $p_c = \frac{1}{m}$) son Følner respecto de una medida invariante y sin embargo tienen una infinidad de clústeres infinitos para $p > p_c$. La pregunta adecuada es si hay unicidad de clústeres infinitos en la fase supercrítica para las órbitas de un pseudogrupo promediable respecto de una medida invariante. De momento, la pregunta permanece abierta.

Percolación relativa. Para finalizar, al final de la memoria en §3.4, introducimos un nuevo tipo de percolación que resulta bastante natural cuando nos interesamos por la dinámica de grupos y pseudogrupos. Para simplificar, nos situaremos en el primero de los casos. Esta percolación consiste en intersecar las órbitas de la acción medible de un grupo finitamente generado G sobre un espacio de probabilidad (X, μ) con un boreliano $\mathcal{A} \subset X$ de medida $\mu(\mathcal{A}) = p$ prefijada. Supondremos que la acción es esencialmente libre, invariante y ergódica respecto de la medida μ . La *percolación relativa al boreliano \mathcal{A}* consiste en mantener en cada órbita $G.x$ aquellas aristas que unen puntos de \mathcal{A} y borrar las demás. Llamamos *clústeres* a las componentes conexas resultantes y nuestro objetivo es su estudio en función de la medida p del boreliano considerado. Si $p = 0$, los clústeres son los propios puntos, mientras que casi toda órbita tiene un único clúster infinito, que coincide con la propia órbita, si $p = 1$. Luego nos interesaremos por los borelianos de medida $0 < \mu(\mathcal{A}) = p < 1$.

La percolación de Bernoulli clásica (de vértices) de parámetro $p \in [0, 1]$ para un grafo de Cayley es un caso particular de percolación relativa. En efecto, podemos formular el nuevo proceso en términos de relaciones de equivalencia e interpretar los clústeres como órbitas de una relación $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ que llamaremos *relación clúster relativa a \mathcal{A}* y usar los métodos habituales en el estudio de las órbitas infinitas (véase §3.4.3). En estos términos, si llamamos X al espacio de coloreados $\Omega = \{0, 1\}^V$, μ a la medida P_p y \mathcal{A} al boreliano $\{\omega \in \Omega \mid \omega(1) = 1\}$, la relación $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ coincide con la

relación clúster usual \mathcal{R}^{cl} y además la medida $\mu(\mathcal{A}) = p$.

Por analogía con la percolación clásica, cabría esperar que los clústeres fuesen finitos para borelianos de medida próxima a 0. El ejemplo 3.64 muestra que esto no es cierto. Basta tomar un par de rotaciones π_1 y π_2 de ángulo irracional sobre la esfera \mathbb{S}^2 de manera que las órbitas sean todas densas e isomorfas al grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}^2 . Para cada $\varepsilon > 0$, la bola B_ε centrada en un punto fijo x_1 de π_1 de volumen $vol(B_\varepsilon) < \varepsilon$ corta a cualquier órbita por ser una acción minimal. Si hacemos percolación relativa a B_ε , el clúster de casi todo punto x de B_ε es infinito puesto que contiene los puntos $\pi_1^n(x)$ que son distintos dos a dos. De manera que casi toda órbita contiene algún clúster infinito.

Como es natural, nos interesamos por el número de clústeres infinitos de las órbitas genéricas de la acción. Con ese fin, definimos una aplicación $N(\mathcal{A}) : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ que asocia a cada punto el número de clústeres infinitos que hay en la órbita que lo contiene. En la proposición 3.65 probamos que se trata de una aplicación medible. Además debido a la ergodicidad de la medida, se obtiene que $N(\mathcal{A})$ es constante en casi todo punto y por tanto las órbitas genéricas tienen el mismo número de clústeres infinitos (véase la proposición 3.66). La cuestión que surge de manera natural y que de momento no tiene respuesta es si podemos extender el resultado de C.M. Newman y L.S. Schulman [56] según el cual el número de clústeres de la percolación clásica es 0, 1 o ∞ . La planteamos por tanto como una conjetura:

Conjetura 1. *Si hacemos percolación relativa a un boreliano \mathcal{A} de medida $0 < p < 1$ entonces todos los clústeres son finitos, hay un único clúster infinito o bien hay una infinidad de clústeres infinitos en casi toda órbita.*

En el caso de arboledas, la conjetura es cierta; de hecho el siguiente resultado (enunciado y probado en la proposición 3.79 de §3.4.4) muestra que, tal y como sucede en la percolación clásica de árboles, no existe unicidad de clústeres infinitos:

Proposición 1. *Si G es un producto libre de grupos, entonces los clústeres son finitos o existe una infinidad de clústeres infinitos.*

La conjetura también es cierta cuando el grupo considerado tiene más de un final y el boreliano percolado es de medida suficientemente pequeña (véase el teorema 3.80 de §3.4.5):

Teorema 5. *Si G es un grupo con más de un final, entonces existe una constante $C \geq 0$ tal que para cualquier boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con medida $p < C$, todos los clústeres son finitos o hay una infinidad de clústeres infinitos en casi toda órbita. En particular, si G tiene 2 finales, entonces todos los clústeres son finitos.*

Para probar los resultados anteriores, la herramienta fundamental además de las ya enunciadas es el siguiente lema (enunciado como lema fundamental 3.74 en §3.4.4):

Lema Fundamental 2. *Si G tiene más de un final y el número de clústeres infinitos es finito, entonces cada clúster infinito aproxima todos los finales de la órbita que lo contiene.*

Organización de la memoria. La memoria consta de 3 capítulos organizados de la siguiente manera:

En el capítulo 1 recordamos las nociones básicas para el desarrollo de la memoria. Empezamos recordando la definición de grafo, sus modalidades y algunas de sus propiedades asintóticas: tasa de crecimiento, espacio de finales y casi-isometría. A continuación introducimos el concepto de pseudogrupo, describimos la estructura métrica de sus órbitas y tratamos las nociones de equivalencia de Kakutani, espacio de finales y recorrido aleatorio. Finalmente, recordamos algunas propiedades importantes como la promediabilidad, la existencia de sucesiones de Følner o la propiedad de Liouville.

En el capítulo 2 empezamos recordando el concepto de *número de ramificación* de un grafo y los resultados que lo relacionan con la tasa de crecimiento, la casi-isometría o el espacio de finales del grafo. A continuación extendemos esta noción al contexto de los pseudogrupos finitamente generados y estudiamos de qué modo influye la equivalencia de Kakutani sobre el invariante. Presentamos a continuación un *criterio de promediabilidad* en función del número de ramificación, comprobando que de hecho implica la *propiedad de Liouville* en el caso particular de que la medida sea armónica. Finalizamos el capítulo con varios ejemplos que ilustran nuestra noción.

En el capítulo 3 recordamos la definición del proceso de percolación de Bernoulli sobre un grafo, la noción de percolación crítica y los principales resultados de la teoría clásica para grafos de Cayley, especialmente los relacionados con el número de finales. Además recordamos la formulación de la percolación sobre grafos de Cayley en términos de relaciones de equivalencia descrita por D. Gaboriau. A continuación definimos el *proceso de percolación de Bernoulli* sobre un pseudogrupo finitamente generado y probamos la existencia de un valor crítico en el caso ergódico, que llamamos *percolación crítica* y que actuará como transición de fase. Cuando la medida considerada es armónica y ergódica, probamos que si las órbitas del pseudogrupo tienen 2 finales, entonces los clústeres son finitos, mientras que los pseudogrupos con un Cantor de finales verifican que hay una infinidad de clústeres infinitos en la fase supercrítica. Estudiamos las propiedades de percolación de los ejemplos introducidos en el segundo capítulo.

Por último, definimos un nuevo proceso de percolación sobre acciones de grupos ergódicas que denominamos *percolación relativa* y que consiste en estudiar la intersección de las órbitas con un boreliano dado. Probamos que el número de clústeres es constante en casi toda órbita. Para grupos libres, los clústeres son finitos o hay una infinidad de clústeres infinitos. Lo mismo se obtiene para grupos con más de un final cuando el boreliano considerado es de medida suficientemente pequeña.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo recordamos las nociones básicas que serán útiles a lo largo de nuestro trabajo. Empezamos recordando la definición de grafo, sus modalidades y sus propiedades. A continuación nos introducimos en el contexto de los pseudogrupos, especialmente de los pseudogrupos grafados. Finalmente, recordamos algunas propiedades importantes como la promediabilidad, la existencia de sucesiones de Følner o la propiedad de Liouville.

1.1. Grafos

El propósito de esta sección es recordar la definición de grafo y sus modalidades, así como fijar notaciones básicas. Introducimos el concepto de *grafo de Cayley* de un grupo, la noción de *casi-isometría* entre espacios métricos y en particular entre grafos, y la definición de *espacio de finales* de un grafo. Estas nociones serán fundamentales para el desarrollo del trabajo.

1.1.1. Definiciones básicas de teoría de grafos

Un *grafo* es un par $\mathcal{G} = (V, E)$ formado por un conjunto de vértices $V \neq \emptyset$ y un conjunto de aristas E dotado de una aplicación de E en $V \times V$ que envía cada arista $e \in E$ en un par $(v_1, v_2) \in V \times V$. Decimos que v_1 y v_2 son el *origen* $s(e)$ y el *extremo* $r(e)$ de e respectivamente. En tal caso se dice que los vértices v_1 y v_2 son *vecinos* y escribimos $v_1 \sim v_2$. Decimos que \mathcal{G} carece de aristas múltiples si la aplicación de E en $V \times V$ es inyectiva. En ese caso podemos identificar las aristas con sus extremos. En general, supondremos que la imagen de la aplicación de E en $V \times V$ es un subconjunto de $V \times V$ simétrico respecto de la diagonal e identificaremos cada arista e que une v_1 con v_2 con la opuesta e^- que une v_2 con v_1 . En otros términos,

nuestros grafos serán *no dirigidos*. Se llama *bucle* a cada arista cuyo origen y extremo coinciden. La *valencia* $val(v)$ de un vértice v es el número de aristas que unen dicho vértice con sus vecinos. Se dice que una arista es *terminal* si alguno de sus extremos tiene valencia 1. Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita en cada vértice y de *geometría acotada* si la valencia está uniformemente acotada. Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen la misma valencia.

Un *camino* en un grafo es una sucesión de vértices tal que cada par de elementos consecutivos son el origen y el extremo de una arista de E . La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Se llama *ciclo* a todo camino finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $v_1 = v_n$. Decimos que un grafo es *conexo* si dados dos vértices arbitrarios existe un camino que los une. Un *árbol* es un grafo conexo sin bucles y sin ciclos.

Un grafo \mathcal{G} está dotado de una *métrica* natural d de manera que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. La distancia entre vértices se puede extender a puntos cualesquiera dotando a cada arista de la métrica que la hace isométrica al intervalo $[0, 1]$ o la circunferencia \mathbb{S}^1 en el caso de un bucle. Un camino *geodésico* es aquel que minimiza la distancia entre sus extremos.

Un *grafo enraizado* es un grafo con un vértice fijado, llamado *origen* o *raíz*, que se denota por 0 . En este contexto, dados dos vértices vecinos v y v' , se dice que v' es *hijo* de v y que v es *padre* de v' si $d(v', 0) > d(v, 0)$. Nótese que puede ocurrir que entre dos vértices vecinos no haya relación de parentesco o que dos vértices compartan un hijo. Si \mathcal{G} es un grafo enraizado entonces, dado $v \in V$ denotamos por \mathcal{G}^v al subgrafo formado por v y sus descendientes.

1.1.2. Grafos de Cayley y grafos transitivos

Cualquier grupo dotado de un sistema finito de generadores posee una estructura de grafo dotado de una métrica natural denominada *métrica de las palabras*. En este apartado recordamos la noción de *grafo de Cayley*, que jugará un papel fundamental a lo largo de nuestro trabajo. Veremos además que se trata de un caso particular de *grafo transitivo*.

Grafos de Cayley. Sea G un grupo finitamente generado y S un sistema finito de generadores. Supondremos que S es simétrico (i.e. $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\} = S$) y no contiene al elemento neutro 1 . El *grafo de Cayley* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ es un grafo localmente finito, no dirigido y sin bucles, cuyos vértices son los elementos de G y dos vértices g_1 y g_2 están unidos por una arista si y sólo si $g_1^{-1}g_2 \in S$. Según esta definición, el grafo de Cayley \mathcal{G} depende tanto del grupo como del sistema de generadores S .

Se llama *longitud* de un elemento g de G al número mínimo de generadores de S necesarios para escribir g y se define la *distancia de las S -palabras* entre dos elementos g_1 y g_2 de G como

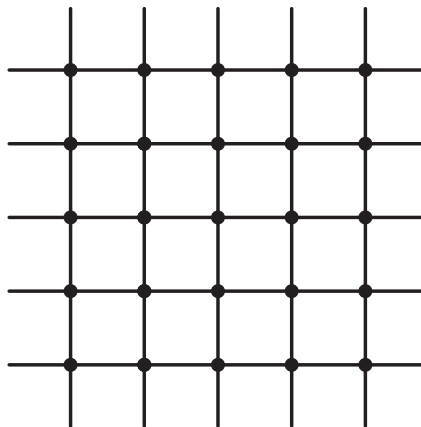
$$d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2).$$

Si dotamos a cada arista del grafo de Cayley \mathcal{G} de una métrica que la haga isométrica al intervalo $[0, 1]$, la métrica d_S sobre el grupo G se extiende a una métrica d_S sobre el grafo \mathcal{G} que hace de éste un espacio métrico conexo por caminos. Diremos que d_S es la *métrica de las S -palabras* sobre \mathcal{G} .

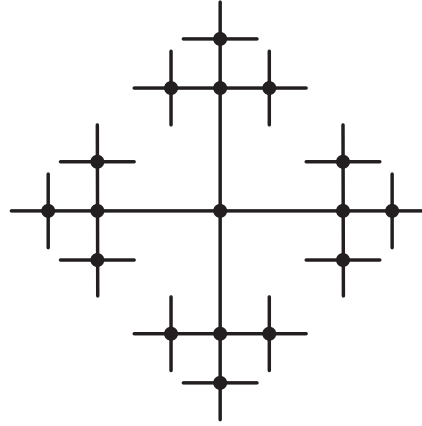
Presentamos a continuación algunos ejemplos de grafos de Cayley.



$$G = \mathbb{Z}, S = \{\pm 1\}.$$

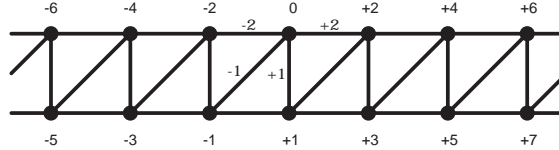


$$G = \mathbb{Z}^2, S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}.$$



$$G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

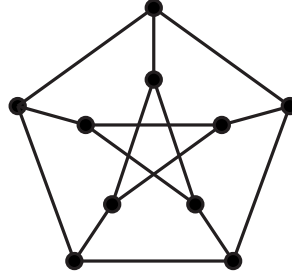
Nótese que el grafo de Cayley depende del sistema de generadores considerado. Sistemas de generadores distintos dan lugar a grafos de Cayley diferentes, como podemos observar en la figura siguiente:



$$G = \mathbb{Z}, S = \{\pm 1, \pm 2\}.$$

Grafos transitivos y casi-transitivos. Un *automorfismo* de un grafo localmente finito $\mathcal{G} = (V, E)$ es una aplicación biyectiva $\varphi : V \rightarrow V$ compatible con la relación de adyacencia tal que $(\varphi(v), \varphi(v')) \in E$ si $(v, v') \in E$. Denotamos $Aut(\mathcal{G})$ al grupo de los automorfismos de \mathcal{G} . Si el grafo \mathcal{G} verifica que para todo par de vértices $v, v' \in V$ existe un automorfismo que envía v en v' , decimos que \mathcal{G} es *transitivo*. En otras palabras, \mathcal{G} es transitivo si la acción de $Aut(\mathcal{G})$ sobre \mathcal{G} es transitiva.

El ejemplo más común de grafos transitivos son los grafos de Cayley. En efecto, si G es un grupo y $\mathcal{G}(G, S)$ su grafo de Cayley respecto de un sistema de generadores finito S , para cada par de vértices $g, g' \in G$, la traslación por la izquierda $L_{g'g^{-1}}$ es un automorfismo que envía g en g' . No obstante, el grafo transitivo que presentamos a continuación muestra que no todo grafo transitivo es un grafo de Cayley:



Grafo de Petersen.

Los grafos casi-transitivos generalizan el concepto de grafo transitivo. Un grafo \mathcal{G} es *casi-transitivo* si la acción de $Aut(\mathcal{G})$ sobre \mathcal{G} tiene sólo una cantidad finita de órbitas.

1.1.3. Tasas de crecimiento de un grafo

En este apartado recordamos la definición de tasa de crecimiento de un grafo enraizado. Intuitivamente, si pensamos que el grafo crece desde la raíz, la tasa de crecimiento mide el modo de expandirse del grafo.

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo enraizado infinito. Definimos la *tasa de crecimiento exponencial inferior* de \mathcal{G} como

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$$

donde $s(n)$ es el cardinal de la esfera $S_n = \{x \in V \mid d(0, x) = n\}$. De igual modo, se define la *tasa de crecimiento exponencial superior* como

$$\overline{gr}(\mathcal{G}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}.$$

Cuando ambas tasas existen y coinciden, entonces se define la *tasa de crecimiento exponencial* como

$$gr(\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}.$$

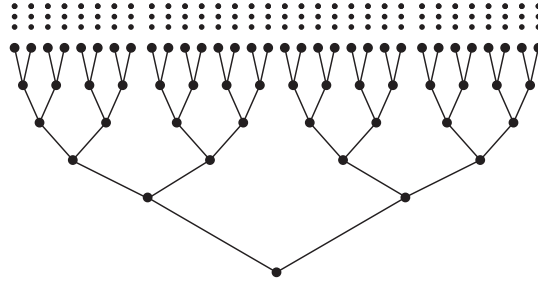
En teoría de foliaciones la definición que suele usarse es la siguiente

$$\underline{Gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} v(n)^{\frac{1}{n}}$$

donde $v(n)$ es el cardinal de la bola $B_n = \{x \in V \mid d(0, x) \leq n\}$. La relación entre ambas tasas resulta obvia, $\underline{gr}(\mathcal{G}) \leq \underline{Gr}(\mathcal{G})$.

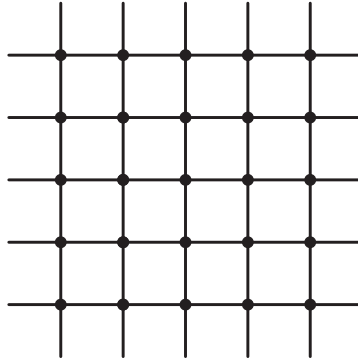
Definición 1.1 Se dice que un grafo \mathcal{G} tiene *crecimiento exponencial* si $\underline{gr}(\mathcal{G}) > 1$ y tiene *crecimiento subexponencial* si $\underline{gr}(\mathcal{G}) = 1$.

Ejemplos. El árbol binario T , es decir, el árbol regular con dos hijos, tiene crecimiento exponencial $gr(T) = 2$ pues la esfera de radio n tiene 2^n elementos.



$$gr(T) = 2.$$

El grafo de Cayley $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2, S)$ del grupo \mathbb{Z}^2 con $S = \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ tiene crecimiento subexponencial pues el cardinal de la esfera de radio $n > 0$ es $4n$.



$$gr(\mathcal{G}) = 1.$$

1.1.4. Casi-isometría de grafos

La definición de grafo de Cayley de un grupo depende, como se ha visto, del sistema de generadores considerado. Es natural esperar que los diferentes grafos de Cayley tengan alguna relación entre sí y que existan propiedades comunes que sean independientes de la elección de dicho sistema. En efecto, si consideramos dos conjuntos de generadores, los respectivos grafos de Cayley son casi-isométricos. Intuitivamente, esto significa que son indistinguibles cuando son observados desde una gran distancia.

En este apartado recordamos la definición de casi-isometría entre espacios métricos, prestando especial atención al caso particular de los grafos.

Espacios métricos casi-isométricos. Sean (X, d) y (X', d') dos espacios métricos. En la literatura suele encontrarse la siguiente definición (véase [29]):

Definición 1.2 Una función (no necesariamente continua) $f : X \rightarrow X'$ es una *casi-isometría* si existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que para todo $x, y \in X$

$$\frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2$$

y para todo $x' \in X'$ se verifica $d'(x', f(X)) \leq C_2$. Cuando tal función existe se dice que X y X' son *casi-isométricos*. Cuando $C_1 = 1$ entonces se dice que son *isométricos a gran distancia*.

También es habitual encontrarse con la siguiente definición (véase [31]):

Definición 1.3 Dos espacio métricos (X, d) , (X', d') son *casi-isométricos* si existen $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X$ lipschitzianas a gran distancia, es decir, existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq C_1d(x, y) + C_2, \quad \forall x, y \in X \\ d(g(x'), g(y')) &\leq C_1d'(x', y') + C_2, \quad \forall x', y' \in X' \end{aligned}$$

y además verifican

$$\begin{aligned} d(gf(x), x) &\leq C_2, \quad \forall x \in X \\ d'(fg(x'), x') &\leq C_2, \quad \forall x' \in X'. \end{aligned}$$

Por último presentamos otra manera de definir espacios casi-isométricos basándonos en la definición original de M. Gromov [35, 36, 37] y que utilizaremos con frecuencia a lo largo de nuestro trabajo.

Definición 1.4 i) Dado un número real $C \geq 0$, una C -red de un espacio métrico (X, d) es un subconjunto A tal que $d(x, A) \leq C$ para todo $x \in X$. Se dice que una red A es δ -separada si existe $\delta > 0$ tal que $d(a, b) \geq \delta$ para cada par $a, b \in A$.

ii) Dos espacios métricos (X, d) , (X', d') son *lipschitzianamente equivalentes* si existe una aplicación biyectiva $l : X \rightarrow X'$ bilipschitziana, es decir, tal que existe una constante $c \geq 0$ llamada *constante de Lipschitz*, tal que

$$\frac{1}{c}d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq cd(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Definición 1.5 Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen C -redes $A \subset X$ y $A' \subset X'$ lipschitzianamente equivalentes. Si A y A' son isométricos, entonces se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia*.

Es relativamente sencillo demostrar la equivalencia entre las tres definiciones. Para ver que la definición 1.5 implica la definición 1.3, basta definir $f : X \rightarrow X'$ de la siguiente manera: para cada $x \in X$, se define $f(x) = l(a)$ donde l es la aplicación bilipschitziana entre las redes y a es un elemento de A tal que $d(x, a) \leq C$. La función $g : X' \rightarrow X$ se define de igual manera sustituyendo l por l^{-1} . Ahora, resulta fácil ver que f y g cumplen las condiciones requeridas tomando $C_1 = c$ y $C_2 = 2cC$. Para comprobar que la definición 1.3 implica la definición 1.5, debemos reducir las aplicaciones bilipschitzianas a gran distancia f y g a la composición de los dos tipos básicos:

- Inclusión de una red en un espacio métrico
- Biyección bilipschitziana entre redes

Para ello, debemos observar que:

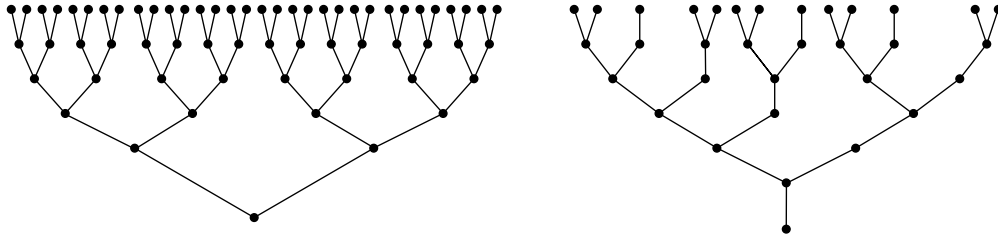
- La imagen de cualquier sección de f es una red de X , ya que las fibras de f tienen diámetro uniformemente acotado.
- La imagen de f es una red de X' .
- Cualquier aplicación bilipschitziana a gran distancia f se restringe en una aplicación bilipschitziana sobre cualquier red separada.

En este caso, debemos tomar $c = C_1 + C_2$ y $C = C_1C_2$.

Ejemplo 1.6 Los espacios \mathbb{Z} , $2\mathbb{Z}$ y \mathbb{R} son un ejemplo de espacios casi-isométricos. La inclusión de \mathbb{Z} y de $2\mathbb{Z}$ en \mathbb{R} ilustra el primer tipo de casi isometría, mientras que el isomorfismo entre \mathbb{Z} y $2\mathbb{Z}$ ilustra el segundo tipo.

Casi-isometría de grafos. En el caso particular de grafos de geometría acotada, el conjunto de vértices (con la métrica inducida) constituye una 1-red, de modo que todo grafo de geometría acotada es isométrico a gran distancia a su conjunto de vértices. Puesto que la casi-isometría es una propiedad que define una relación de equivalencia, si dos grafos $\mathcal{G} = (V, E)$ y $\mathcal{G}' = (V', E')$ son casi-isométricos, entonces los conjuntos de vértices V y V' con las respectivas métricas inducidas son a su vez casi-isométricos entre sí. Por tanto, dos grafos \mathcal{G} y \mathcal{G}' son casi-isométricos si y sólo si existen C -redes $A \subseteq V$ y $A' \subseteq V'$ lipschitzianamente equivalentes.

Ejemplo 1.7 Presentamos a continuación un ejemplo de árboles casi-isométricos.

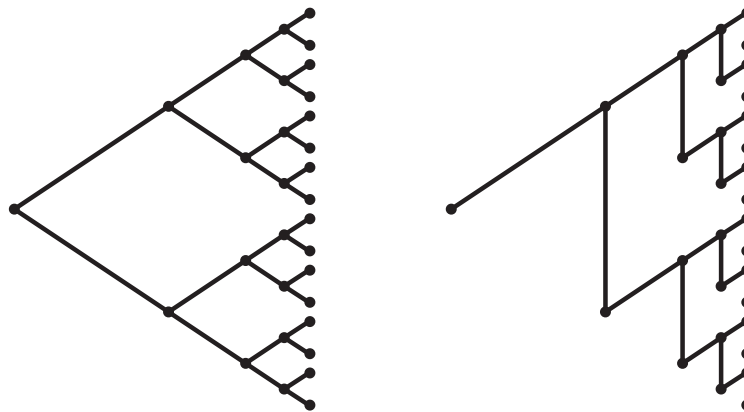


El primer árbol T es el *árbol binario*, es decir, el árbol regular de dos hijos. El segundo árbol T' es el *árbol de Fibonacci*, llamado así porque la sucesión formada por el número de vértices a distancia n de la raíz resulta ser la sucesión de Fibonacci F_n que verifica

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

con $F_0 = F_1 = 1$. La sucesión de Fibonacci tiene su origen en el famoso problema de la reproducción de los conejos. El árbol T' representa el crecimiento demográfico de una pareja de conejos cuya madurez sexual se alcanza al cabo de un mes.

En la siguiente figura podemos observar que ambos árboles tienen el mismo conjunto de vértices V , de manera que podemos tomar como redes $A = V$ y $A' = V$.



La identidad $id : A \rightarrow A'$ es una biyección que además es bilipschitziana puesto que $d_{T'}(x, y) \leq 2d_T(x, y)$ y $d_T(x, y) \leq 2d_{T'}(x, y)$ para todo par $x, y \in V$. Los árboles T y T' son por tanto casi-isométricos con constante de Lipschitz $c = 2$.

Ejemplo 1.8 Como vimos en la subsección §1.1.2, el grafo de Cayley de un grupo G depende del conjunto de generadores considerado. No obstante, cabe esperar que

dados dos sistemas de generadores finitos S y S' , los respectivos grafos de Cayley $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ y $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(G, S')$ tengan alguna relación entre sí. En efecto, los grafos \mathcal{G} y \mathcal{G}' con las respectivas métricas de las palabras d_S y $d_{S'}$ son casi-isométricos. Basta tomar como 1-red en cada uno de los grafos el conjunto de vértices, es decir, $A = A' = G$. Si denotamos n_s (resp. $n_{s'}$) al menor número de elementos de S (resp. S') necesarios para escribir el elemento $s \in S$ (resp. $s' \in S'$), es decir,

$$s = s'_{i_{n_s}} \dots s'_{i_1}, \quad s' = s_{i_{n_{s'}}} \dots s_{i_1}$$

con $s_{i_j} \in S$ y $s'_{i_j} \in S'$, entonces las 1-redes A y A' son lipschitzianamente equivalentes con constante de Lipschitz $c = \max_{s \in S, s' \in S'} \{n_s, n_{s'}\}$.

1.1.5. Espacio de finales de un grafo

En este apartado nos proponemos recordar la noción de final de un espacio métrico y en particular de un grafo. Recordaremos además la relación entre los espacios de finales de dos espacios casi-isométricos. Seguiremos como referencia [31].

Espacio de finales de un espacio topológico. Sea X un espacio Hausdorff y sea Y un espacio localmente compacto Hausdorff. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice *propia* si $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.

Definición 1.9 Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto.

- i) Se llama *geodésica* a una aplicación isométrica $c : [0, l] \rightarrow X$ con $l \in \mathbb{R}$, y *segmento geodésico* (de origen $c(0) = x$ y extremo $c(l) = y$) a su imagen. Se dice que (X, d) es un *espacio geodésico* si dos puntos cualesquiera x e y se pueden unir por un segmento geodésico.
- ii) Un *rayo* de X es una aplicación $r : [0, +\infty) \rightarrow X$ continua y propia. Diremos que r es un *rayo geodésico* si además es una isometría.

Nótese que los segmentos geodésicos (resp. los rayos geodésicos) de un grafo \mathcal{G} coinciden con los caminos de aristas finitos (resp. infinitos) que minimizan la distancia entre los vértices que lo forman.

Definición 1.10 Se dice que dos rayos r y r' *convergen al mismo final* si para todo compacto $K \subset X$ existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $r([N, \infty))$ y $r'([N, \infty))$ pertenecen a la misma componente conexa de $X - K$. La clase de equivalencia de un rayo r se denota $\mathcal{E}(r)$ y el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{E}(X)$ se denomina *espacio de finales* de X .

Si X es conexo por caminos y fijamos un punto base $x_0 \in X$, cada clase de equivalencia $\mathcal{E}(r)$ contiene al menos un rayo geodésico que parte de x_0 . La prueba puede verse en [14].

Para definir una topología sobre $\mathcal{E}(X)$ basta con describir la convergencia entre finales. Una sucesión $\mathcal{E}(r_n) \rightarrow \mathcal{E}(r)$ si y sólo si para cada compacto $K \subset X$ existe una sucesión de enteros N_n tal que $r_n([N_n, \infty))$ y $r([N_n, \infty))$ pertenecen a la misma componente conexa de $X - K$ para todo $n \geq n_0$ con n_0 suficientemente grande. Luego un conjunto $B \subset \mathcal{E}(X)$ es cerrado si para cada sucesión $\mathcal{E}(r_n) \in B$ verificando $\mathcal{E}(r_n) \rightarrow \mathcal{E}(r)$ se tiene que $\mathcal{E}(r) \in B$.

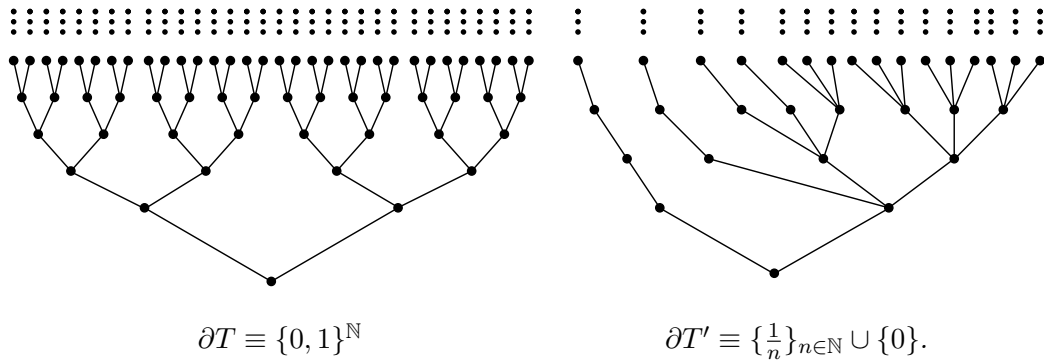
Casi-isometría y espacio de finales. El espacio de finales es invariante por casi-isometría. En efecto, los espacios de finales de espacios casi-isométricos son homeomorfos:

Proposición 1.11 *Si X e Y son espacios métricos localmente compactos, entonces una casi-isometría $f : X \rightarrow Y$ induce un homeomorfismo $f_* : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$.*

Aunque no detallaremos la demostración, conviene describir de manera explícita el homeomorfismo f_* . El resto de la prueba puede verse en [14]. Sea r un rayo geodésico en X y sea $f_*(r)$ el rayo de Y que se obtiene por concatenación de segmentos geodésicos entre $f(r(n))$ y $f(r(n + 1))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es una casi-isometría, $f_*(r)$ es un rayo propio. Además, el final que define es independiente de la elección de tales segmentos geodésicos. Definimos entonces $f_* : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ como $f_*(\mathcal{E}(r)) = \mathcal{E}(f_*(r))$ para cada rayo geodésico r en X .

Espacio de finales de un árbol. En el caso de un árbol enraizado, el espacio de finales $\mathcal{E}(T)$ coincide con el borde geométrico ∂T formado por todos los rayos geodésicos de T que parten del origen. Dotamos al espacio ∂T de la siguiente métrica: si dos rayos $\xi, \eta \in \partial T$ tienen exactamente n aristas en común, entonces $d(\xi, \eta) = e^{-n}$.

Ejemplo 1.12 Obsérvese que los árboles enraizados que presentamos a continuación poseen espacios de finales muy diferentes:



En el primer caso, el espacio de finales del árbol T no tiene puntos aislados, todos son puntos de acumulación. De hecho ∂T es un conjunto de Cantor. El espacio de finales del segundo árbol T' sí posee puntos aislados y un único punto de acumulación.

Como consecuencia de la proposición 1.11, tenemos que la topología del borde de un árbol es un invariante del tipo de casi-isometría. En la subsección §2.1.4 precisaremos de qué modo afecta la casi-isometría de árboles a las métricas de sus respectivos bordes (véase la proposición 2.20).

Espacio de finales de un grafo de Cayley. Si S y S' son dos conjuntos finitos de generadores de un grupo G , entonces la casi-isometría $f : \mathcal{G}(G, S) \rightarrow \mathcal{G}'(G, S')$ induce un homeomorfismo entre los espacios de finales $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}(\mathcal{G}')$. El teorema de Hopf [43] nos proporciona más información sobre el espacio de finales de los grafos de Cayley de un grupo finitamente generado:

Teorema 1.13 *Sea G un grupo finitamente generado y S un sistema finito de generadores de G . El grafo de Cayley $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ tiene 0, 1, 2 o un conjunto de Cantor de finales.*

Algunas propiedades algebraicas de los grupos están estrechamente relacionadas con el número de finales de sus grafos de Cayley. Por ejemplo, un grupo con 2 finales tiene crecimiento lineal, mientras que un grupo con un Cantor de finales tiene crecimiento exponencial. Estas propiedades son consecuencia del teorema de Stallings que describe la estructura de los grupos con más de un final. Antes de enunciar dicho teorema, recordemos las definiciones de producto libre amalgamado y HNN(Higman-Neumann-Neumann)-extensión.

Definición 1.14 Sean A, B dos grupos finitamente generados y $j_1 : F \rightarrow A$, $j_2 : F \rightarrow B$ dos homomorfismos inyectivos de grupos. Se define el *producto libre amalgamado*

$$A *_F B := A * B / N$$

donde N es el menor subgrupo normal del producto libre $A * B$ que contiene al conjunto $\{j_1(f)j_2^{-1}(f) \mid f \in F\}$.

Definición 1.15 Sea A un grupo finitamente generado y sea $\phi : H \rightarrow K$ un isomorfismo entre dos subgrupos H y K de A . Se define la HNN-extensión A_ϕ de A respecto de ϕ como

$$A_\phi := A * |t| / N$$

donde $|t|$ es un grupo libre cíclico y N el menor subgrupo normal de $A * |t|$ que contiene al conjunto $\{t h t^{-1} \phi(h)^{-1} \mid h \in H\}$.

Teorema 1.16 (Stallings [64]) *Un grupo G finitamente generado tiene más de un final si y sólo si puede expresarse como producto amalgamado $G = A *_F B$ con F finito o como HNN-extensión $G = A_\phi$ con H finito.*

Corolario 1.17 *Si G es un grupo finitamente generado con 2 finales, entonces existe un subgrupo finito normal N tal que G/N es isomorfo a \mathbb{Z} o $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.*

De los resultados anteriores se deduce que un grupo finitamente generado con 2 finales tiene crecimiento lineal. De igual manera, un grupo finitamente generado con un Cantor de finales tiene crecimiento exponencial.

1.2. Pseudogrupos

El concepto de pseudogrupo generaliza la noción de grupo de transformaciones. Uno de los principales objetivos de nuestro trabajo es estudiar dicho concepto y extender propiedades geométricas de los grupos al contexto de los pseudogrupos a través del número de ramificación y de la percolación. Nuestro interés por los pseudogrupos y sus propiedades está motivado por la noción de pseudogrupo de holonomía que juega un importante papel en la teoría de foliaciones.

1.2.1. Pseudogrupos topológicos y pseudogrupos medibles

Recordemos en primer lugar la definición de pseudogrupo topológico (véase [39, 40, 41]).

Definición 1.18 Un *pseudogrupo de transformaciones* de un espacio topológico X es una familia Γ de homeomorfismos entre abiertos de X tales que:

1. si $\gamma : A \rightarrow B$ y $\gamma' : A' \rightarrow B'$ pertenecen a Γ entonces la composición

$$\gamma' \circ \gamma : \gamma^{-1}(B \cap A') \rightarrow \gamma'(B \cap A')$$

pertenece a Γ ,

2. si $\gamma \in \Gamma$, entonces $\gamma^{-1} \in \Gamma$,
3. la aplicación identidad id_X pertenece a Γ ,
4. si $\gamma : A \rightarrow B$ está localmente en Γ , es decir $\gamma|_{A'} \in \Gamma$ para todo abierto $A' \subset A$, entonces $\gamma \in \Gamma$.

Definición 1.19 Si sustituimos en la definición anterior X por un espacio boreliano estándar (i.e. un espacio dotado de una σ -álgebra isomorfa a la σ -álgebra de los borelianos de un espacio polaco) y los homeomorfismos locales $\gamma \in \Gamma$ por isomorfismos borelianos entre partes borelianas de X , obtenemos de la misma manera la noción de *pseudogrupo medible*. A partir de ahora, centraremos nuestro trabajo en el contexto de pseudogrupos medibles sobre espacios borelianos estándar.

Para cada $x \in X$, se define la *órbita* de x como

$$\Gamma(x) = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma : x \in \text{dom}(\gamma)\}$$

y la *isotropía* como $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}$. Decimos que un boreliano $B \subset X$ es *saturado* si es unión de órbitas y para cada boreliano $A \subset X$ definimos el *saturado de A* por Γ como el conjunto $\Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma(x)$.

1.2.2. Ejemplos

Para ilustrar la noción de pseudogrupo medible y motivar su estudio, vamos a recordar algunos ejemplos básicos:

Acciones de grupos. Es el ejemplo fundamental que motiva el estudio de los pseudogrupos. Una acción boreliana de un grupo numerable G sobre un espacio boreliano estándar X define un pseudogrupo medible formado por las restricciones a borelianos de los isomorfismos borelianos $\tau_g : X \rightarrow X$ donde $\tau_g(x) = g \cdot x$ para $x \in X$ y $g \in G$.

Relaciones de equivalencia medibles discretas. Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espacio boreliano estándar X se dice *medible discreta* si las clases de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ son numerables y el grafo es un boreliano de $X \times X$. Según un resultado de [23], la relación \mathcal{R} está definida mediante la acción boreliana de un grupo numerable. En general, si llamamos *transformación parcial* de \mathcal{R} a cualquier isomorfismo boreliano $\gamma : A \rightarrow B$ entre partes borelianas de X cuyo grafo

$$G(\gamma) = \{(x, y) \in X \times X \mid y = \gamma(x)\} \subset \mathcal{R},$$

entonces el pseudogrupo formado por todas las transformaciones parciales define la relación \mathcal{R} .

Pseudogrupo de Holonomía. Sea M un espacio topológico. Una *laminación* \mathcal{L} de M de dimensión p está definida por un atlas foliado $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ de abiertos distinguidos U_i y cartas locales $\varphi_i : U_i \rightarrow D_i \times X_i$ donde D_i es un disco abierto de \mathbb{R}^p y X_i es un espacio topológico. Además, el cambio de cartas

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

viene dado por:

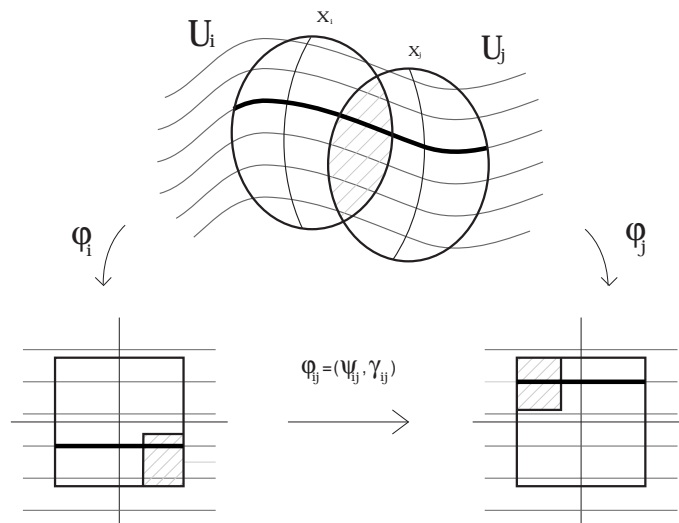
$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(x, y) = (\psi_{ij}^y(x), \gamma_{ij}(y))$$

donde γ_{ij} es un homeomorfismo y ψ_{ij}^y un difeomorfismo que depende continuamente de y en la topología \mathcal{C}^0 . Llamamos *transversal* a la unión disjunta $X = \bigsqcup X_i$ y *transversal local* a cada espacio X_i . Los conjuntos $P_i = \varphi_i^{-1}(D_i \times \{x\})$ son subvariedades de dimensión p llamadas *placas*. Las placas de las distintas cartas se solapan dando lugar a subvariedades conexas de dimensión p llamadas *hojas*.

Siempre podemos suponer que el atlas foliado $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ es *bueno*, lo que significa que:

1. \mathcal{A} es localmente finito y numerable (finito si M compacto),
2. los abiertos U_i son relativamente compactos,
3. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $U_i \cup U_j$ está contenido en un abierto distinguido U_{ij} .

Cuando el atlas es bueno, los homeomorfismos locales γ_{ij} de X_i en X_j se extienden a un abierto maximal de X_i . Se define el *pseudogrupo de holonomía* Γ de \mathcal{L} reducido a X como el pseudogrupo generado por los homeomorfismos γ_{ij} . La relación de equivalencia definida por la acción de Γ sobre X viene dada por la pertenencia a la misma hoja y se llama *relación de equivalencia definida por \mathcal{L} sobre X* . Si todas las hojas tienen holonomía trivial, la relación y la acción se pueden identificar.



Si en lugar de suponer que las transversales X_i son espacios topológicos, suponemos que son espacios borelianos estándar de manera que los conjuntos U_i son espacios MT y los cambios de carta son isomorfismos locales en esa categoría (en el sentido de [9] y [10]) se tiene una *laminación boreliana* o medible. Obsérvese que el pseudogrupo de holonomía de una laminación boreliana es medible.

1.2.3. Equivalencia de pseudogrupos

Sea Γ un pseudogrupo actuando sobre un espacio topológico X e Y un abierto de X que corte a todas las órbitas. Se define el *pseudogrupo inducido* $\Gamma|_Y$ como el pseudogrupo generado por los elementos de Γ cuyo dominio y rango está restringido a Y . La reducción de Γ a Y es el ejemplo básico que modela la *equivalencia de pseudogrupos* en el sentido de Haefliger, véase [40]. Recordemos la definición precisa:

Definición 1.20 Dos pseudogrupos topológicos Γ y Γ' que operan respectivamente sobre espacios topológicos X y X' son *equivalentes* si existe una familia Φ de homeomorfismos entre abiertos de X y abiertos de X' de manera que

$$\Gamma' = \Phi \circ \Gamma \circ \Phi^{-1} \quad y \quad \Gamma = \Phi^{-1} \circ \Gamma' \circ \Phi$$

es decir, si $\varphi, \varphi' \in \Phi$ y $\gamma \in \Gamma$, entonces $\varphi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi' \in \Gamma'$ y viceversa.

Puesto que Y corta a todas las órbitas de Γ , cada punto $x \in X$ pertenece al dominio $dom(\gamma)$ de algún $\gamma \in \Gamma$ tal que $rang(\gamma) \subset Y$. Si denotamos Φ_x^Y al conjunto formado por dichos elementos y $\Phi_X^Y = \bigcup_{x \in X} \Phi_x^Y$, la familia $\Phi = \Phi_X^Y \cup (\Phi_X^Y)^{-1}$ define una *equivalencia* entre Γ y $\Gamma|_Y$ en el sentido de la definición anterior. A partir de la equivalencia natural entre Γ y $\Gamma|_Y$, resulta claro que la siguiente definición es equivalente a la anterior:

Definición 1.21 Dos pseudogrupos Γ y Γ' que operan sobre los espacios X y X' respectivamente son equivalentes si y sólo si existe un pseudogrupo Γ'' operando sobre $X'' = X \sqcup X'$ tal que X y X' cortan todas las órbitas de Γ'' y verifica que $\Gamma''|_X = \Gamma$ y $\Gamma''|_{X'} = \Gamma'$.

Si sustituimos los espacios topológicos X y X' por espacios borelianos estándar y los homeomorfismos locales por isomorfismos borelianos entre partes borelianas, obtenemos de la misma manera la noción de equivalencia entre pseudogrupos medibles.

1.2.4. Medidas

Sea Γ un pseudogrupo medible actuando sobre un espacio boreliano estándar X y μ una medida de probabilidad sobre X .

Definición 1.22 Se dice que μ es *invariante* por Γ si todos los elementos de Γ respetan μ , es decir,

$$\gamma_*\mu(A) = \mu(\gamma^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ y para todo $A \subset \text{dom}(\gamma^{-1})$ boreliano de X .

Definición 1.23 Se dice que μ es *casi-invariante* respecto de Γ si todos los elementos de Γ respetan los conjuntos de medida nula, o de manera equivalente

$$\mu(A) = 0 \implies \mu(\Gamma(A)) = 0.$$

En tal caso decimos que se trata de un *pseudogrupo de transformaciones no singulares* del espacio de probabilidad (X, μ) .

Definición 1.24 Se dice que μ es una medida *ergódica* si los conjuntos saturados son de medida nula o total, esto es,

$$\mu(\Gamma(A)) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu(\Gamma(A)) = 1$$

para todo boreliano $A \subset X$.

A partir de ahora, usaremos el término *genérico* para referirnos a conjuntos de medida total.

En el caso de las relaciones de equivalencia, las nociones anteriores se definen de modo análogo. La medida μ es *casi-invariante* respecto de la relación de equivalencia \mathcal{R} si las transformaciones parciales de \mathcal{R} conservan los conjuntos de medida nula, o equivalentemente, si el saturado $\mathcal{R}[A]$ de un boreliano A de medida nula es de medida nula. De igual modo, μ es *invariante* por \mathcal{R} si lo es por las transformaciones parciales de \mathcal{R} y μ es *ergódica* si $\mu(\mathcal{R}[A]) = 0$ ó 1 .

Sea μ una medida sobre X y $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$. Integrandolo las medidas de contar de las fibras de la proyección de \mathcal{R} en X por la izquierda $(x, y) \rightarrow x$ (resp. por la derecha $(x, y) \rightarrow y$) respecto de μ , se obtiene la medida de contar por la izquierda $d\tilde{\mu}(x, y) = d\mu(x)$ (resp. derecha $d\tilde{\mu}^{-1}(x, y) = d\tilde{\mu}(y, x) = d\mu(y)$) sobre \mathcal{R} . Es decir, para cada boreliano $A \subset \mathcal{R}$,

$$\tilde{\mu}(A) = \int |A^x| d\mu(x)$$

donde $|A^x|$ es el cardinal del conjunto $A^x = \{y \in X \mid (x, y) \in A\} \subset \mathcal{R}[x]$.

La medida μ es casi-invariante si y sólo si $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\mu}^{-1}$ son equivalentes. En tal caso la derivada de Radon-Nikodym está dada por $\delta(x, y) = d\tilde{\mu}/d\tilde{\mu}^{-1}(x, y)$. Si además la medida μ es invariante, entonces la derivada $\delta(x, y) = 1$.

1.3. Pseudogrupos grafados

En esta sección extendemos la noción de grafo de Cayley al contexto de los pseudogrupos finitamente generados. En este caso, el sistema finito de generadores del pseudogrupo proporciona una estructura de grafo conexo localmente finito en cada una de las órbitas del pseudogrupo. Introducimos además el análogo a la casi-isometría de grafos en términos de pseudogrupos grafados, que vendrá definida por la equivalencia de Kakutani.

1.3.1. Pseudogrupos grafados

Consideremos Γ un pseudogrupo medible actuando sobre un espacio boreliano estándar X . Un *sistema de generadores* de Γ es una familia $\Sigma \subset \Gamma$ verificando que para todo $\gamma \in \Gamma$ y para todo $x \in \text{dom}(\gamma)$ existe un entorno $U \subset X$ de x tal que:

$$\gamma|_U = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}|_U$$

donde $\sigma_{i_j} \in \Sigma$ para $j = 1, \dots, n$. Diremos que Γ es un *pseudogrupo finitamente generado* si existe un sistema de generadores finito.

Procediendo de modo análogo a la construcción del grafo de Cayley de un grupo, podemos realizar cada órbita $\Gamma(x)$ como conjunto de vértices de un grafo conexo $\Gamma_\Sigma(x)$ denominado *grafo de Cayley de la órbita en x* de (Γ, Σ) . En efecto, dos elementos $y, z \in \Gamma(x)$ estarán unidos por una arista si y sólo si existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = z$. Si cada conjunto $\Sigma_x = \{\sigma \in \Sigma \mid x \in \text{dom}(\sigma)\}$ es finito, entonces el grafo que contiene a x es localmente finito. Cuando Σ es finito, se obtiene un grafo de geometría acotada, en particular localmente finito. En general, podemos dotar a cada órbita de una métrica natural definida como en el caso de los grafos de Cayley: la distancia $d_\Sigma(y, z)$ entre dos puntos y y z de la misma órbita es el mínimo de los enteros k tales que $z = \sigma_{i_k} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(y)$ con $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k} \in \Sigma$.

Definición 1.25 Llamamos *pseudogrupo grafado* (finitamente generado) al par (Γ, Σ) formado por un pseudogrupo medible Γ que actúa sobre un espacio boreliano estándar X y un sistema (finito) de generadores Σ de Γ . Observemos que el boreliano

$$E = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists \sigma \in \Sigma : y = \sigma(x)\}$$

define una estructura de grafo no dirigido sobre X cuyas componentes conexas son las órbitas $\Gamma_\Sigma(x)$.

De ahora en adelante, al hablar de pseudogrupos nos referiremos siempre a pseudogrupos finitamente generados.

1.3.2. Ejemplos

Presentamos a continuación los ejemplos más básicos de pseudogrupos grafados:

Acciones grafadas de grupos. La acción boreliana de un grupo numerable G dotado de un sistema finito de generadores S sobre un espacio boreliano estándar X define un pseudogrupo grafado medible. El sistema de generadores formado por los isomorfismos borelianos $\tau_s : X \rightarrow X$ con $s \in S$ define la estructura grafada de las órbitas.

Relaciones de equivalencia medibles discretas. Una *estructura grafada* sobre las clases de una relación de equivalencia medible discreta (X, \mathcal{R}) viene dada por un subconjunto medible simétrico $E \subset \mathcal{R}$, de manera que dos puntos $x, y \in X$ están unidos por una arista si y sólo si $(x, y) \in E$. Llamamos *relación de equivalencia grafada* a (X, \mathcal{R}, E) . Denotamos $\mathcal{R}_E[x]$ a la clase de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ dotada de la estructura de grafo E . Decimos que la estructura de grafo E es conexa si los grafos $\mathcal{R}_E[x]$ son conexos. Toda estructura de grafo conexa E sobre (X, \mathcal{R}) proviene de un pseudogrupo de transformaciones parciales.

Pseudogrupo de holonomía grafado. Si \mathcal{L} es una laminación topológica de un espacio compacto M , el conjunto de homeomorfismos locales γ_{ij} descrito en el ejemplo 1.47 genera el pseudogrupo de holonomía y define una estructura de grafo sobre las órbitas. Lo mismo sucede si consideramos el conjunto de isomorfismos borelianos que generan el pseudogrupo de holonomía de una laminación boreliana.

1.3.3. Equivalencia de Kakutani

La equivalencia de Kakutani para pseudogrupos grafados generaliza la noción de casi-isometría entre grafos. Intuitivamente, dos pseudogrupos son Kakutani-equivalentes si sus órbitas genéricas son indistinguibles a gran distancia.

Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados finitamente generados actuando sobre espacios borelianos estándar X y X' , dotados de medidas casi-invariantes μ y μ' respectivamente.

Definición 1.26 ([29]) Se dice que Γ' es un *factor de Kakutani* de Γ si existe una aplicación boreliana $P : X \rightarrow X'$ con $P(X)$ de medida total, tal que:

1. un boreliano de X' tiene medida nula si y sólo si su imagen inversa tiene medida nula, es decir, $P_*\mu$ es equivalente a μ' ;
2. para μ -casi todo punto $x \in X$, la aplicación P envía la órbita $\Gamma(x)$ sobre la órbita $\Gamma'(P(x))$;
3. existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que, para μ -casi todo x y para cada par $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$, se tiene:

$$\frac{1}{C_1}d_\Sigma(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\Sigma'}(P(x_1), P(x_2)) \leq C_1d_\Sigma(x_1, x_2) + C_2$$

Se dice que dos pseudogrupos medibles son *equivalentes en el sentido de Kakutani* si poseen un factor de Kakutani en común.

Ejemplo 1.27 Sea Γ un pseudogrupo medible que actúa sobre un espacio boreliano (X, μ) dotado de una medida casi-invariante. Si Σ y Σ' son dos sistemas finitos de generadores, entonces los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y (Γ, Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani. Para probarlo, basta ver que los grafos de Cayley de cada órbita respecto de Σ y Σ' son casi-isométricos. El procedimiento es el análogo al presentado en el ejemplo 1.8 para probar la casi-isometría entre grafos de Cayley de un grupo.

1.3.4. Recorridos aleatorios en un pseudogrupo grafado

Un *recorrido aleatorio* en un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) actuando sobre un espacio de probabilidad (X, μ) consiste en elegir un elemento de X al azar y movernos aleatoriamente en su órbita a través de las aristas. En este apartado seguiremos principalmente como referencia el artículo de F. Paulin [58].

Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad casi-invariante μ . Escribiremos $x \sim y$ si x e y están unidos por una arista, es decir, si existe un generador $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma(x) = y$.

Definición 1.28 Se llama *núcleo de transición* a una aplicación medible π definida sobre el conjunto de las aristas E con valores en $(0, 1]$ y cuya restricción a las aristas de μ -casi todo grafo $\Gamma_\Sigma(x)$ es *markoviana*, es decir,

$$\sum_{y \sim x} \pi(x, y) = 1$$

para μ -casi todo $x \in X$. Identificaremos abusivamente todas las aristas que compartan origen y extremo, y por consiguiente identificaremos el conjunto de las aristas con el conjunto $\mathcal{K} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. La aplicación medible inducida por el núcleo de transición se extenderá a una aplicación medible sobre $\mathcal{R} = \{(x, \gamma(x)) \in X \times X \mid \gamma \in \Gamma\}$ que denotaremos también π y que se identificará con un sistema medible de medidas de probabilidad $\pi(x, -)$ sobre $\Gamma(x)$ donde $\pi(x, y)$ es la probabilidad de paso de x a y si $x \sim y$ y $\pi(x, y) = 0$ en otro caso.

Ejemplo 1.29 El ejemplo fundamental es el de *núcleo de transición reversible*, es decir, asociado a un *sistema medible de conductancias* $c : \mathcal{K} \rightarrow (0, +\infty)$ tal que $c(x, y) = c(y, x)$. Se define para cada $x \in X$, la aplicación $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$ y el núcleo de transición

$$\pi(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)}.$$

Un caso particular es el del *núcleo de transición simple* asociado al sistema de conductancias constante igual a 1. En este caso, $\pi(x, y) = \frac{1}{\text{val}_\Sigma(x)}$.

Definición 1.30 Se llama *recorrido aleatorio* sobre $\Gamma_\Sigma(x)$ al conjunto Ω_x de las sucesiones $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre $\Gamma(x)$, dotado de la σ -álgebra generada por los cilindros $\{Z \in \Gamma(x)^\mathbb{N} \mid Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n\}$ y de la medida de probabilidad

$$P_x[Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n] = \pi_0^x(x_0)\pi(x_0, x_1) \dots \pi(x_{n-1}, x_n)$$

donde $x_0, \dots, x_n \in \Gamma(x)$ y π_0^x es la medida de Dirac en x . Llamamos *distribución del recorrido aleatorio en tiempo n* a la medida de probabilidad $\pi_n(x, -) = (\alpha_n)_* P_x$ inducida por la proyección $\alpha_n : Z \in \Gamma(x)^\mathbb{N} \mapsto Z_n \in \Gamma(x)$. Las medidas π_0^x y $\pi(x, -)$ son las distribuciones de la marcha aleatoria en tiempo $n = 0$ y $n = 1$. En lenguaje probabilístico, un recorrido aleatorio sobre $\Gamma_\Sigma(x)$ es una cadena de Markov $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados numerable $\Gamma(x)$, probabilidad de transición π y distribución inicial π_0^x .

Diremos que la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ es *recurrente* si $P_x[Z \in \Omega_x \mid \exists n > 0, Z_n = x] = 1$. En caso contrario, diremos que la órbita es *transitoria*.

Definición 1.31 Llamamos *recorrido aleatorio* sobre (las órbitas de) un pseudogrupo (Γ, X, μ) , dotado de un sistema de generadores Σ , al promedio respecto de μ de los recorridos aleatorios sobre las órbitas $\Gamma_\Sigma(x)$, es decir, el conjunto $\Omega = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)^\mathbb{N}$, dotado de la σ -álgebra generada por los cilindros

$$C = \{Z \in \Omega \mid Z_0 \in B_0, \dots, Z_n \in B_n\}$$

determinados por un número finito de borelianos B_0, \dots, B_n de X y de la medida de probabilidad $P = \int P_x d\mu(x)$ dada por:

$$P[Z_0 \in B_0, \dots, Z_n \in B_n] = P(C) = \int P_x(C \cap \Gamma(x)^{\mathbb{N}}) d\mu(x).$$

Llamamos *distribución del recorrido aleatorio en tiempo n* a la medida de probabilidad $(\alpha_n)_*P$ inducida por la proyección $\alpha_n : Z \in \Omega \mapsto Z_n \in X$. De nuevo, en lenguaje probabilístico, el recorrido aleatorio sobre Γ es una *cadena de Markov* $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados X , probabilidad de transición π y distribución inicial μ .

Decimos que el recorrido aleatorio sobre (Γ, Σ) es *recurrente* (resp. *transitorio*) si μ -casi toda órbita es recurrente (resp. transitoria), es decir, si $P[Z \in \Omega \mid Z_n = Z_0] = 1$ (resp. $P[Z \in \Omega \mid Z_n = Z_0] = 0$).

A continuación introducimos los operadores de difusión y laplaciano.

Definición 1.32 Llamamos *operador de difusión* al operador

$$D_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$$

definido por:

$$D_\pi f(x) = \sum_{y \sim x} \pi(x, y) f(y).$$

Se trata de un operador markoviano, es decir, un operador lineal con $\|D_\pi\| \leq 1$ que conserva las funciones constantes y es positivo sobre las funciones positivas.

El operador D_π actúa por dualidad sobre las medidas de X . En particular, las iteraciones del operador dual D_π^* aplicado a la medida μ dan lugar a las distribuciones $(\alpha_n)_*P$. En efecto, para todo boreliano B de X se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha_n)_*P(B) &= \int \left(\int \mathbf{1}_B(Z_n) dP_x(Z) \right) d\mu(x) \\ &= \int \left(\sum_{x_n \sim x_{n-1} \sim \dots \sim x} \pi(x, x_1) \dots \pi(x_{n-1}, x_n) \mathbf{1}_B(x_n) \right) d\mu(x) \\ &= \int D_\pi^n \mathbf{1}_B(x) d\mu(x) = (D_\pi^*)^n \mu(B). \end{aligned}$$

Nótese que las distribuciones $\pi_n(x, -) = (\alpha_n)_*P_x$ coinciden con las medidas $(D_\pi^*)^n \pi_0^x$, obtenidas por difusión de la medida de Dirac π_0^x .

Definición 1.33 Llamamos *operador laplaciano* al operador

$$\Delta_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$$

definido por:

$$\Delta_\pi f(x) = D_\pi f(x) - f(x) = \sum_{y \sim x} \pi(x, y) f(y) - f(x).$$

Ejemplos 1.34 En nuestro caso, puesto que las órbitas $\Gamma_\Sigma(x)$ son grafos localmente finitos, podemos suponer que el paso de un vértice a cada uno de sus vecinos es equiprobable considerando el *núcleo de transición simple* $\pi(x, y) = \frac{1}{\text{val}_\Sigma(x)}$. Se obtiene de ese modo el *recorrido aleatorio simple*, cuyo operador laplaciano está dado por $\Delta_\pi f(x) = \frac{1}{\text{val}_\Sigma(x)} \sum_{y \sim x} f(y) - f(x)$.

Definición 1.35 Decimos que una función esencialmente acotada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *armónica* si es invariante por el operador de difusión del calor $f = D_\pi f$ o equivalentemente si $\Delta_\pi f = 0$

Medidas armónicas. Una medida casi-invariante m sobre X se dice *armónica* o *estacionaria* respecto de π si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. m es conservada por el operador de difusión D_π^* ;
2. para toda función medible acotada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene $\int \Delta_\pi f dm = 0$.

La proposición siguiente nos da una caracterización de las medidas armónicas (véase [29],[58]):

Proposición 1.36 *Sea $S : \Omega \rightarrow \Omega$ el desplazamiento de Bernoulli definido por $S(Z)_n = Z_{n+1}$. Entonces, una medida casi-invariante m sobre X es armónica respecto de π si y sólo si la medida de probabilidad P sobre Ω es invariante respecto del desplazamiento de Bernoulli.*

A diferencia con el caso continuo, en el contexto discreto no tenemos asegurada la existencia de medidas armónicas. No obstante, cuando el operador de difusión D_π se puede extender a las funciones continuas, se puede garantizar la existencia de una medida armónica mediante un teorema de punto fijo (véase [58]). Por ejemplo, si consideramos una acción continua de un grupo sobre un espacio compacto, entonces existe una medida armónica.

1.3.5. Espacio de finales de un pseudogrupo grafado

Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) . En esta subsección estudiamos los espacios de finales de los grafos de Cayley de las órbitas del pseudogrupo y la existencia de propiedades genéricas relacionadas con dichos espacios. En [29], E. Ghys generaliza el teorema de Hopf con un resultado que prueba que las hojas genéricas de una laminación de un espacio compacto con una medida armónica tienen 0, 1, 2 ó un conjunto de Cantor de finales presentando cierta 'periodicidad' propia de los grafos de Cayley. F. Paulin da la versión discreta del teorema de Ghys, que podemos expresar en términos de pseudogrupos grafados:

Teorema 1.37 ([58]) *Si (Γ, Σ) es un pseudogrupo grafado actuando sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) dotado de una medida armónica, entonces para μ -casi todo $x \in X$, el grafo de Cayley de la órbita $\Gamma(x)$ tiene 0, 1, 2 ó un conjunto de Cantor de finales.*

Nótese que el teorema anterior se aplica al caso de grupos, resuelto por Hopf. En efecto, todo grupo finitamente generado actúa de manera esencialmente libre sobre algún espacio medible conservando la medida, de modo que las órbitas genéricas de la acción con la estructura de grafo inducida por un sistema de generadores finito son idénticas al grafo de Cayley definido por dicho sistema.

Los ingredientes principales de la prueba del teorema 1.37 son la Proposición fundamental y la versión discreta [58] del lema de la Hipersuperficie de Ghys [29]. Ambos resultados jugarán un papel fundamental en nuestro trabajo.

Proposición 1.38 (Proposición Fundamental) *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado que actúa sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) dotado de una medida armónica respecto de un núcleo de transición reversible, con sistema de conductancias acotado. Sea A un boreliano de X . Para μ -casi todo $x \in X$, la intersección de A y $\Gamma(x)$ o bien es vacía, o bien aproxima cualquier final de $\Gamma(x)$.*

Esta proposición es consecuencia de una versión del teorema ergódico válida para el desplazamiento de Bernoulli.

Proposición 1.39 (Lema de la hipersuperficie) *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado que actúa sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) dotado de una medida armónica. Supongamos que μ -casi toda órbita tiene al menos dos (respectivamente tres) finales. Entonces existe un boreliano A de X de medida positiva, un grafo finito enraizado \mathcal{G} y una aplicación inyectiva medible $\varphi : \mathcal{G} \times A \rightarrow X$ que envía $(*, x)$ sobre x y tal que:*

1. la aplicación φ induce un isomorfismo de $\mathcal{G} \times \{x\}$ sobre un subgrafo $\mathcal{G}.x$ de $\Gamma_\Sigma(x)$, para todo $x \in A$,
2. el espacio $\Gamma_\Sigma(x) - \mathcal{G}.x$ posee al menos dos (respectivamente tres) componentes conexas no acotadas, para todo $x \in A$,
3. para todo par $x, y \in A$ tal que $y \in \Gamma_\Sigma(x)$, la distancia entre $\mathcal{G}.x$ y $\mathcal{G}.y$ es al menos 2.

Estructura geométrica de las órbitas. Utilizando las versiones discretas de la proposición fundamental y el lema de la hipersuperficie descritas en el apartado anterior se obtiene información acerca de la estructura geométrica de las órbitas que poseen más de un final. En particular se prueba que todo conjunto de órbitas con al menos dos finales es Kakutani equivalente a una HNN-extensión de un pseudogrupo más simple. Veamos en primer lugar la definición de HNN-extensión para pseudogrupos medibles.

Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) con una medida casi-invariante.

Definición 1.40 Se dice que Γ' es una *HNN-extensión* de Γ si existen dos borelianos disjuntos A^+, A^- de X y una aplicación biyectiva casi-invariante $\phi : A^+ \rightarrow A^-$ tal que Σ' es la unión disjunta de Σ y el isomorfismo ϕ , verificando:

1. la medida $\mu(A^+)$ es positiva,
2. cada arista de la forma $(x, \phi^\pm(x))$ desconecta la órbita de Γ' a la que pertenece,
3. para μ -casi todo $x \in A^\pm$, la órbita de x para $\Gamma|_{A^\pm}$ no se reduce a x .

Diremos que una HNN-extensión es *no trivial* si además satisface:

4. para μ -casi todo $x \in A^\pm$, la órbita de x para $\Gamma|_{A^\pm}$ contiene al menos tres puntos.

Teorema 1.41 ([58]) *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado sobre (X, μ) con μ finita y armónica respecto de un núcleo de transición reversible con sistema de conductancias acotado. Un conjunto de medida no nula de órbitas posee al menos dos (respectivamente tres) finales si y sólo si (Γ, Σ) es Kakutani equivalente a una HNN-extensión (respectivamente HNN-extensión no trivial).*

Como consecuencia del teorema 1.37 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.42 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado verificando las hipótesis del teorema anterior. Si μ es ergódica, entonces (Γ, Σ) es Kakutani equivalente a una HNN-extensión no trivial si y sólo si μ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales.*

Corolario 1.43 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado verificando las hipótesis del teorema anterior. Si μ es ergódica y μ -casi toda órbita tiene exactamente dos finales, entonces (Γ, Σ) es Kakutani equivalente a una HNN-extensión de un pseudogrupo grafado cuyas órbitas son casi todas finitas y cortan a A^+ y A^- en exactamente dos puntos.*

Del corolario anterior se deduce el siguiente resultado acerca del crecimiento de los pseudogrupos con 2 finales:

Corolario 1.44 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado verificando las hipótesis del teorema anterior. Entonces μ -casi toda órbita con dos finales tiene crecimiento lineal.*

1.4. Promediabilidad

Los grupos promediables son aquellos que admiten un promedio invariante, es decir, una medida finitamente aditiva, unitaria e invariante por traslaciones. Un ejemplo inmediato son los grupos finitos y los grupos compactos puesto que siempre poseen una medida de probabilidad invariante. De hecho, la noción de promediabilidad es la generalización natural de la finitud o la compacidad. Una de las principales aplicaciones de la promediabilidad es la propiedad de punto fijo para acciones de grupos promediables sobre espacios compactos.

En esta sección presentamos las definiciones de grupo promediable, acción promediable y pseudogrupo promediable, así como su relación con la existencia de sucesiones de Følner.

1.4.1. Grupo promediable

Sea G un grupo numerable. Una *media* m sobre G es un funcional $m : l^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ positivo (i.e. $m(f) \geq 0$ si $f \geq 0$) y unitario (i.e. $m(1) = 1$) definido sobre el espacio $l^\infty(G)$ de las funciones de G en \mathbb{R} acotadas. Denotamos $l_1^1(G)$ al espacio de las medidas de probabilidad en G y $(l^\infty)_1^{*+}(G)$ al espacio de las medias en G .

Definición 1.45 El grupo G es *promediable* si admite una media invariante, esto es, si existe $m \in (l^\infty)_1^{*+}(G)$ tal que $g_*m = m$ para cada $g \in G$, donde $g_*m(f) = m(g^{-1}f)$ para $f \in l^\infty(G)$ y $g^{-1}f(g') = f(gg')$.

La cuestión sobre la existencia de medidas finitamente aditivas e invariantes por traslaciones en \mathbb{R} se debe a H. Lebesgue. Más tarde J. Von Neumann introduce la noción de grupo promediable. No obstante, el término y la definición corresponde a M. Day. Para la sección de grupos promediabiles recomendamos como referencia [33] y [57]. Presentamos a continuación definiciones equivalentes a la promediabilidad de grupos:

Propiedad de punto fijo. Decimos que G posee la *propiedad de punto fijo* si para cada acción continua de G sobre un espacio métrico compacto X , existe una medida de probabilidad μ sobre X invariante por la acción de G , es decir, un punto fijo de la acción de G sobre $l_1^1(X)$:

$$\exists \mu \in l_1^1(X) : g_*\mu = \mu, \forall g \in G.$$

Condición de Reiter. Entre las definiciones equivalentes a la promediabilidad, la más constructiva se formula en términos de sucesiones de medidas de probabilidad asintóticamente invariantes en el grupo. Decimos que el grupo G cumple la *condición de Reiter* si $\exists \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in l_1^1(G)$ tales que para todo $g \in G$,

$$\|g_*\lambda_n - \lambda_n\| \rightarrow 0.$$

Condición de Følner. Un grupo G cumple la *condición de Følner* si posee una sucesión de subconjuntos finitos de G , $\{A_n\} \subset G$, tales que

$$\frac{|gA_n \Delta A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0$$

para todo $g \in G$, donde $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$. La sucesión $\{A_n\}$ se llama *sucesión de Følner*. Cuando G es un grupo finitamente generado, podemos caracterizar la condición de Følner en términos de propiedades isoperimétricas de sus grafos de Cayley. En efecto, G verifica la condición de Følner si

$$\exists \{A_n\}, A_n \subset V, |A_n| < \infty : \frac{|\partial A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0$$

donde V es el conjunto de vértices del grafo de Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ y

$$\partial A_n = \{g \in A_n : \exists s \in S, sg \notin A_n\}.$$

Teorema 1.46 *Sea G un grupo numerable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es promediable,
2. G posee la propiedad de punto fijo,
3. G verifica la condición de Reiter,
4. G verifica la condición de Følner.

Las pruebas pueden verse en [33] y [67].

Ejemplos 1.47 Presentamos a continuación algunos ejemplos de grupos promediables:

1. Todo grupo finito G es promediable. En efecto, basta tomar $A_n = G$.
2. Un grupo G con crecimiento subexponencial es promediable (véase [45]).
3. Un grupo abeliano G es promediable (véase [68]).
4. Un subgrupo H de un grupo promediable G es promediable (véase [68]).
5. Un grupo resoluble G es promediable. Es consecuencia de los dos apartados anteriores.
6. Un grupo con un Cantor de finales es no promediable (véase [26]).

1.4.2. Acción de grupo promediable

Sea G un grupo de automorfismos de un espacio boreliano estándar X dotado de una medida casi-invariante μ . Supongamos que el conjunto de puntos fijos es de medida nula, es decir, la acción es esencialmente libre. La acción de G sobre X induce una acción sobre $L^\infty(X, \mu)$ definida por $gf(x) = f(g^{-1}x)$ para todo $g \in G$, $f \in L^\infty(X, \mu)$ y $x \in X$. De modo análogo la acción diagonal sobre $G \times X$ define una acción sobre $L^\infty(G \times X, \tilde{\mu})$ donde $\tilde{\mu}$ es la medida producto de la medida de contar sobre G por la medida μ de X .

Definición 1.48 [67] Se dice que la acción de G sobre (X, μ) es *promediable* si existe una aplicación $L^\infty(X, \mu)$ -lineal $m : L^\infty(G \times X, \tilde{\mu}) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$ positiva, unitaria y equivariante por las acciones naturales de G .

Entre las definiciones equivalentes a la promediabilidad de acciones de grupos, destacamos la siguiente en términos de medias locales sobre las órbitas:

Definición 1.49 La acción de G sobre (X, μ) es *promediable* si posee un sistema medible $m = \{m_x\}_{x \in X}$ de medias sobre las órbitas $m_x \in (l^\infty)_1^{*+}(G.x)$ que es invariante, es decir, $m_x = m_y$ para μ -casi todo $x \in X$ y para todo $y \in G.x$. En tal caso se dirá que m es un *sistema invariante de medias locales*. El sistema $m = \{m_x\}_{x \in X}$ se dice *medible* si para toda función $F : \mathcal{R} \subset X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ medible, se tiene que la función $m(F) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(F)(x) = m_x(F(x, -))$ es medible, donde \mathcal{R} es la relación de equivalencia sobre G definida por la pertenencia a la misma órbita.

Es natural preguntarse si existe alguna relación entre la promediabilidad del grupo y la promediabilidad de la acción. La respuesta es afirmativa cuando la medida μ es invariante. En ese caso, tenemos la equivalencia:

Proposición 1.50 [67] *Sea G un grupo actuando libremente sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad invariante μ . Entonces, la acción de G sobre X es promediable si y sólo si el grupo G es promediable.*

La condición suficiente es obvia. La otra implicación puede verse en [67, 68]. En [67], R. J. Zimmer demuestra que la definición 1.48 es equivalente a una propiedad de punto fijo. No obstante, cuando la medida no es invariante, la condición necesaria no es cierta, como demuestra el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 1.51 Sea $\mathbb{F}^2 = \langle a, b \rangle$ el grupo libre de dos generadores. El grafo de Cayley \mathcal{F}^2 de \mathbb{F}^2 no admite sucesiones de Følner, luego el grupo no es promediable. Consideramos $\partial\mathbb{F}^2$ el espacio de finales del grafo de Cayley \mathcal{F}^2 que podemos identificar con el espacio de los caminos infinitos geodésicos que parten del origen. Puesto que $\partial\mathbb{F}^2$ es isomorfo al conjunto de Cantor $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ con la σ -álgebra generada por los cilindros

$$C_{n_1, \dots, n_m}^{\beta_1, \dots, \beta_m} = \{\alpha \in \{a, b\}^{\mathbb{N}} \mid \alpha(n_i) = \beta_i \in \{a, b\}\},$$

tomamos sobre $\partial\mathbb{F}^2$ la medida de probabilidad μ que hace equiprobables los cilindros

$$\mu(C_{n_1, \dots, n_m}^{\beta_1, \dots, \beta_m}) = \frac{1}{2^m}.$$

Por tanto, la acción natural de \mathbb{F}^2 sobre $(\partial\mathbb{F}^2, \mu)$ es esencialmente libre y casi-invariante. Ahora bien, es una acción promediable. En general, la acción de cualquier grupo hiperbólico es promediable como puede verse en [28].

Condición de Reiter. En el contexto de acciones de grupos podemos definir el análogo a la condición de Reiter para grupos. Basta sustituir cada medida de probabilidad por un sistema medible de medidas de probabilidad sobre las órbitas. Decimos que la acción del grupo G sobre el espacio de medida (X, μ) cumple la *condición de Reiter* si existe una sucesión de sistemas medibles $\lambda_n = \{\lambda_n^x\}_{x \in X}$ de medidas de probabilidad $\lambda_n^x \in l_1^1(G.x)$ sobre las órbitas $G.x$ tal que $\|\lambda_n^x - \lambda_n^y\| \rightarrow 0$ para μ -casi todo $x \in X$ y para todo $y \in G.x$. En [1] puede verse:

Proposición 1.52 *La acción de G sobre (X, μ) es promediable si y sólo si cumple la condición de Reiter para acciones de grupos.*

Condición de Følner. Cuando G es un grupo finitamente generado con sistema de generadores S que actúa sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) , podemos extender la condición de Følner a la acción de G sobre X dotada de la estructura de grafo definida por S que vimos en la subsección §1.3.2. Decimos que la acción grafada de (G, S) sobre (X, μ) cumple la *condición de Følner* si para μ -casi todo $x \in X$ existe una sucesión de Følner sobre la órbita $G.x$, es decir,

$$\exists \{A_n\}, A_n \subset G.x, |A_n| < \infty : \frac{|\partial A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0.$$

donde $\partial A_n = \{y \in A_n \mid \tau_s(y) \notin A_n \text{ para algún } s \in S\}$.

Proposición 1.53 *Sea G un grupo actuando libremente sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad invariante μ , entonces la acción de G es promediable si y sólo si la acción cumple la condición de Følner.*

La prueba puede verse en [16] y [44].

En el contexto de medidas casi-invariantes, la condición suficiente sigue siendo válida. No obstante, no se da la equivalencia entre la promediabilidad y la existencia de sucesiones de Følner, puesto que el recíproco no es cierto. De nuevo podemos tomar como contraejemplo de la proposición anterior el ejemplo 1.51. En efecto, las órbitas de la acción del grupo libre sobre su espacio de finales no admiten sucesiones de Følner por ser isomorfas al grafo de Cayley de \mathbb{F}^2 , sin embargo la acción es promediable.

1.4.3. Pseudogrupo promediable

Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones medibles no singulares sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida casi-invariante μ .

Definición 1.54 Diremos que Γ es *promediable* si posee un sistema medible $m = \{m_x\}_{x \in X}$ de medias sobre las órbitas $m_x \in l^\infty(\Gamma(x))_1^{*+}$, invariante en el siguiente sentido: para μ -casi todo $x \in X$ y para todo $y \in \Gamma(x)$ se tiene $m_x = m_y$. En tal caso se dirá que m es un *sistema invariante de medias locales*. Recordemos que $m = \{m_x\}_{x \in X}$ se dice *medible* si para toda función $F : \mathcal{R} \subset X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ medible, se tiene que la función $m(F) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(F)(x) = m_x(F(x, -))$ es medible, siendo \mathcal{R} la relación de equivalencia definida por Γ sobre X .

Obsérvese que Γ es promediable si y sólo si lo es la relación de equivalencia \mathcal{R} definida por la acción de Γ sobre X . En otros términos, estamos obviando los grupos de isotropía de Γ . En otras palabras, la promediabilidad del pseudogrupo es equivalente a la existencia de un promedio global $m : L^\infty(\mathcal{R}, \tilde{\mu}) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$ sobre \mathcal{R} .

Condición de Reiter. Decimos que el pseudogrupo Γ que actúa sobre el espacio de medida (X, μ) cumple la *condición de Reiter* si existe una sucesión de sistemas medibles $\lambda_n = \{\lambda_n^x\}_{x \in X}$ de medidas de probabilidad $\lambda_n^x \in l_1^1(\Gamma(x))$ sobre las órbitas $\Gamma(x)$ tal que $\|\lambda_n^x - \lambda_n^y\| \rightarrow 0$ para μ -casi todo $x \in X$ y para todo $y \in \Gamma(x)$. En [1] y [44] puede verse la prueba de la proposición siguiente:

Proposición 1.55 *El pseudogrupo Γ es promediable si y sólo si cumple la condición de Reiter.*

Condición de Følner. Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado que actúa sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) . Decimos que (Γ, Σ) cumple la *condición de Følner* si para μ -casi todo $x \in X$ existe una sucesión de Følner sobre la órbita $\Gamma(x)$, es decir,

$$\exists \{A_n\}, A_n \subset \Gamma(x), |A_n| < \infty : \frac{|\partial A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0.$$

donde $\partial A_n = \{y \in A_n \mid \sigma(y) \notin A_n \text{ para algún } \sigma \in \Sigma\}$.

Veamos la relación entre la promediabilidad del pseudogrupo y la existencia de sucesiones de Følner en el caso de medidas invariantes ([16],[44]):

Proposición 1.56 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad invariante μ . Si Γ es promediable, entonces Γ verifica la condición de Følner.*

En el caso de los pseudogrupos, la existencia de sucesiones de Følner no implica la promediabilidad. Kaimanovich presenta en [45] contraejemplos y enuncia el siguiente criterio de promediabilidad para relaciones de equivalencia en términos de sucesiones de Følner:

Teorema 1.57 ([45]) *Sea (X, \mathcal{R}) una relación de equivalencia no singular dotada de una estructura de grafo $E \subset \mathcal{R}$ y sea μ una medida de probabilidad en X invariante y ergódica respecto de \mathcal{R} . Entonces la relación \mathcal{R} es promediable si y sólo si para todo boreliano $X_0 \subset X$ de medida no nula y para casi todo punto $x \in X$, existe una familia de subconjuntos finitos $A_n \subset \mathcal{R}[x] \cap X_0$ tales que:*

$$\frac{|\partial_{E_0} A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0$$

donde $E_0 = E \cap X_0 \times X_0$ es la restricción de la estructura de grafo E a X_0 y $|\cdot|$ es la medida de contar sobre $\mathcal{R}[x]$.

De hecho, V. Kaimanovich enuncia un criterio de promediabilidad más general válido para medidas casi-invariantes usando sucesiones de Følner modificadas. No obstante, F. Alcalde y A. Rechtman han demostrado en [4] la equivalencia entre la promediabilidad y la propiedad de Følner (resp. modificada) para foliaciones minimales dotadas de medidas transversas invariantes (resp. casi-invariantes).

Relaciones hiperfinitas. Decimos que una relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} definida sobre X es *hiperfinita* si puede ser presentada como unión de una sucesión creciente exhaustiva de relaciones de equivalencia finitas \mathcal{R}_n , es decir, $\mathcal{R}[x] = \bigcup \mathcal{R}_n[x]$ para μ -casi todo punto $x \in X$. Dye prueba en [21] que una relación de equivalencia es hiperfinita si y sólo si sus órbitas coinciden con las órbitas de una acción invariante de \mathbb{Z} sobre X . Según un importante resultado de [18], la promediabilidad de la relación \mathcal{R} es equivalente a la hiperfinitud:

Teorema 1.58 *Una relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} definida en X es promediable si y sólo si es hiperfinita.*

1.5. Propiedad de Liouville

Recordemos que una función en \mathbb{R}^n es armónica si verifica la ecuación de Laplace de manera que el valor en cada punto coincide con el valor medio de la función sobre una bola centrada en dicho punto. El teorema de Liouville clásico afirma que no existen funciones armónicas acotadas no constantes sobre \mathbb{R}^n . En este apartado recordaremos cómo se define la propiedad de Liouville en su versión discreta, es decir, para grafos y para pseudogrupos grafados. A continuación recordaremos la relación que hay entre esta propiedad y la promediabilidad.

Propiedad de Liouville para grafos. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo localmente finito. Fijemos un núcleo de transición $\pi : E \rightarrow [0, 1]$ y consideremos el correspondiente

operador de difusión D_π . Recordemos que una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica si $D_\pi f = f$.

Definición 1.59 Se dice que el grafo \mathcal{G} verifica la *propiedad de Liouville* respecto de π si las únicas funciones armónicas acotadas son constantes.

Los grafos de Cayley de \mathbb{Z}^n son ejemplos de grafos que verifican la propiedad de Liouville. En general, los grafos con crecimiento subexponencial verifican la propiedad de Liouville. La prueba puede verse en [49]. El ejemplo más común de grafo que no es Liouville es el grafo de Cayley del grupo libre con dos generadores \mathbb{F}^2 .

El siguiente resultado muestra la relación entre la promediabilidad y la propiedad de Liouville. La demostración puede verse en [48].

Proposición 1.60 *Si un grafo de Cayley $\mathcal{G}(G, S)$ verifica la propiedad de Liouville, entonces el grupo G es promediable.*

Recordemos que un grupo es promediable si y sólo si su grafo de Cayley es Følner. No obstante, cuando se trata de un grafo que no es de Cayley no hay relación entre la condición de Følner y la propiedad de Liouville. En efecto, en [8] se da un ejemplo de grafo Liouville que no es Følner. También podemos construir un ejemplo de grafo Følner no Liouville insertando en los vértices del grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}^2 ramas finitas tan largas como nos interese para asegurarnos la condición Følner.

Propiedad de Liouville para pseudogrupos grafados. Sea (Γ, Σ) un pseudogruo grafado sobre un espacio boreliano estándar (X, μ) . Recordemos que si π es un núcleo de transición y D_π su correspondiente operador de difusión, entonces una función es armónica si y sólo si $D_\pi f = f$.

Definición 1.61 Se dice que el pseudogruo grafado (Γ, Σ) verifica la *propiedad de Liouville* respecto de un recorrido aleatorio π si las únicas funciones armónicas sobre $\Gamma_\Sigma(x)$ son constantes para μ -casi todo $x \in X$.

El siguiente resultado relaciona la promediabilidad con la propiedad de Liouville:

Proposición 1.62 ([18]) *Si el pseudogruo grafado (Γ, Σ) posee la propiedad de Liouville para algún recorrido aleatorio, entonces el pseudogruo Γ es promediable respecto de la medida μ .*

Capítulo 2

Número de ramificación

El número de ramificación de un árbol ha sido introducido por R. Lyons en [54] y representa el número medio de ramas por vértice. Este número está estrechamente relacionado con ciertas propiedades geométricas del árbol como la dimensión de Hausdorff de su espacio de finales, la percolación de Bernoulli o los recorridos aleatorios sobre las aristas del árbol. Este concepto se extiende de manera natural a grafos localmente finitos. En el caso concreto de un grafo de Cayley de un grupo, el hecho de que el número de ramificación sea igual a 1 implica que el grupo tiene la propiedad de Liouville y por consiguiente es un grupo promediable.

En este capítulo, empezamos recordando las definiciones y propiedades básicas del número de ramificación de un grafo y estudiamos el efecto de la casi-isometría sobre dicho invariante. Finalmente, extendemos dicha noción al caso de los pseudogrupos grafados. El número de ramificación de un pseudogrupo grafado es el promedio de los números de ramificación de las órbitas genéricas. Obtenemos un criterio de promediabilidad análogo al de los grafos de Cayley, es decir, un pseudogrupo grafado es promediable si el número de ramificación es igual a 1. Si además la medida considerada es armónica, podemos probar que el pseudogrupo verifica la propiedad de Liouville. Estos resultados han sido publicados en [3].

2.1. Número de ramificación de un grafo

Cuando trabajamos con árboles enraizados, la noción de número de ramificación resulta muy intuitiva puesto que mide el promedio de descendientes de cada vértice, entendiendo como descendientes aquellos vértices vecinos que se encuentran más alejados de la raíz u origen. Veamos a continuación la interpretación geométrica de la definición.

Sea T un árbol infinito enraizado. Pensemos las aristas como tubos, a través de los cuales fluye agua partiendo de la raíz del árbol. Fijado $\lambda \geq 1$, añadimos la siguiente restricción: la cantidad máxima de agua que puede fluir a través de una arista a distancia n del origen es λ^{-n} . Es decir, la capacidad de los tubos disminuye a medida que nos alejamos del origen.

Cuando λ es muy grande, la capacidad de las aristas es tan pequeña que en algún momento el agua puede llegar a estancarse y no fluir. Nos interesa por tanto conocer cual es el mayor λ que permite que el agua fluya. Obviamente, si el árbol está muy ramificado, podemos tomar un λ mayor que si está poco ramificado. Se define, por tanto, el *número de ramificación* del árbol T como el supremo de aquellos λ que permiten fluir el agua a través de T , o equivalentemente, el ínfimo de los λ que no permiten fluir el agua.

2.1.1. Definición y propiedades del número de ramificación

Como hemos comentado previamente, en este apartado recordamos la noción de número de ramificación de un grafo introducido por R. Lyons [54]. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito no orientado localmente finito y enraizado y sea 0 la raíz de \mathcal{G} .

Definición 2.1 Una *e-separatriz* (o simplemente *separatriz* si no hay ambigüedad) es un subconjunto de aristas $\widehat{\Pi} \subset E$ que separa el origen del infinito, es decir, si eliminamos el conjunto $\widehat{\Pi}$, la componente conexa del origen es un subgrafo finito.

Nótese que un conjunto de aristas $\widehat{\Pi}$ es separatriz si y sólo si todo camino infinito partiendo del origen corta a $\widehat{\Pi}$ en al menos una arista.

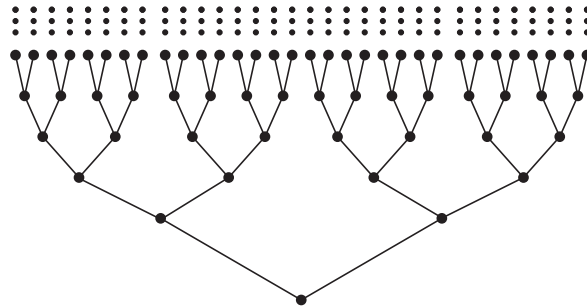
Definición 2.2 ([54]) El *número de ramificación* de \mathcal{G} se define como:

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\widehat{\Pi}} \sum_{e \in \widehat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

donde $d(0, e) = \max\{d(0, x), d(0, y)\}$ siendo x e y los extremos de e .

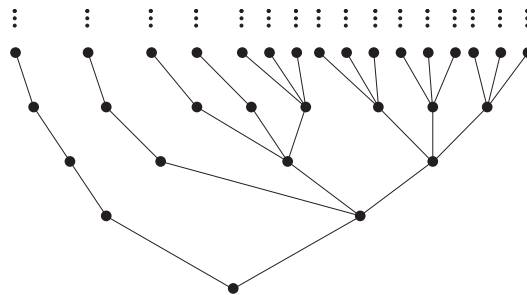
Dado $\lambda \in [1, \infty)$, la cantidad $\lambda^{-d(0,e)}$ representa la capacidad de la arista $e \in E$. La suma de las capacidades de las aristas que forman una separatriz $\widehat{\Pi}$ que denotaremos $\|\widehat{\Pi}\|_\lambda = \sum_{e \in \widehat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)}$ representa por tanto la capacidad de dicha separatriz. El hecho de poder encontrar una separatriz con capacidad tan pequeña como queramos, significa que el agua no puede fluir para dicho λ . Obsérvese que la definición coincide con la idea intuitiva de identificar el número de ramificación con el ínfimo de los números $\lambda \geq 1$ que no permiten fluir el agua.

Ejemplo 2.3 Un ejemplo en el que el número de ramificación coincide claramente con la intuición son los árboles regulares, es decir, los árboles cuyos vértices tienen siempre el mismo número de descendientes. Representamos abajo el conocido árbol binario.



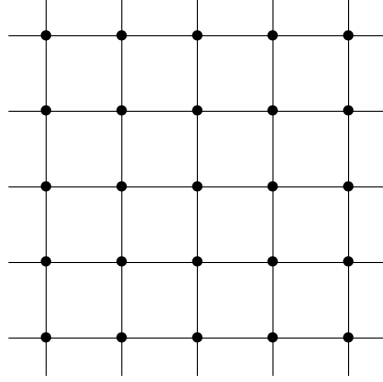
$$br(T) = 2.$$

En el caso de árboles no regulares no resulta tan intuitivo el valor del número de ramificación ni es tan sencillo efectuar su cálculo. Presentamos a continuación un árbol T' cuyos vértices tienen 1 ó 3 descendientes. El árbol T' tiene 2^n vértices a distancia n del origen de los cuales los 2^{n-1} primeros tienen un único hijo y los 2^{n-1} restantes tienen 3 hijos. Se puede comprobar que el número de ramificación en este caso es igual a 1.



$$br(T') = 1.$$

En el caso de los grafos, puede no corresponderse el valor del número de ramificación con el número medio de ramas por vértice, como sucede por ejemplo en el grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 con sistema de generadores $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. Aunque los vértices tienen 2, 3 ó 4 hijos, el número de ramificación es 1.



$$br(\mathcal{G}) = 1.$$

A continuación introducimos una definición equivalente de número de ramificación que en muchas ocasiones nos resultará más cómoda de manejar. Sea \mathcal{G} un grafo localmente finito enraizado y sea \mathfrak{B}_0 el conjunto de los subgrafos finitos de \mathcal{G} que contienen el origen. Si $B \in \mathfrak{B}_0$ entonces su e -borde $\widehat{\partial}B = \{e \in E \mid s(e) \in B, r(e) \notin B\}$ es una separatriz. En efecto, ningún camino infinito $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ partiendo del origen puede estar completamente contenido en B por ser éste finito, de manera que ha de existir una arista del camino e tal que $s(e) \in B$ y $r(e) \notin B$. Por tanto, $e \in \widehat{\partial}B$. El recíproco no es cierto, ya que no toda e -separatriz es e -borde de un elemento de \mathfrak{B}_0 como podemos observar en el siguiente ejemplo:



Proposición 2.4 *El número de ramificación*

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

Demostración. Como comentamos anteriormente, el conjunto $\{\widehat{\partial}B \mid B \in \mathfrak{B}_0\}$ es un subconjunto de las separatrices de \mathcal{G} , luego

$$\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\} \subseteq \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\widehat{\Pi}} \sum_{e \in \widehat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

y en consecuencia $br(\mathcal{G}) \leq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$. Veamos la otra desigualdad. Dada una separatriz $\hat{\Pi}$ arbitraria, denotamos por $C_{\hat{\Pi}}$ a la componente conexa de la raíz que resulta cuando eliminamos $\hat{\Pi}$. Puesto que $C_{\hat{\Pi}} \in \mathfrak{B}_0$ y $\hat{\partial}C_{\hat{\Pi}} \subset \hat{\Pi}$ tenemos

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\partial}C_{\hat{\Pi}}} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)},$$

de donde se deduce que $br(\mathcal{G}) \geq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$ siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior. \square

Grafos de geometría acotada. De ahora en adelante trabajaremos con grafos localmente finitos de geometría acotada, i.e. $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que $val(v) \leq K$ para todo $v \in \mathcal{G}$. Esto nos permite introducir una nueva definición de número de ramificación en función de los vértices en vez de las aristas, algo usual en teoría de foliaciones. En estos términos, dado $B \in \mathfrak{B}_0$, definimos el v -borde de B como

$$\partial B = \{x \in B \mid \exists e \in E, s(e) = x, r(e) \notin B\}.$$

Proposición 2.5 *Si \mathcal{G} es un grafo de geometría acotada, entonces el número de ramificación*

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}.$$

Demostración. Dado $B \in \mathfrak{B}_0$, nótese que $\#\partial B \leq \#\hat{\partial}B \leq K\#\partial B$. La primera desigualdad es inmediata, puesto que por cada $x \in \partial B$ existe al menos una arista e con $s(e) = x$ y $r(e) \notin B$ y por tanto perteneciente a $\hat{\partial}B$. La segunda desigualdad se debe a que, dada una arista $e \in \hat{\partial}B$, el vértice $s(e)$ pertenece a ∂B . Sin embargo no podemos asegurar que $\#\hat{\partial}B \leq \#\partial B$ porque puede suceder que el vértice x sea común a distintas aristas de $\hat{\partial}B$. Lo que sí podemos asegurar es que el número de aristas de $\hat{\partial}B$ que parten de x es siempre menor o igual que K , de manera que se obtiene así la segunda desigualdad.

Teniendo presente que, para toda arista e tal que $s(e) = x$, se verifica $d(0, x) \leq d(0, e) \leq d(0, x) + 1$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} &\geq \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,s(e))-1} \geq \frac{1}{\lambda} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} \\ \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} &\leq \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,s(e))} \leq K \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0 \iff \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial} B} \lambda^{-d(0,e)} = 0$$

□

Obsérvese que, mediante un razonamiento análogo al anterior, podemos escribir

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$$

donde Π es una *v-separatriz*, es decir, un conjunto de vértices del grafo \mathcal{G} tal que, si los eliminamos, la componente conexa del origen es finita.

En algunos casos será conveniente reformular la definición de número de ramificación de la siguiente manera. Sea \mathcal{G} un grafo localmente finito de geometría acotada y $B \in \mathfrak{B}_0$. Dado $r \geq 1$, definimos el *r-borde* de B como el conjunto

$$\partial^r B = \{x \in B \mid \exists e_1 \dots e_s \in E : s(e_1) = x, r(e_i) = s(e_{i+1}), r(e_s) \notin B \text{ con } s \leq r\}.$$

Proposición 2.6 *El número de ramificación*

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado $B \in \mathfrak{B}_0$, nótese que

$$\#\partial B \leq \#\partial^r B \leq R\#\partial B$$

siendo R una constante que depende de r . La primera desigualdad es inmediata, puesto que $\partial B \subset \partial^r B$. Veamos por tanto que se da la segunda. Sea $x \in \partial^r B$, entonces existe un camino $\{e_i\}_{i=1}^s$ con $s(e_1) = x$ y $r(e_s) \notin B$ para algún $s \leq r$. Si $s = 1$, entonces $x \in \partial B$. En el caso de que $s \neq 1$, existe $i \leq s - 1$ tal que $s(e_i) \in B$ y $r(e_{i+1}) \notin B$, luego $s(e_i) \in \partial B$. Además,

$$d(0, s(e_i)) \leq d(0, x) + r,$$

de manera que x pertenece a la bola de radio r de algún elemento de ∂B . Por lo tanto, $\#\partial^r B$ está acotado por el número de vértices de todas las bolas de radio r centradas en elementos de ∂B . Es decir,

$$\#\partial^r B \leq (1 + K + \dots + K^r)\#\partial B = R\#\partial B.$$

Teniendo esto presente, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,s(e_i))+r} \leq R\lambda^r \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)},$$

de donde deducimos que

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0 \iff \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} = 0,$$

obteniendo de ese modo el resultado buscado. \square

Propiedades del número de ramificación. Obsérvese que el número de ramificación no depende de la elección del origen. Si se sustituye la raíz 0 por otro vértice $0'$, la distancia $d(0, 0')$ es constante y no afecta a la definición, ya que

$$\inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} = 0 \iff \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0',e)} = 0$$

debido a que $d(0', e) \leq d(0', 0) + d(0, e) \leq 2d(0, 0') + d(0, e)$.

Las aristas terminales de un grafo no influyen en la definición del número de ramificación, de manera que podemos prescindir de ellas mediante un proceso de inducción para proceder a su cálculo. A lo largo de todo el capítulo y para simplificar supondremos que nuestros grafos carecen de aristas terminales.

Proposición 2.7 *Sea \mathcal{G}' un subgrafo infinito conexo de \mathcal{G} , entonces $br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})$.*

Demostración. Podemos suponer que la raíz de \mathcal{G}' coincide con la de \mathcal{G} . Si $\hat{\Pi}$ es separatriz de \mathcal{G} , entonces $\hat{\Pi}' = \hat{\Pi} \cap \mathcal{G}'$ es separatriz en \mathcal{G}' . Además, para $e \in \hat{\Pi}'$, $d(0, e) \leq d'(0, e)$ siendo d' la métrica natural en \mathcal{G}' , que en general no coincide con la inducida. Luego tenemos

$$\sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} \geq \sum_{e \in \hat{\Pi}'} \lambda^{-d'(0,e)},$$

y siguiendo el procedimiento habitual, obtenemos que $br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})$. \square

2.1.2. Tasa de crecimiento y número de ramificación

Resulta natural comparar el número de ramificación con el crecimiento exponencial de un grafo definido en la subsección §1.1.3. Trabajaremos principalmente con la tasa de crecimiento inferior $\underline{gr}(\mathcal{G})$ ya que admite una formulación similar a la del número de ramificación que va a permitir comparar ambas cantidades.

Proposición 2.8 *La tasa de crecimiento exponencial*

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$$

donde S_n es la esfera centrada en 0 de radio $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Basta probar que se verifican las implicaciones siguientes

- 1) $\lambda > \underline{gr}(\mathcal{G}) \implies \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = \inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n = 0$
- 2) $\lambda < \underline{gr}(\mathcal{G}) \implies \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = \inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n \neq 0$

Recordemos que por definición, $\underline{gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$. Esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene:

- $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon$ para una cantidad infinita de naturales,
- $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon$ para una cantidad finita de naturales.

1) Supongamos $\lambda > \underline{gr}(\mathcal{G})$ y fijemos $\varepsilon < \lambda - \underline{gr}(\mathcal{G})$. Por la definición de límite inferior, tenemos que $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon$ para una cantidad infinita de naturales, o lo que es lo mismo, para una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por tanto:

$$0 < \left(\frac{s(n_k)^{\frac{1}{n_k}}}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^{n_k} = 1$$

Luego la sucesión de términos estrictamente positivos $\left\{\left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n\right\}$ tiene una subsucesión que converge a 0, y por consiguiente $\inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n = 0$.

2) Supongamos ahora $\lambda < \underline{gr}(\mathcal{G})$ y fijemos $\varepsilon < \underline{gr}(\mathcal{G}) - \lambda$. Por la definición de límite inferior, tenemos que $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon$ para una cantidad finita de naturales, o equivalentemente, $s(n)^{\frac{1}{n}} \geq \underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. Por tanto:

$$\left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n \geq \left(\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon}{\lambda}\right)^n > \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^n = 1$$

Luego la sucesión de términos estrictamente positivos $\{(\frac{s(n)}{\lambda})^n\}$ tiende a $+\infty$. En este caso, tenemos que $\inf_n (\frac{s(n)}{\lambda})^n \neq 0$. \square

La formulación introducida en la proposición anterior de la tasa de crecimiento nos permite compararla con el número de ramificación:

Proposición 2.9 *El número de ramificación y la tasa de crecimiento inferior están relacionados por:*

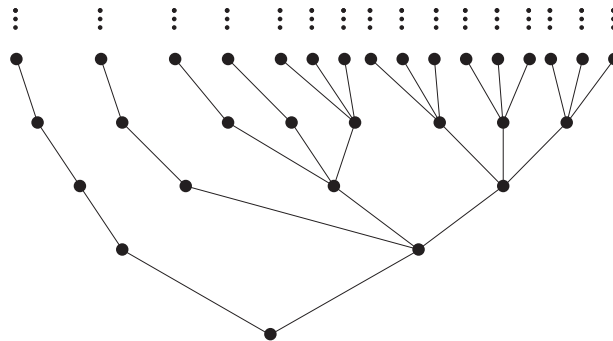
$$br(\mathcal{G}) \leq \underline{gr}(\mathcal{G})$$

Demostración. Nótese que cada esfera S_n es una separatriz de \mathcal{G} , de manera que

$$\inf_{S_n} \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} \geq \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)}$$

y siguiendo el procedimiento habitual obtenemos el resultado. \square

En muchos casos el número de ramificación y la tasa de crecimiento inferior no coinciden. El árbol T' del ejemplo 2.3 muestra que no siempre se da la igualdad:



$$br(T') = 1 \quad gr(T') = 2.$$

No obstante, existen condiciones suficientes que fuerzan la igualdad entre ambas cantidades. Para simplificar la notación representaremos por $|x|$ la distancia $d(0, x)$ y denotaremos $e(x)$ a la arista e cuyo extremo más alejado del origen es x .

Definición 2.10 ([54], [59]) Un árbol T es *esféricamente simétrico* si el número de hijos de un vértice $x \in T$ sólo depende de la distancia de x al origen 0. Es decir, los elementos de cada esfera tienen el mismo número de hijos.

Proposición 2.11 ([54],[59]) *Si T es un árbol esféricamente simétrico entonces $br(T) = \underline{gr}(T)$.*

Demostración. Sea Π una separatriz minimal, es decir, si borramos cualquier vértice $x \in \Pi$, el conjunto $\Pi - \{x\}$ no es una separatriz. Consideramos los enteros

$$d = \min_{x \in \Pi} |x| \quad \text{y} \quad d' = \max_{x \in \Pi} |x|.$$

Puesto que T es esféricamente simétrico, los subárboles $\{T^x \mid x \in S_d\}$ son todos idénticos y por tanto $\Pi(x) = \Pi \cap T^x$ son distintas separatrices del mismo subárbol. Dado $\lambda \geq 1$, tomamos $y \in S_d$ tal que $\|\Pi(y)\|_\lambda = \min_{x \in S_d} \{\|\Pi(x)\|_\lambda\}$. Si reemplazamos la separatriz $\Pi(x)$ de cada subárbol T^x por $\Pi(y)$, se obtiene una separatriz $\Pi^* = \bigcup_{x \in S_d} \Pi(y)$ tal que

$$\|\Pi^*\|_\lambda = s(d)\|\Pi(y)\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda.$$

Queremos ver que existe un entero $n \in [d, d']$ tal que $\|S_n\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda$. Nótese que $d^* = \min_{x \in \Pi^*} |x| \geq d$ y $\max_{x \in \Pi^*} |x| \leq d'$. Si $d^* = d$ entonces significa que $\Pi^* = S_d$ y tenemos lo que buscábamos. Si $d^* > d$ repetimos el proceso anterior sobre la separatriz Π^* y d^* . Puesto que el proceso no puede ser infinito ya que d^* está acotado por d' , ha de existir un entero $n \in [d, d']$ tal que $\|S_n\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda$. Luego hemos probado que, para cada $\lambda \geq 1$,

$$\inf_{\Pi} \|\Pi\|_\lambda \geq \inf_n \|S_n\|_\lambda,$$

de donde se sigue que $br(T) = \underline{gr}(T)$. □

Definición 2.12 ([54], [59]) Un árbol T es N -subperiódico (resp. N -periódico) con $N \in \mathbb{N}$ si para todo $x \in T$ existe una aplicación inyectiva (resp. biyectiva) que conserva la adyacencia $f : T^x \rightarrow T^{f(x)}$ con $|f(x)| \leq N$. Un árbol se dice *subperiódico* (resp. *periódico*) si es N -subperiódico (resp. N -periódico) para algún $N \in \mathbb{N}$.

Si T es 0-subperiódico, entonces existe la tasa de crecimiento $gr(T)$. En efecto, la sucesión $\{\log(s(n))\}$ es subaditiva puesto que $s(n+m) \leq s(n)s(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Aplicando el lema de Fekete a la sucesión de logaritmos, nos garantizamos la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n))}{n}$. En [24], H. Furstenberg prueba el siguiente resultado, cuya demostración recordamos aquí siguiendo [59]:

Proposición 2.13 [24, 59] *Si T es un árbol subperiódico entonces $br(T) = gr(T)$.*

Demostración. Primero supondremos que T no tiene aristas terminales y es 0-subperiódico. Sea Π una separatriz (que podemos suponer minimal y por tanto finita) y $\lambda > 0$ tales que $\|\Pi\|_\lambda < 1$. Sea $d = \max_{x \in \Pi} |x|$, es decir, el máximo nivel de Π . Por 0-subperiodicidad, para cada $x \in \Pi$, existe una separatriz $\Pi(x)$ del subárbol T^x tal que $\sum_{y \in \Pi(x)} \lambda^{-(|y|-|x|)} \leq \|\Pi\|_\lambda < 1$ y $\max_{y \in \Pi(x)} (|y| - |x|) \leq d$. Entonces $\|\Pi(x)\|_\lambda = \sum_{y \in \Pi(x)} \lambda^{-|y|} < \lambda^{-|x|}$. Si reemplazamos cada vértice $x \in \Pi$ por los vértices de la correspondiente separatriz $\Pi(x)$, obtenemos una separatriz $\tilde{\Pi} = \bigcup_{x \in \Pi} \Pi(x)$ que satisface $\|\tilde{\Pi}\|_\lambda = \sum_{x \in \Pi} \|\Pi(x)\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda < 1$.

Dado $n > d$, podemos repetir el proceso para todos los vértices con $|x| < n$ hasta obtener una separatriz Π^* entre los niveles n y $n + d$ con $\|\Pi^*\|_\lambda < 1$. Luego, $s(n)\lambda^{-(n+d)} \leq \|\Pi^*\|_\lambda < 1$, de manera que $\overline{gr}(T) = \limsup s(n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \lambda^{1+\frac{d}{n}} = \lambda$. Por tanto, hemos visto que, dado λ tal que existe una separatriz Π con $\|\Pi\|_\lambda < 1$, entonces $gr(T) = \overline{gr}(T) \leq \lambda$. Puesto que $\inf_{\Pi} \|\Pi\|_\lambda = 0$ para todo $\lambda > br(T)$, obtenemos que $br(T) = gr(T)$.

Ahora supongamos que T es N -subperiódico. Sea Γ la unión de copias disjuntas de los subárboles $\{T^x : |x| \leq N\}$ con sus raíces identificadas. Obviamente Γ es 0-subperiódico y $br(\Gamma) = gr(\Gamma) \geq \overline{gr}(T)$. Además, si Π es una separatriz de T con $\min_{x \in \Pi} |x| \geq N$, existe una separatriz Π' de Γ tal que para $\lambda > 0$

$$\|\Pi'\|_\lambda \leq (1 + \lambda + \dots + \lambda^N) \|\Pi\|_\lambda$$

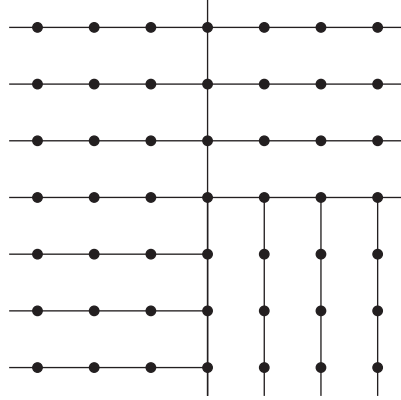
de donde se deduce que $br(T) \geq br(\Gamma)$. Puesto que $br(\Gamma) \geq \overline{gr}(T) \geq br(T) \geq br(\Gamma)$, obtenemos $br(T) = gr(T)$.

Finalmente, si suponemos que T tiene aristas terminales, consideramos el árbol T' que se obtiene a partir de T añadiendo a cada arista terminal un camino infinito. Evidentemente, T' es subperiódico, luego

$$\overline{gr}(T) \geq br(T) = br(T') = gr(T') \geq \overline{gr}(T).$$

□

Presentamos a continuación un árbol subperiódico no esféricamente simétrico:



Árbol maximal del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 .

Proposición 2.14 Si $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ es un grafo de Cayley de un grupo G entonces $br(\mathcal{G}) = gr(\mathcal{G})$.

Demostración. La prueba se basa en la construcción de un subárbol maximal T de \mathcal{G} tal que $gr(T) = gr(\mathcal{G})$, véase [54]. Si probamos que dicho subárbol es subperiódico, entonces $br(T) = gr(T)$ y en consecuencia $br(\mathcal{G}) = gr(\mathcal{G})$.

Empezamos dotando al conjunto de generadores $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ de un orden total. Para cada elemento $x \in G$ existe una S -palabra $\omega_x = (s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ tal que $x = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ con $n = |x|$. Además, la escritura es única si se supone lexicográficamente minimal, i.e. para cualquier otra palabra $(s_{i'_1}, \dots, s_{i'_n})$ con las mismas propiedades, se tiene que el primer j tal que $i_j \neq i'_j$ verifica $i_j < i'_j$.

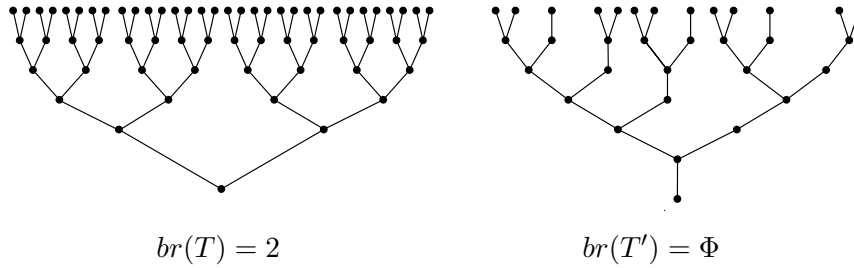
Llamaremos T al subárbol de \mathcal{G} cuyos vértices son los de \mathcal{G} y verifica lo siguiente: si $|y| = |x| + 1$, entonces y es un descendiente de x si y sólo si ω_x es una subpalabra de ω_y . Obsérvese que la distancia de cada vértice al origen en T coincide con la distancia en \mathcal{G} y en consecuencia el cardinal de las esferas no varía. Si vemos que T es un árbol subperiódico, tendremos que el límite $gr(T)$ existe y además coincide con $gr(\mathcal{G})$.

Para ver la subperiodicidad de T , para cada $x \in T$ descomponemos la palabra ω_x como concatenación de dos subpalabras ω_1 y ω_2 . Para cada $i = 1, 2$, denotamos x_i al elemento de \mathcal{G} que resulta de multiplicar los generadores de la palabra ω_i , de manera que $x = x_1 x_2$. Necesariamente $\omega_{x_2} = \omega_2$, puesto que en caso contrario x admitiría dos escrituras distintas. Luego, T es subperiódico. \square

2.1.3. Casi-isometría y número de ramificación

En este apartado estudiamos la relación que existe entre los números de ramificación de grafos casi-isométricos. El ejemplo siguiente nos permite afirmar que el número de ramificación no permanece invariante por casi-isometría:

Ejemplo 2.15 El árbol binario T y el árbol de Fibonacci T' son árboles casi-isométricos con el mismo conjunto de vértices, como comprobamos en el ejemplo 1.7. No obstante, sus números de ramificación difieren:



Es sencillo probar directamente que $br(T) = 2$, pero resulta inmediato si tenemos en cuenta que T es esféricamente simétrico y que por tanto $br(T) = gr(T) = 2$. El segundo árbol T' es un árbol subperiódico. Puesto que el límite

$$gr(T') = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} = \Phi,$$

donde F_n es la sucesión de Fibonacci y $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número de oro, se tiene que $br(T') = gr(T') = \Phi$. Si realizamos el cálculo del número de ramificación de T' aplicando la definición directamente, obtenemos que el número medio de descendientes ha de ser raíz de la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ que obviamente es Φ .

A pesar de que el número de ramificación no es invariante por casi-isometría, sí podemos encontrar cierta relación como veremos a continuación. Para ello, dado un grafo \mathcal{G} y una red de vértices A , definimos sobre A una estructura de grafo conexo localmente finito, que denotamos \mathcal{G}_A . Dicho grafo será casi-isométrico a \mathcal{G} y veremos que los respectivos números de ramificación están relacionados. Esto nos ayudará a encontrar una relación más general entre el número de ramificación y la casi-isometría.

Estructuras de grafo inducidas. Basándonos en el proceso de reducción descrito en [26], describimos a continuación un método para definir una buena estructura de grafo sobre una red de vértices de un grafo.

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito de geometría acotada y sea A una C -red de \mathcal{G} formada por vértices. Puesto que la elección del origen no influye en el cálculo del número de ramificación, supondremos que $0 \in A$. El conjunto de vértices $A \subset V$ puede realizarse como conjunto de vértices de un subgrafo cuyas aristas son el conjunto $E \cap (A \times A)$, pero no tiene por qué ser conexo. Para evitar esta situación podríamos sustituir cada camino de aristas de \mathcal{G} con extremos en A por una arista, pero en tal caso el grafo no sería localmente finito. El propósito de la sección es describir una estructura de grafo sobre A adecuada, es decir, un grafo conexo de geometría acotada $\mathcal{G}_A = (A, E_A)$ casi-isométrico a \mathcal{G} , y estudiar la relación entre su número de ramificación y el del grafo \mathcal{G} .

Para describir el proceso anunciado, fijamos una enumeración de $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y definimos la *rama de \mathcal{G} sobre a_j* por

$$\rho(a_j) = \{x \in V \mid d(x, a_i) > d(x, a_j) \ \forall i < j \text{ y } d(x, a_i) \geq d(x, a_j) \ \forall i > j\}.$$

Diremos que $\rho(a_j)$ *se injerta sobre A en a_j* . Por otra parte las ramas son disjuntas dos a dos y por tanto la rama que contiene a $x \in V$ se injerta en un único punto de A , que denotaremos a_x . Puesto que A es una C -red, el diámetro de las ramas, así como el cardinal, están uniformemente acotados por las constantes $2[C]$ y $[C]K^{[C]}$ respectivamente, siendo $[C]$ la parte entera del número real C y K la cota de la valencia de los vértices.

Ahora dividimos el conjunto de aristas E de \mathcal{G} en dos subconjuntos

$$E_v = \{e \in E \mid a_{s(e)} = a_{r(e)}\} \text{ y } E_h = \{e \in E \mid a_{s(e)} \neq a_{r(e)}\},$$

llamados conjuntos de aristas *verticales* y *horizontales* respectivamente. El conjunto E_v define sobre cada una de las ramas una estructura de grafo conexo.

Definimos la estructura de grafo $\mathcal{G}_A = (A, E_A)$ sobre el conjunto de vértices A de la siguiente manera: cada arista $e \in E_h$ define una arista $e_A \in E_A$ tal que $s(e_A) = a_{s(e)}$ y $r(e_A) = a_{r(e)}$. Notemos que \mathcal{G}_A es un grafo localmente finito y de geometría acotada, de hecho, para todo a_j , tenemos:

$$\text{val}_{\mathcal{G}_A}(a_j) \leq \sum_{x \in \rho(a_j)} \text{val}_{\mathcal{G}}(x) \leq \#\rho(a_j)K \leq [C]K^{[C]+1}.$$

Obsérvese además que, si d_A es la métrica natural asociada al grafo \mathcal{G}_A , entonces

$$d_A(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_j) \leq (2[C] + 1)d_A(a_i, a_j)$$

para todo $a_i, a_j \in A$. Es decir, \mathcal{G} y \mathcal{G}_A son casi-isométricos, ya que A es una red para ambos grafos y la identidad de A es una aplicación bilipschitziana.

Nótese que cuando el conjunto de vértices A es todo V se tiene que $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}$.

Proposición 2.16 *Si \mathcal{G} es un grafo de geometría acotada y $A \subset V$ es una C -red de \mathcal{G} , entonces se verifica:*

$$br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}_A) \leq br(\mathcal{G})^{2[C]+1}.$$

Demostración. Definimos en primer lugar una aplicación sobreyectiva $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_A$, que en cierto modo actúa como una proyección, de la siguiente manera:

$$p(x) = a_x$$

si $x \in V$ y

$$p(e) = \begin{cases} a_{s(e)} & \text{si } e \in E_v, \\ e_A & \text{si } e \in E_h. \end{cases}$$

Obsérvese que $p^{-1}(a) = \rho(a)$ para $a \in A$ y $p^{-1}(e_A)$ es el subconjunto de aristas de E_h que unen elementos de $\rho(s(e_A))$ y $\rho(r(e_A))$ para cada $e_A \in E_A$.

Veamos primero la desigualdad $br(\mathcal{G}_A) \leq br(\mathcal{G})^{2[C]+1}$. Si $B \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}}$, es decir, B es un subgrafo finito de \mathcal{G} que contiene al origen, obviamente $p(B)$ será un subgrafo finito de \mathcal{G}_A que contiene al origen, es decir, $p(B) \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}_A}$. Veamos que $\partial p(B) \subset p(\partial B)$.

En efecto, si $a \in \partial p(B)$ significa que $a \in p(B)$ y existe una arista $e_A \in E_A$ tal que $s(e_A) = a$ y $r(e_A) \notin p(B)$. Luego para cada $e \in p^{-1}(e_A)$, se tiene que $r(e) \notin B$. Si $s(e) \in B$ entonces $s(e) \in \partial B$, de manera que $a = p(s(e)) \in p(\partial B)$. En el caso de que $s(e) \notin B$, tendríamos en la rama $p^{-1}(a)$ elementos en B (porque $a \in p(B)$) y fuera de B (porque $s(e) \notin B$). Entonces podemos asegurar que existe una arista vertical $e' \in E_v$ tal que $s(e') \in B$ y $r(e') \notin B$, o equivalentemente que existe un $y \in p^{-1}(a)$ perteneciente a ∂B , luego $a = p(y) \in p(\partial B)$.

Teniendo en cuenta que p es sobreyectiva y $\partial p(B) \subset p(\partial B)$, tenemos que

$$\#\partial p(B) \leq \#p(\partial B) \leq \#\partial B.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \partial p(B)} \lambda^{-d_A(0,a)} &\leq \sum_{a \in p(\partial B)} \lambda^{-d_A(0,a)} \leq \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d_A(0,p(x))} \\ &\leq \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-\frac{d(0,p(x))}{2[C]+1}} \\ &\leq \sum_{x \in \partial B} (\lambda^{\frac{1}{2[C]+1}})^{-d(0,x)+[C]}, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}}} \sum_{x \in \partial B} (\lambda^{\frac{1}{2[C]+1}})^{-d(0,x)+[C]} = 0\} \subset \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B' \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}_A}} \sum_{a \in \partial B'} \lambda^{-d_A(0,a)} = 0\}.$$

La función $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ definida por $f(\lambda) = \lambda^{2[C]+1}$ es una aplicación continua. De manera que, si llamamos $S = \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}}} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)+[C]} = 0\}$ y $S' = \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B' \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}_A}} \sum_{a \in \partial B'} \lambda^{-d_A(0,a)} = 0\}$, entonces $f(S) \subset S'$ y

$$br(\mathcal{G}_A) = \inf S' \leq \inf f(S) = f(\inf S) = f(br(\mathcal{G})) = br(\mathcal{G})^{2[C]+1}.$$

Veamos ahora la desigualdad $br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}_A)$. Si $B \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}_A}$, entonces $p^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_0^{\mathcal{G}}$ y $\partial p^{-1}(B) \subset p^{-1}(\partial B)$. En efecto, la condición $x \in \partial p^{-1}(B)$ significa que $x \in p^{-1}(B)$ y existe $e \in E$ tal que $s(e) = x$ y $r(e) \notin p^{-1}(B)$. Esto implica que la arista $e \in E_h$ y por tanto la arista $p(e) = e_A$ verifica que $s(e_A) \in B$ y $r(e_A) \notin B$, es decir, $p(x) = s(e_A) \in \partial B$ y por tanto $x \in p^{-1}(\partial B)$.

Puesto que $\partial p^{-1}(B) \subset p^{-1}(\partial B)$ y el cardinal de cada rama es menor o igual que $R = [C]K^{[C]}$, tenemos que

$$\#\partial p^{-1}(B) \leq \#p^{-1}(\partial B) \leq R\#\partial B.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \partial p^{-1}(B)} \lambda^{-d(0,x)} &\leq \sum_{x \in p^{-1}(\partial B)} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in p^{-1}(\partial B)} \lambda^{-d(0,p(x))+[C]} \\ &\leq R \sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d(0,a)+[C]} \\ &\leq R\lambda^{[C]} \sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d(0,a)}. \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento habitual obtenemos $br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}_A)$. \square

Casi-isometría y número de ramificación. Sean \mathcal{G} y \mathcal{G}' dos grafos de geometría acotada. Recordemos que son casi-isométricos si y sólo si existen C -redes $A \subseteq V$ y $A' \subseteq V'$ lipschitzianamente equivalentes. Puesto que la aplicación bilipschitziana entre A y A' es biyectiva, podemos identificar ambos conjuntos de vértices y suponer que dicha aplicación es la identidad.

Si en vez de tomar las métricas inducidas de \mathcal{G} y \mathcal{G}' sobre las redes A y A' consideramos la métrica natural de los grafos \mathcal{G}_A y $\mathcal{G}_{A'}$, la identidad sigue siendo una aplicación bilipschitziana. En efecto, si tenemos en cuenta

$$d_A(a, b) \leq d(a, b) \leq (2[C] + 1)d_A(a, b)$$

$$d_{A'}(a, b) \leq d'(a, b) \leq (2[C] + 1)d_{A'}(a, b)$$

y por otra parte

$$\frac{1}{c}d(a, b) \leq d'(a, b) \leq cd(a, b)$$

entonces

$$\frac{1}{c(2[C] + 1)}d_{A'}(a, b) \leq d_A(a, b) \leq c(2[C] + 1)d_{A'}(a, b).$$

Luego la identidad es una aplicación bilipschitziana entre A y A' con las métricas de los grafos \mathcal{G}_A y $\mathcal{G}_{A'}$ con constante de Lipschitz $c' = c(2[C] + 1)$.

Teorema 2.17 Sean \mathcal{G} y \mathcal{G}' dos grafos casi-isométricos cuya constante de Lipschitz entre sus respectivas C -redes es $c > 0$. Los números de ramificación de \mathcal{G} y \mathcal{G}' se relacionan de la siguiente manera:

$$br(\mathcal{G}')^{\frac{1}{\tilde{c}}} \leq br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}')^{\tilde{c}}$$

donde $\tilde{c} = c(2[C] + 1)^2$.

Demostración. Sean A y A' las respectivas C -redes de \mathcal{G} y \mathcal{G}' . Por la proposición 2.16 sabemos que se verifica lo siguiente:

$$br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}_A) \leq br(\mathcal{G})^{2[C]+1},$$

$$br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G}'_{A'}) \leq br(\mathcal{G}')^{2[C]+1}.$$

Basta, por tanto, encontrar una relación entre los números de ramificación de los grafos \mathcal{G}_A y $\mathcal{G}'_{A'}$. Recordemos que A y A' son lipschitzianamente equivalentes con constante $c' = c(2[C] + 1)$ y que podemos identificarlos cuando convenga. Sea $B \in \mathfrak{B}_0^A$, es decir un subgrafo finito de \mathcal{G}_A que contiene el origen. Obviamente el conjunto de vértices de B es un subconjunto de A y por tanto puede verse como un subconjunto de A' , que denotaremos por B' . Nótese que B' es un subgrafo finito de $\mathcal{G}'_{A'}$ que contiene al origen, es decir $B' \in \mathfrak{B}_0^{A'}$. Además, $\partial B \subset \partial^c B'$. En efecto, si $a \in \partial B$ significa que $a \in B$ y que existe una arista $e_A \in E_A$ tal que $s(e_A) = a$ y $r(e_A) = b \notin B$. Obviamente, $a \in B'$ y $b \notin B'$, sin embargo no podemos asegurar que

exista la arista (a, b) en $E_{A'}$. De todos modos, por ser la identidad entre los vértices una aplicación bilipschitziana sabemos:

$$d_{A'}(a, b) \leq c' d_A(a, b) = c',$$

es decir, existe un camino de aristas en el grafo $\mathcal{G}'_{A'}$ de longitud a lo sumo c' que une los vértices a y b . Luego $a \in \partial^{c'} B'$.

Una vez demostrada la inclusión, el procedimiento es el habitual. Puesto que $\#\partial B \leq \#\partial^{c'} B'$, tenemos que:

$$\sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d_A(0,a)} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} \lambda^{-d_A(0,a)} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} \lambda^{-\frac{d_{A'}(0,a)}{c'}} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} (\lambda^{\frac{1}{c'}})^{-d_{A'}(0,a)}.$$

Siguiendo el razonamiento usado en la proposición 2.16 , obtenemos la desigualdad

$$br(\mathcal{G}_A) \leq br(\mathcal{G}'_{A'})^{c'}.$$

Evidentemente de modo análogo obtenemos que:

$$br(\mathcal{G}'_{A'}) \leq br(\mathcal{G}_A)^{c'}.$$

□

Nótese que en el caso en que $A = V$ y $A' = V'$, el valor de C es $\frac{1}{2}$ y su parte entera $[C] = 0$, de manera que la relación entre los números de ramificación es la siguiente:

$$br(\mathcal{G}')^{\frac{1}{c}} \leq br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}')^c.$$

Del teorema anterior se deduce que la propiedad de tener número de ramificación igual a 1 es invariante por casi-isometría:

Corolario 2.18 *Sean \mathcal{G} y \mathcal{G}' dos grafos casi-isométricos. Entonces*

$$br(\mathcal{G}) = 1 \iff br(\mathcal{G}') = 1.$$

2.1.4. Número de ramificación y dimensión de Hausdorff del espacio de finales

En este apartado recordamos la relación que existe entre el número de ramificación de un árbol y la dimensión de Hausdorff de su espacio de finales ([52, 54]). Dicha relación no es extensible a grafos arbitrarios.

Casi-isometría y espacio de finales de un árbol. Como vimos en §1.1.5, el espacio de finales o borde ∂T de un árbol T localmente finito es el espacio métrico formado por los rayos geodésicos de T que parten del origen dotado de la métrica: $d(\xi, \eta) = e^{-n}$ si $\xi, \eta \in \partial T$ son dos rayos con exactamente n aristas en común.

Sabemos que la topología del borde de un árbol es un invariante del tipo de casi-isometría. Veamos ahora qué relación existe entre las métricas de los respectivos bordes de árboles isométricos y casi-isométricos:

Proposición 2.19 *Sean T y T' dos árboles de geometría acotada. Todo isomorfismo isométrico $f : T \rightarrow T'$ induce un homeomorfismo lipschitziano $f_* : \partial T \rightarrow \partial T'$ sobre sus bordes.*

Demostración. Ya vimos en la proposición 1.11 que existe un homeomorfismo entre los bordes. Veamos ahora que se trata de una aplicación bilipschitziana. En primer lugar notemos que cuando hablamos de árboles isométricos T y T' , podemos suponer que se trata del mismo árbol y que la isometría es la identidad. No obstante, la estructura métrica de sus bordes no es la misma porque depende del origen que tomemos. Dados dos rayos geodésicos ξ y η con origen 0 , denotaremos ξ' y η' los rayos geodésicos con origen $0'$ que representan a los finales $\mathcal{E}(\xi)$ y $\mathcal{E}(\eta)$. Si ξ y η tienen n aristas en común, entonces ξ' y η' tendrán al menos $n - d$ y a lo sumo $n + d$ aristas en común, siendo $d = d(0, 0')$. Luego

$$e^{-d}d(\xi, \eta) = e^{-n-d} \leq d(\xi', \eta') \leq e^{-n+d} = e^d d(\xi, \eta)$$

□

Recordemos que un homeomorfismo $h : (X, d) \rightarrow (X', d')$ es *hölderiano* si existen constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$ tales que:

$$\frac{1}{c}d(x, y)^{\frac{1}{\alpha}} \leq d'(h(x), h(y)) \leq cd(x, y)^{\alpha}$$

para todo $x, y \in X$. Decimos que α es la *constante de Hölder* de h .

Proposición 2.20 *Sean T y T' dos árboles de geometría acotada. Una casi-isometría $f : T \rightarrow T'$ induce un homeomorfismo hölderiano $f_* : \partial T \rightarrow \partial T'$ sobre sus bordes.*

Demostración. Una vez más usaremos la definición 1.5 de grafos casi-isométricos. En ese caso, T tiene una C -red A , a la cual dotamos de la estructura de grafo $T_A = (A, E_A)$ y de la métrica natural de grafo d_A , que resulta ser un árbol por serlo

T . Recordemos que la aplicación identidad entre (A, d) y (A, d_A) es bilipschitziana con constante $2[C] + 1$.

La aplicación $p : T \rightarrow T_A$ definida en la demostración de la proposición 2.16 es una casi-isometría y por tanto, por la proposición 1.11, se obtiene el homeomorfismo entre los espacios de finales $p_* : \partial T \rightarrow \partial T_A$. Dado un rayo geodésico $\xi \in \partial T$, denotamos por ξ_A al rayo geodésico de T_A que representa al final definido por $p(\xi)$. Si dos rayos geodésicos ξ y η de T tienen exactamente n aristas en común y los rayos proyectados ξ_A y η_A coinciden en s aristas, entonces $s \leq n \leq (2[C] + 1)s$. Luego,

$$d_A(\xi_A, \eta_A) = e^{-s} \geq d(\xi, \eta) = e^{-n} \geq d_A(\xi_A, \eta_A)^{2[C]+1}.$$

Del mismo modo, si A' es una C -red del árbol T' , se tiene:

$$d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'}) \geq d'(\xi', \eta') \geq d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'})^{2[C]+1}.$$

De nuevo, el problema se ve reducido al estudio de la aplicación bilipschitziana entre redes $l : A \rightarrow A'$, cuya constante de Lipschitz es $c' = c(2[C] + 1)$. Por el hecho de existir tal aplicación, los árboles T_A y $T'_{A'}$ son casi-isométricos y por ello existe un homeomorfismo $l_* : \partial T_A \rightarrow \partial T'_{A'}$, que lleva cada rayo ξ_A de T_A en el rayo geodésico $\xi_{A'}$ de $T'_{A'}$ que representa la clase del rayo propio $l(\xi_A)$ formado por la concatenación de segmentos geodésicos que unen los vértices $l(\xi(n))$ y $l(\xi(n+1))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que si dos rayos geodésicos ξ_A y η_A de T_A tienen exactamente n aristas en común, entonces $l(\xi_A(i)) = l(\eta_A(i))$ para todo $i \leq n$ y además $l(\xi_A(n+1)) \neq l(\eta_A(n+1))$. Luego,

$$d'_{A'}(l(\xi_A(0)), l(\xi_A(n))) \leq c' d_A(\xi(0), \xi(n)) = c'n,$$

y por tanto $\xi_{A'}$ y $\eta_{A'}$ tienen a lo sumo $c'n + c'$ aristas en común. Por lo tanto,

$$d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'}) \geq e^{-c'} d_A(\xi_A, \eta_A)^{c'}$$

Puesto que se trata de una biyección, sucede lo mismo a la inversa,

$$d_A(\xi_A, \eta_A) \geq e^{-c'} d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'})^{c'}.$$

De manera que la aplicación l_* es hölderiana con constante de Hölder $\alpha = \frac{1}{c'}$.

Si denotamos por p' a la proyección del árbol T' sobre $T'_{A'}$, la composición

$$f_* = (p')_*^{-1} \circ l_* \circ p_* : \partial T \rightarrow \partial T'$$

es un homeomorfismo hölderiano con constante

$$\alpha = \frac{1}{c(2[C] + 1)^2}.$$

□

Dimensión de Hausdorff de un árbol. Sea T un árbol infinito, se dice que una colección \mathcal{C} de subconjuntos de ∂T es un *recubrimiento* si

$$\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B = \partial T.$$

Definición 2.21 La *dimensión de Hausdorff* de ∂T se define como

$$DH(\partial T) = \sup\{\alpha \geq 0 \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\}$$

donde $\text{diam}(B) = \max\{d(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in B\}$.

Recordemos que la proposición 2.20 prueba que la casi-isometría entre árboles induce un homeomorfismo hölderiano entre los respectivos bordes. En esta situación, la proposición 2.3 de [22] muestra el siguiente resultado:

Proposición 2.22 Sean T y T' dos árboles casi-isométricos y $\alpha > 0$ la constante de Hölder entre los bordes ∂T y $\partial T'$. Entonces

$$DH(\partial T') \leq \frac{1}{\alpha} DH(\partial T).$$

Número de ramificación y dimensión de Hausdorff. La definición de dimensión de Hausdorff de un árbol resulta familiar puesto que nos recuerda a la definición de número de ramificación. De hecho, para un árbol T arbitrario tenemos que:

$$(2.1.1) \quad br(T) = e^{DH(\partial T)},$$

véase [54]. Para comprobarlo, consideramos para cada vértice $x \in T$ el conjunto

$$B_x := \{\xi \in \partial T \mid \xi(|x|) = x\}$$

Obsérvese que $\text{diam}(B_x) \leq e^{-|x|}$. De hecho, $\text{diam}(B_x) = e^{-|x|}$ para todo $x \in T$ que tenga más de un hijo. Nótese que un conjunto de vértices Π es una v -separatriz de

T si y sólo si la familia $\{B_x \mid x \in \Pi\}$ es un recubrimiento de ∂T . Además, siempre podemos encontrar otra separatriz Π' de capacidad igual o menor que verifique $\text{diam}(B_x) = e^{-|x|}$ para todo $x \in \Pi'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{br}(T) &= \sup\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)} > 0\} = \exp\{\sup\{\alpha \geq 0 \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} e^{-\alpha|x|} > 0\}\} \\ &= \exp\{\sup\{\alpha \geq 0 \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\}\} = e^{DH(\partial T)}. \end{aligned}$$

Dado un rayo geodésico ξ , la familia $\{B_{\xi(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de entornos de ξ . Por ello, podemos sustituir la familia de recubrimientos arbitrarios por la familia de recubrimientos de la forma $\{B_x \mid x \in \Pi\}$ donde Π es una separatriz.

Observación 2.23 La identidad (2.1.1) sólo es válida para árboles. Más adelante, en §2.4.1, veremos que el grafo de Cayley del grupo del sereno G_1 no es un árbol y su número de ramificación es igual a Φ , aunque sólo posee 1 final.

Si T y T' son dos árboles casi-isométricos, podemos aplicar la relación (2.1.1) entre el número de ramificación y la dimensión de Hausdorff junto con las proposiciones 2.20 y 2.22 para obtener otra prueba del teorema 2.17, es decir, tendremos que:

$$\text{br}(T) \leq \text{br}(T')^{\tilde{c}}$$

con $\tilde{c} = c(2[C] + 1)^2$.

2.2. Número de ramificación de un pseudogrupo grafado

El objetivo principal de esta sección es extender la noción de número de ramificación al contexto de los pseudogrupos grafados. Dicho invariante será definido como el promedio de los números de ramificación de las órbitas genéricas del pseudogrupo. Siguiendo el esquema de la sección anterior, presentaremos la definición de número de ramificación de un pseudogrupo, veremos algunas de sus propiedades y estudiaremos de qué manera influye la equivalencia de Kakutani sobre el número de ramificación.

2.2.1. Definición de número de ramificación de un pseudogrupo

Sea Γ un pseudogrupo finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad casi-invariante μ . Sea Σ un sistema finito de generadores de Γ y $\Gamma_\Sigma(x)$ la órbita del pseudogrupo grafado (Γ, Σ) que pasa por $x \in X$.

Definición 2.24 Se define la *aplicación de ramificación* $br_\Sigma : X \rightarrow [1, \infty)$ como $br_\Sigma(x) = br(\Gamma_\Sigma(x))$ para cada $x \in X$. La aplicación br_Σ está acotada superiormente por el número de elementos del sistema de generadores Σ y además es constante sobre las órbitas.

Para probar que la aplicación de ramificación br_Σ es boreliana, será conveniente fijar de antemano alguna de las notaciones que usaremos a lo largo de la prueba. Denotamos por \mathfrak{B} el conjunto formado por grafos finitos conexos con un punto base fijado y tales que cada arista esté etiquetada por uno de los generadores de Σ . Nótese que por ser Σ finito, la familia \mathfrak{B} es numerable.

Definición 2.25 Dado un punto $x \in X$, diremos que un grafo $B \in \mathfrak{B}$ es *realizable* en la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ si para todo camino $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ en B partiendo del punto base, se tiene que $x \in \text{dom}(\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1)$ y x es un punto fijo de $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1$ si y sólo si el camino es un lazo. Llamaremos B_x al grafo realizado, que pertenece al conjunto \mathfrak{B}_x de grafos finitos de la órbita que contienen al vértice x .

Sea X_B el conjunto de elementos de X tales que B es realizable en sus órbitas. Según la prueba del lema de la hipersuperficie de [29], para cada $B \in \mathfrak{B}$, el conjunto X_B es un boreliano. Además, tenemos una aplicación boreliana

$$\varphi : B \times X_B \rightarrow X$$

que induce un isomorfismo de grafos

$$\varphi|_{B \times \{x\}} : B \times \{x\} \rightarrow B_x.$$

Este será el ingrediente fundamental de la prueba anunciada.

Definición 2.26 Con la notación establecida y fijado un grafo $B \in \mathfrak{B}$ y un $\lambda \geq 1$, definimos la *aplicación capacidad* $\|B\|^\lambda : X \rightarrow (0, \infty]$ por:

$$\|B\|_x^\lambda = \begin{cases} \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} & \text{si } x \in X_B \\ +\infty & \text{si } x \notin X_B \end{cases}$$

De este modo, se tiene que

$$\inf_{\mathfrak{B}_x} \sum_{y \in \partial B} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} = 0 \iff \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0$$

y por tanto, podemos expresar la aplicación de ramificación en cada elemento $x \in X$ como:

$$br_\Sigma(x) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0\}.$$

Proposición 2.27 *La aplicación br_Σ es una aplicación boreliana.*

Demostración. Basta probar que los conjuntos $br_\Sigma^{-1}([a, \infty))$ son borelianos para todo $a \in [1, \infty)$. En efecto,

$$\begin{aligned} br_\Sigma^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0\} \geq a\} \\ &= \{x \in X \mid \lambda < a \Rightarrow \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a)} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \end{aligned}$$

La sucesión de conjuntos $\{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\}$ es contractiva cuando el número $\lambda \rightarrow a$. Luego, podemos quedarnos con una subfamilia numerable para expresar la intersección.

$$\begin{aligned} br_\Sigma^{-1}([a, \infty)) &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Para concluir, necesitamos probar que, fijados $B \in \mathfrak{B}$ y $\lambda \geq 1$, el conjunto $\{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\}$ es un boreliano para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar, observemos que dicho conjunto se descompone de la siguiente manera:

$$\{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\} = \{x \in X \mid \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} \geq \frac{1}{n}\} \sqcup \{x \in X \mid x \notin X_B\}.$$

Según la demostración del lema de la hipersuperficie de [29], mencionado antes, X_B es boreliano y por tanto el segundo conjunto de la unión también lo es. De manera que basta deducir el carácter boreliano del conjunto

$$\{x \in X \mid \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} \geq \frac{1}{n}\}.$$

Puesto que B es un grafo finito con un punto base fijado, los posibles bordes ∂B_x de los grafos realizados en las órbitas se corresponden con los distintos subconjuntos de vértices de B , y por tanto sólo puede haber una cantidad finita. Si F es un conjunto de vértices de B , denotamos por $X_{(B,F)}$ al conjunto de elementos de X_B cuyo borde en B se corresponde con el conjunto F y para cada $b \in F$ denotaremos por x_b al elemento de ∂B_x que se corresponde con el punto b . Por tanto, basta ver si el conjunto

$$\{x \in X_{(B,F)} \mid \sum_{b \in F} \lambda^{-d_\Sigma(x,x_b)} \geq \frac{1}{n}\}$$

es boreliano.

En primer lugar, podemos afirmar que $X_{(B,F)}$ es un boreliano como consecuencia de nuevo de la prueba del lema de la hipersuperficie de [29]. En segundo lugar, dado $b \in F$ y $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_m}\}$ un camino geodésico en B que une el punto base de B con el punto b , se define la aplicación $\gamma(b) : X_{(B,F)} \rightarrow X$ por

$$\gamma(b)(x) = \sigma_{i_m} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(x) = x_b \in \partial B_x$$

que es boreliana, ya que los generadores de Σ son isomorfismos borelianos y su dominio está restringido al boreliano $X_{(B,F)}$. Por otra parte, la aplicación distancia $d_\Sigma : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ es boreliana y en consecuencia la aplicación

$$x \in X_{(B,F)} \mapsto d_\Sigma(x, \gamma(b)(x)) \in [0, \infty)$$

es boreliana para cada $b \in F$. Queda así probado que el conjunto

$$\{x \in X_{(B,F)} \mid \sum_{b \in F} \lambda^{-d_\Sigma(x,x_b)} \geq \frac{1}{n}\}$$

es boreliano. □

Proposición 2.28 *Si la medida μ es ergódica, entonces la aplicación de ramificación br_Σ es constante en μ -casi todo punto.*

Demostración. La aplicación br_Σ es boreliana y está acotada superiormente por el número K de generadores de Σ . Luego $br_\Sigma^{-1}([1, K])$ es un boreliano de medida total. Como br_Σ es constante sobre las órbitas, la imagen inversa de cualquier boreliano será un conjunto saturado. Por tanto, los conjuntos $br_\Sigma^{-1}([a, K])$ serán, o bien de medida nula, o bien de medida total. Sea

$$\mathfrak{b} = \inf\{a \in [1, K] \mid \mu(br_\Sigma^{-1}([a, K])) = 0\}.$$

Entonces el conjunto $br_\Sigma^{-1}((\mathfrak{b}, K]) = \bigcup_{a \in (\mathfrak{b}, K] \cap \mathbb{Q}} br_\Sigma^{-1}([a, K])$ es de medida nula. Por otra parte, el conjunto $br_\Sigma^{-1}([\mathfrak{b}, K]) = \bigcap_{a \in [1, \mathfrak{b}] \cap \mathbb{Q}} br_\Sigma^{-1}([a, K])$ es de medida total. Luego, la función br_Σ es constante, igual a \mathfrak{b} , casi por doquier. \square

Definimos finalmente el número de ramificación de un pseudogrupo grafado como el promedio de la aplicación de ramificación:

Definición 2.29 Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo finitamente generado de transformaciones no singulares de un espacio de probabilidad (X, μ) y Σ un sistema finito de generadores. Se define el *número de ramificación* de (Γ, Σ) relativo a μ como:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int br_\Sigma(x) d\mu(x).$$

Corolario 2.30 Si la medida μ es ergódica, entonces $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = br(\Gamma_\Sigma(x))$ para μ -casi todo $x \in X$.

Demostración. La afirmación es consecuencia inmediata de la proposición 2.28. \square

2.2.2. Crecimiento exponencial y número de ramificación.

Sea Γ un pseudogrupo finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida de probabilidad casi-invariante μ . Sea Σ un sistema finito de generadores de Γ y $\Gamma_\Sigma(x)$ la órbita del pseudogrupo grafado (Γ, Σ) que pasa por $x \in X$.

Definición 2.31 Se definen las *aplicaciones de crecimiento* $\underline{gr}_\Sigma : X \rightarrow [1, \infty)$ y $\underline{Gr}_\Sigma : X \rightarrow [1, \infty)$ como $\underline{gr}_\Sigma(x) = \underline{gr}(\Gamma_\Sigma(x))$ y $\underline{Gr}_\Sigma(x) = \underline{Gr}(\Gamma_\Sigma(x))$ para cada $x \in X$. Ambas aplicaciones están acotadas por el número de elementos de Σ y además son constantes sobre las órbitas.

Proposición 2.32 Las aplicaciones de crecimiento \underline{gr}_Σ y \underline{Gr}_Σ son borelianas.

Demostración. En el primer caso, la prueba es similar a la de la proposición 2.27, aunque más simple. En efecto, para todo $a \in [1, +\infty)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\underline{gr}_{\Sigma}^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} = 0\} \geq a\} \\
&= \{x \in X \mid \lambda < a \Rightarrow \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a)} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{m \geq 1} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > \frac{1}{m}\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid s_x(n) > \frac{\lambda^n}{m}\}
\end{aligned}$$

donde $s_x(n)$ es el cardinal de la esfera de centro x y radio n en la órbita $\Gamma_{\Sigma}(x)$. Luego la imagen inversa de $[a, \infty)$ por \underline{gr} es un conjunto boreliano, ya que la aplicación $s : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $s(x, n) = s_x(n)$ es boreliana y en consecuencia los conjuntos $\{x \in X \mid s_x(n) > \frac{\lambda^n}{k}\}$ también lo son.

En el segundo caso, también tenemos que, para todo $a \in [1, +\infty)$, el siguiente conjunto es boreliano:

$$\begin{aligned}
\underline{Gr}_{\Sigma}^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_x(n))^{\frac{1}{n}} \geq a\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in (a, +\infty) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n \geq 1} \{x \in X \mid \inf_{k \geq n} (v_x(k))^{\frac{1}{k}} \geq \lambda\}.
\end{aligned}$$

siendo $v_x(n)$ el cardinal de la bola de centro x y radio n en la órbita $\Gamma_{\Sigma}(x)$. En efecto, la función volumen $v : (x, n) \in X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $v(x, n) = v_x(n)$ es boreliana y en consecuencia el conjunto

$$\{x \in X \mid \inf_{k \geq n} (v_x(k))^{\frac{1}{k}} \geq \lambda\} = \bigcup_{k \geq n} \{x \in X \mid v_x(k) \geq \lambda^k\}$$

es un boreliano. □

Definición 2.33 Se definen las *tasas de crecimiento exponencial* de (Γ, Σ) respecto de μ como:

$$\underline{gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int \underline{gr}_\Sigma(x) d\mu(x)$$

y

$$\underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int \underline{Gr}_\Sigma(x) d\mu(x).$$

Puesto que la aplicación de ramificación br_Σ está acotada superiormente por las aplicaciones de crecimiento $\underline{gr}_\Sigma \leq \underline{Gr}_\Sigma$, tenemos la siguiente relación entre el número de ramificación y las tasas de crecimiento exponencial de un pseudogrupo finitamente generado:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \underline{gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu).$$

Definición 2.34 Diremos que Γ tiene *crecimiento subexponencial* respecto de μ si $\underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$, o equivalentemente si $\underline{Gr}_\Sigma(x) = 1$ para μ -casi todo $x \in X$.

Proposición 2.35 Si el pseudogrupo Γ tiene crecimiento subexponencial respecto de μ , entonces $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$. \square

2.2.3. Proceso de inducción de Gaboriau

Sea Γ un pseudogrupo medible finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar X . Sea Σ un sistema finito de generadores e Y un boreliano de X que corta a todas las órbitas de Γ . El objetivo de la sección es asociar al pseudogrupo inducido $\Gamma|_Y$ un sistema de generadores que defina en cada órbita una estructura de grafo localmente finito de geometría acotada y conexo.

El proceso de inducción descrito por D. Gaboriau en [26] permite dotar al pseudogrupo inducido $\Gamma|_Y$ de un sistema de generadores finito Σ_Y tal que la estructura de grafo que define sobre cada órbita sea conexa y localmente finita. El proceso consiste en descomponer $\Sigma = \Sigma_v \sqcup \Sigma_h$ en la unión disjunta de dos sistemas Σ_v y Σ_h tales que:

1. las órbitas de (Γ, Σ_v) son árboles que cortan a Y en un único punto.
2. se puede deslizar cada elemento de Σ_h a lo largo de Σ_v para obtener un sistema de generadores Σ_Y del pseudogrupo $\Gamma|_Y$.

Describimos en primer lugar cómo se definen los sistemas *vertical* Σ_v y *horizontal* Σ_h . Sea $Y_0 = Y$ e $Y_i = \{x \in X \mid d_\Sigma(x, Y_0) = i\}$ para $i \in \mathbb{N}$. Mediante particiones de dominios y rangos de los generadores, y en ocasiones sustituyéndolos por sus inversos, podemos suponer que el dominio y el rango de cada generador $\sigma : A \rightarrow B$ verifican $A \subset Y_i$, $B \subset Y_j$ con $i - 1 \leq j \leq i$. Ahora numeramos los generadores y para $i > 0$ y $\sigma \in \Sigma$ denotamos Z_i^σ al conjunto de los $x \in Y_i$ para los que σ es el primer generador definido en x cuya imagen está en Y_{i-1} . Los Z_i^σ forman una partición disjunta de $X - Y$.

Descomponemos entonces cada generador $\sigma : A \rightarrow B$ en dos isomorfismos borelianos σ_v y σ_h donde σ_v es la restricción de σ a Z_i^σ y σ_h es la restricción de σ a $A - Z_i^\sigma$. Denotamos por Σ_v a la familia formada por los σ_v y Σ_h a la familia formada por los σ_h .

Para cada elemento $x \in Y_i$, existe un único generador en Σ_v definido en x que lo envía en un punto de Y_{i-1} . Luego existe una única Σ_v -palabra m_x que envía x en Y . Esto prueba que las órbitas que define el sistema vertical Σ_v son árboles y que cortan a Y en un sólo punto.

A continuación describiremos el proceso de deslizamiento de los elementos de Σ_h a lo largo de las órbitas de (Γ, Σ_v) . De nuevo mediante particiones en los dominios y rangos de los elementos de Σ_h , podemos suponer que para $\sigma_h : A \rightarrow B$, existe una Σ_v -palabra m_{A, σ_h} (resp. m_{B, σ_h}) que para todo $x \in A$ (resp. $y \in B$) es la Σ_v -palabra que envía x (resp. y) en Y . En caso de que A (resp. B) esté contenido en Y , la palabra será por definición la identidad. Definimos para cada σ_h la transformación $\psi_{\sigma_h} = (m_{B, \sigma_h}) \circ \sigma_h \circ (m_{A, \sigma_h})^{-1}$. Finalmente, definimos sobre $\Gamma|_Y$ el sistema de generadores Σ_Y formado por los ψ_{σ_h} con $\sigma_h \in \Sigma_h$, respecto del cual las órbitas poseen una estructura de grafo conexo.

Observación 2.36 i) Nótese que las órbitas de Σ_v son finitas y en consecuencia el deslizamiento de Σ_h da lugar a estructuras de grafo localmente finitas sobre las órbitas de $\Gamma|_Y$. Cuando las órbitas de Σ_v son de diámetro uniformemente acotado, las estructuras de grafo definidas por Σ_Y sobre las órbitas de $\Gamma|_Y$ son además de geometría acotada.

ii) Si Γ es un pseudogrupo de transformaciones de un espacio topológico X e Y es un abierto relativamente compacto que corta a todas las órbitas, podemos dotar a las órbitas de $\Gamma|_Y$ de una buena estructura métrica si Γ es un pseudogrupo de generación compacta (véase [41]) dotado de un *buen* sistema de generación compacta (véase [51]).

iii) Si las órbitas de (Γ, Σ_v) tienen diámetro uniformemente acotado, entonces los pseudogrupos (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.

2.2.4. Equivalencia de Kakutani y número de ramificación

El número de ramificación asociado a un pseudogrupo de tipo finito Γ depende, como hemos visto, del sistema finito de generadores que tomemos. Tiene sentido preguntarse qué sucede con el número de ramificación cuando cambiamos el sistema de generadores Σ por otro sistema finito Σ' . Recordemos que (Γ, Σ) y (Γ, Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani. Por ello, estudiaremos de manera más general cómo afecta la equivalencia de Kakutani al número de ramificación.

Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos de tipo finito actuando sobre espacios borelianos estándar X y X' , dotados de medidas de probabilidad casi-invariantes μ y μ' respectivamente. Si (Γ', Σ') es un factor de Kakutani de (Γ, Σ) , existe una aplicación $P : X \rightarrow X'$ que define una casi-isometría entre los grafos $\Gamma_\Sigma(x)$ y $\Gamma'_{\Sigma'}(P(x))$ para μ -casi todo $x \in X$. En particular, existen $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que

$$\frac{1}{C_1}d_\Sigma(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\Sigma'}(P(x_1), P(x_2)) \leq C_1d_\Sigma(x_1, x_2) + C_2$$

para todo par $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$. Luego, para μ -casi todo punto $x \in X$, sabemos que

$$(2.2.2) \quad br(\Gamma'_{\Sigma'}(P(x)))^{\frac{1}{C}} \leq br(\Gamma_\Sigma(x)) \leq br(\Gamma'_{\Sigma'}(P(x)))^C$$

donde $C = (C_1 + C_2)(2[C_1C_2] + 1)^2$. Basta aplicar el teorema 2.17. Nótese que la imagen por P de un conjunto de μ -medida total es un conjunto de μ' -medida total. Por esto y por ser P sobreyectiva, podemos afirmar que el resultado anterior también se verifica para μ' -casi todo $x' \in X'$. De ese modo, tenemos que las respectivas aplicaciones de ramificación verifican $br_\Sigma \leq br_{\Sigma'}^C$.

En particular, si las medidas μ y μ' son ergódicas, se tiene

$$br(\Gamma', \Sigma', \mu')^{\frac{1}{C}} \leq br(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq br(\Gamma', \Sigma', \mu')^C$$

En general, de las desigualdades (2.2.2) se deduce que la propiedad de tener número de ramificación igual a 1 sí es invariante por equivalencia de Kakutani:

Proposición 2.37 *Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos de transformaciones no singulares de dos espacios de probabilidad (X, μ) y (X', μ') , dotados de dos sistemas finitos de generadores Σ y Σ' . Supongamos que son equivalentes en el sentido de Kakutani. Entonces*

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1 \iff br(\Gamma', \Sigma', \mu') = 1.$$

2.3. Promediabilidad y propiedad de Liouville

La propiedad de tener número de ramificación igual a 1 nos proporciona un criterio de promediabilidad para pseudogrupos. Si además la medida considerada es armónica, entonces el pseudogrupo verifica la propiedad de Liouville por la cual no pueden existir funciones armónicas acotadas no constantes sobre las órbitas.

En la sección siguiente, recordamos las nociones de entropía y velocidad y presentamos los resultados anunciados que relacionan la promediabilidad y la propiedad de Liouville con el número de ramificación.

2.3.1. Promediabilidad y número de ramificación

Tal y como sucede en el caso de grafos de Cayley de un grupo, un pseudogrupo grafado es promediable cuando su número de ramificación es igual a 1. Para probar este resultado, utilizamos la definición de *condición de Reiter débil* introducida por C. Anantharaman-Delaroche y J. Renault en [5]:

Definición 2.38 ([5]) Diremos que el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) actuando sobre el espacio de probabilidad (X, μ) verifica la *condición de Reiter débil* si existe un sistema medible de medidas de probabilidad $\{g_n(x, -)\}$ sobre las órbitas $\Gamma(x)$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{y, z \in \Gamma(x)} f(x, y) |g_n(y, z) - g_n(x, z)| d\mu(x) = 0$$

para cada función $f \in L^1(\mathcal{R}, \tilde{\mu})$ donde \mathcal{R} es el grafo de la relación de equivalencia definida por la acción de Γ y $\tilde{\mu}$ es la medida natural obtenida a partir de μ (véase §1.2.4).

Proposición 2.39 ([5]) *Un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) es μ -promediable si y sólo si verifica la condición de Reiter débil.*

Veamos entonces que si el número de ramificación de un pseudogrupo grafado es igual a 1 entonces verifica la condición de Reiter débil:

Teorema 2.40 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad casi-invariante μ . Si el número de ramificación $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$, entonces Γ es μ -promediable.*

Demostración. Para probar que Γ es μ -promediable, veremos que la relación de equivalencia \mathcal{R} admite una sucesión de medidas que verifican la condición débil de Reiter. Por hipótesis, μ -casi toda órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ contiene un subgrafo finito $B_n^x \in \mathfrak{B}_x$ tal que

$$\sum_{z \in \partial B_n^x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(x,z)} \leq \frac{1}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Esto significa que $d_\Sigma(x, z) \geq \log n / \log(1 + \frac{1}{n})$ para todo $z \in \partial B_n^x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función medible ρ_n sobre \mathcal{R} definida por

$$\rho_n(x, z) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(x,z)} & \text{si } z \in B_n^x \\ 0 & \text{si } z \notin B_n^x \end{cases}$$

Denotamos además ρ_n a la función sobre X dada por $\rho_n(x) = \sum_{z \in \Gamma(x)} \rho_n(x, z)$. Obtenemos así un sistema medible de medidas de probabilidad sobre las órbitas $\Gamma(x)$ tomando

$$g_n(x, z) = \rho_n(x, z) / \rho_n(x).$$

Vemos ahora que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la diferencia $|g_n(y, z) - g_n(x, z)|$ converge uniformemente a 0 para todo $z \in \Gamma(x)$, cuando $d_\Sigma(x, y) = m$. Puesto que

$$\begin{aligned} |g_n(y, z) - g_n(x, z)| &\leq \frac{\max\{\rho_n(y), \rho_n(x)\}}{\rho_n(y)\rho_n(x)} \cdot |\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)| \\ &= \frac{1}{\min\{\rho_n(y), \rho_n(x)\}} \cdot |\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)| \\ &\leq |\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)|, \end{aligned}$$

basta probar que $|\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)| \rightarrow 0$ para todo $z \in \Gamma(x)$. El caso en que $z \notin B_n^x \cup B_n^y$ es trivial. Supongamos ahora que $z \in B_n^x \cap B_n^y$, entonces

$$|\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(y,z)} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(y,z)+m} \right| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(x,y)} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m - 1 \right)$$

que converge a 0. Por último, para cada $z \in B_n^x - B_n^y$, la sucesión

$$|\rho_n(y, z) - \rho_n(x, z)| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(x,z)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-d_\Sigma(y,z)+m} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$$

también converge a 0 ya que $d_\Sigma(y, z) \geq \log n / \log(1 + \frac{1}{n})$.

Para concluir con la prueba, consideramos una función integrable f medible y positiva definida sobre \mathcal{R} . Denotamos $S = \int \sum_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) d\mu(x) < +\infty$. Para todo real $\varepsilon > 0$, existe un entero $m \geq 0$ suficientemente grande que verifica

$$S - \int \sum_{d_\Sigma(x, y) \leq m} f(x, y) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Además, para todo entero suficientemente grande $n \geq 0$, se puede suponer que $|g_n(y, z) - g_n(x, z)| < \frac{\varepsilon}{2S}$ cuando $d_\Sigma(x, y) \leq m$. Por consiguiente, la integral:

$$\int \sum_{y, z \in \Gamma(x)} f(x, y) |g_n(y, z) - g_n(x, z)| d\mu(x) < \varepsilon,$$

puesto que se descompone en la suma de las dos siguientes integrales:

$$\int \sum_{d_\Sigma(x, y) \leq m} f(x, y) |g_n(y, z) - g_n(x, z)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2S} \int \sum_{d_\Sigma(x, y) \leq m} f(x, y) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int \sum_{d_\Sigma(x, y) > m} f(x, y) |g_n(y, z) - g_n(x, z)| d\mu(x) < 2 \int \sum_{d_\Sigma(x, y) > m} f(x, y) d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que queda probado el resultado. \square

2.3.2. Propiedad de Liouville y número de ramificación

Antes de presentar una condición suficiente para que un pseudogrupo grafado posea la propiedad de Liouville, recordaremos las nociones de entropía y velocidad que nos servirán de ayuda.

Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones no singulares de un espacio de probabilidad (X, μ) , y Σ un sistema finito de generadores. Teniendo presentes las definiciones de la subsección §1.3.4, consideremos un núcleo de transición medible π sobre X , el recorrido aleatorio (Ω, P) sobre el pseudogrupo asociado a π y los recorridos aleatorios (Ω_x, P_x) sobre las órbitas $\Gamma_\Sigma(x)$, para cada punto $x \in X$. Recordemos que Γ tiene la *propiedad de Liouville* si μ -casi toda órbita no admite funciones armónicas acotadas no constantes, (véase la sección §1.5).

Entropía. Para μ -casi todo punto $x \in X$, la entropía

$$H_1(x) = - \sum_{y \in \Gamma(x)} \pi(x, y) \log \pi(x, y) = - \int \log \pi(Z_0, Z_1) dP_x(Z) < +\infty$$

debido a que $\Gamma_\Sigma(x)$ es de geometría acotada. De igual modo, para todo $n \in \mathbb{N}$, la entropía

$$H_n(x) = - \sum_{y \in \Gamma(x)} \pi_n(x, y) \log \pi_n(x, y) = - \int \log \pi_n(Z_0, Z_n) dP_x(Z) < +\infty$$

ya que $H_n(x)$ es *subaditiva*, i.e. $H_{n+m}(x) \leq H_n(x) + H_m(x)$ para todo par de enteros $n, m \geq 1$. Esto implica la existencia del límite $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_n(x)$.

Definición 2.41 ([6], [7], [20], [48]) Diremos que $h(x)$ es la *entropía de la marcha aleatoria sobre $\Gamma_\Sigma(x)$* .

Si H_1 es integrable, entonces

$$\int H_1(x) d\mu(x) = - \int \log \pi(Z_0, Z_1) dP(Z) < +\infty.$$

Esto ocurre cuando π es reversible y el sistema de conductancias está mayorado y minorado. En tal caso, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que la función h es integrable y que la entropía media $\mathfrak{h} = \int h(x) d\mu(x)$ viene dada por:

$$\mathfrak{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int H_n(x) d\mu(x) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \pi_n(Z_0, Z_n) dP(Z).$$

Definición 2.42 Diremos que \mathfrak{h} es la *entropía de la marcha aleatoria sobre Γ* .

Si la medida μ es π -armónica, los métodos de [48] muestran que:

$$\mathfrak{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (H_n(x) - H_{n-1}(x)) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \log \frac{\pi_{n-1}(Z_1, Z_n)}{\pi_n(Z_0, Z_n)} dP(Z).$$

Por analogía con la entropía de los recorridos aleatorios sobre grupos discretos (véase [20], [48], [49]), en el caso ergódico, dicha cantidad verifica la *propiedad de equidistribución del teorema de Shannon-Breiman-McMillan*, esto es

$$\mathfrak{h} = \int h(x) d\mu(x) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n}$$

para P -casi toda trayectoria $Z \in \Omega$. En efecto, la sucesión de las funciones

$$f_n(Z) = -\log \pi_n(Z_0, Z_n)$$

es subaditiva ya que $f_{n+m}(Z) \leq f_n(Z) + f_m(S^n(Z))$ y

$$\frac{1}{n} \int f_n(Z) dP(Z) = \frac{1}{n} \int H_n(x) d\mu(x) \leq \int H_1(x) d\mu(x) < +\infty$$

siendo S el desplazamiento de Bernoulli. Cuando μ es armónica, P es invariante por S y aunque S no sea inversible podemos aplicar el teorema ergódico subaditivo de Kingman [19]. Por la ergodicidad de la medida deducimos la propiedad de equidistribución (ver también [47]).

Velocidad. El operador markoviano inducido por D_π sobre $\Gamma_\Sigma(x)$ tiene un primer momento

$$L_1(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} d_\Sigma(x, y) \pi(x, y) = \int d_\Sigma(Z_0, Z_1) dP_x(Z) = 1.$$

Como en el caso de la entropía, la sucesión de distribuciones $\pi_n(x, -)$ define una sucesión subaditiva

$$L_n(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} d_\Sigma(x, y) \pi_n(x, y) = \int d_\Sigma(Z_0, Z_n) dP_x(Z) < +\infty.$$

Existe por tanto el límite $l(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} L_n(x)$.

Definición 2.43 Diremos que $l(x)$ es la *velocidad de la marcha aleatoria sobre $\Gamma_\Sigma(x)$* .

De nuevo, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue muestra que l es integrable y que la velocidad media

$$\mathfrak{l} = \int l(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int L_n(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} dP(Z).$$

Definición 2.44 Diremos que \mathfrak{l} es la *velocidad de la marcha aleatoria sobre Γ* .

Si la medida μ es armónica ergódica, como la sucesión de funciones integrales $f_n(Z) = d_\Sigma(Z_0, Z_n)$ es subaditiva, el teorema ergódico subaditivo de Kingman muestra de nuevo que \mathfrak{l} verifica la propiedad de equidistribución del teorema de Shannon-Breiman-McMillan, i.e.

$$\mathfrak{l} = \int l(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n}$$

para P -casi toda trayectoria $Z \in \Omega$.

Operador de difusión regular. El operador de difusión $D_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$ se dice *regular* si su restricción a las órbitas

$$D_\pi : l^\infty(\Gamma(x)) \rightarrow l^\infty(\Gamma(x))$$

es *regular* (en el sentido de [47]) para μ -casi todo $x \in X$, es decir, si existen constantes

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)), \mathfrak{l}(\Gamma(x)) > 0$$

que sólo dependen de la órbita, tales que para todo $y \in \Gamma_\Sigma(x)$ se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} - \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n} = \mathfrak{h}(\Gamma(x))$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} = \mathfrak{l}(\Gamma(x))$$

para P_y -casi toda trayectoria $Z \in \Omega$ contenida en la órbita $\Gamma(y) = \Gamma(x)$.

Si el operador de difusión D_π es regular, el teorema de la convergencia dominada nos garantiza que:

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int - \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n} dP_x(Z) = \mathfrak{h}(\Gamma(x)),$$

para μ -casi todo punto $x \in X$. En particular, $h(x)$ es constante sobre las órbitas. En tal caso diremos que $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$ es la *entropía asintótica* de $\Gamma(x)$. Siguiendo el mismo razonamiento, tenemos que:

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int - \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} dP_x(Z) = \mathfrak{l}(\Gamma(x))$$

para μ -casi todo punto $x \in X$. Ahora diremos que $\mathfrak{l}(\Gamma(x))$ es la *velocidad del recorrido aleatorio* sobre $\Gamma(x)$.

El siguiente resultado de V. A. Kaimanovich y W. Woess permite comparar ambas cantidades en el caso regular:

Lema 2.45 ([49]) *Si D_π es regular, entonces para μ -casi todo $x \in X$ se tiene*

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)) \leq \log(\underline{Gr}(\Gamma(x)))\mathfrak{l}(\Gamma(x)).$$

□

Propiedad de Liouville y número de ramificación. Presentamos a continuación la demostración del criterio anunciado:

Teorema 2.46 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida armónica μ con entropía H_1 integrable. Si $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$, entonces Γ verifica la propiedad de Liouville para μ .*

Demostración. En primer lugar, recordemos que según [47], si μ es armónica, el operador de difusión D_π es regular. Luego podemos aplicar los resultados previos.

Por otra parte, si $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$, la función br_Σ es constante igual a 1 en μ -casi todo punto. Según el teorema 1.1 de [66], si $br(x) = 1$ entonces

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} = 0$$

para P_x -casi toda trayectoria $Z \in \Omega$ contenida en la órbita $\Gamma(x)$. En el caso regular, esta cantidad coincide con $\mathfrak{l}(\Gamma(x))$. Luego $\mathfrak{l}(\Gamma(x)) = 0$ para μ -casi todo punto $x \in X$. Usando el lema 2.45, se obtiene que $\mathfrak{h}(\Gamma(x)) = 0$ para μ -casi todo punto $x \in X$ y en consecuencia $\Gamma_\Sigma(x)$ no posee función armónica acotada no constante por [46]. \square

2.4. Ejemplos

En esta sección presentamos tres ejemplos que ilustran nuestros resultados. Empezaremos probando que el recíproco del teorema 2.40 no es cierto. Para ello, veremos que la acción natural del grupo del sereno sobre el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_2[[t]]$ identificado con el conjunto de Cantor es promediable, aunque el número de ramificación de las órbitas es igual al número de oro. A continuación presentamos un ejemplo de laminación Liouviliana con crecimiento exponencial, pero cuyo pseudogrupo de holonomía tiene número de ramificación igual a 1. Este ejemplo muestra que el teorema 2.40 generaliza de manera efectiva los resultados de C. Series [63] y M. Sanuélides [62] sobre la promediabilidad de foliaciones con crecimiento polinomial y de V. Kaimanovich [46, 47] en el caso subexponencial. Para terminar, calculamos el número de ramificación de la relación de equivalencia definida por un proceso de Galton-Watson supercrítico.

2.4.1. Grupo del sereno

Consideremos el conjunto $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \{ \eta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \mid \eta^{-1}(1) \text{ finito} \}$ y la acción de \mathbb{Z} por la derecha sobre $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ generada por el automorfismo

$$S : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2,$$

dado por $S(\eta)(i) = \eta(i - 1)$.

Definición 2.47 Se define el *grupo del sereno* G_1 como el producto semidirecto

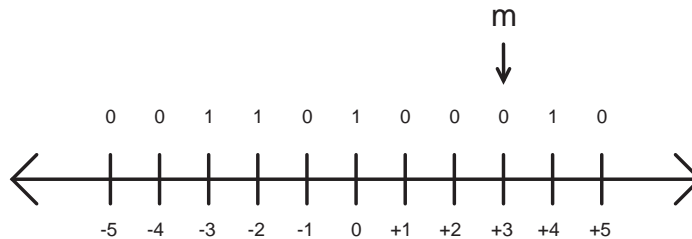
$$G_1 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}$$

con la operación de grupo

$$(\eta, m)(\eta', m') = (\eta + S^m(\eta'), m + m').$$

El nombre del grupo se debe a la siguiente interpretación: dado $(\eta, m) \in G_1$, cada elemento $n \in \mathbb{Z}$ puede verse como un farol que puede estar encendido ($\eta(n) = 1$) o apagado ($\eta(n) = 0$) y el entero m señala en qué farol se encuentra el sereno.

Obsérvese que podemos identificar cada elemento η con su soporte, de manera que el conjunto $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ podemos identificarlo con el conjunto de las partes finitas de \mathbb{Z} . Ahora, dado un elemento $(A, m) \in G_1$, el subconjunto finito $A \subset \mathbb{Z}$ representa el conjunto de faroles encendidos y m sigue siendo la posición del sereno. A partir de ahora, expresaremos los elementos del grupo del sereno de esta manera para simplificar los cálculos.



Representación del elemento (A, m) con $A = \{-3, -2, 0, +4\}$ y $m = +3$.

Luego, el producto se expresa como

$$(A, m)(A', m') = (A\Delta\{A' + m\}, m + m')$$

donde $A, A' \subset \mathbb{Z}$ son finitos y Δ representa su diferencia simétrica. Por tanto, multiplicar el elemento (A, m) por (\emptyset, m') significa que el sereno se desplaza de la posición m a la $m + m'$. Por otro lado, la multiplicación por $(A' = \{n_1, \dots, n_k\}, 0)$ significa que el sereno se traslada a cada uno de los faroles $m + n_i$ y los apaga si están encendidos, o los enciende si están apagados, y al finalizar vuelve a su posición inicial m . Puesto que todo elemento (A, m) se puede escribir como

$$(A, m) = (A, 0)(\emptyset, m),$$

queda totalmente determinada la interpretación del producto del grupo del sereno. Notemos que el elemento $(\emptyset, 0)$ es el elemento neutro del grupo, que denotamos 1.

Grafo de Cayley del grupo del sereno Nos interesamos por el grafo de Cayley $\mathcal{G}_1 = (G_1, S)$ del grupo del sereno G_1 con el sistema de generadores simétrico $S = \{a = a^{-1} = (\{0\}, 0), b = (\emptyset, -1), b^{-1} = (\emptyset, -1)\}$. Nótese que el elemento a coincide con su inverso. De hecho, G_1 admite la siguiente presentación no finita:

$$G_1 = | a, b : a^2 = 1, [b^i a b^{-i}, b^j a b^{-j}] = 1 |$$

que determina al grafo \mathcal{G}_1 . En efecto, dado un elemento $(\{n_1, \dots, n_k\}, m)$ del grupo del sereno, su expresión en función de los generadores es la siguiente:

$$(\{n_1, \dots, n_k\}, m) = b^{n_1} a b^{-n_1} b^{n_2} a b^{-n_2} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m.$$

Cada expresión de la forma $b^{n_i} a b^{-n_i}$ se interpreta como que el sereno parte del origen, va al farol n_i , lo enciende (o apaga) y vuelve al origen. El último elemento b^m es el que hace que, tras haber encendido los correspondientes faroles, el sereno se traslade a la posición m .

Número de ramificación del grupo del sereno. Puesto que se trata de un grafo de Cayley, el número de ramificación y la tasa de crecimiento exponencial de \mathcal{G}_1 coinciden. Por otra parte, el árbol de Fibonacci T' descrito en el ejemplo 1.7 es un subárbol del grafo \mathcal{G}_1 . En efecto, si tomamos como vértices de T' los elementos (A, m) de G_1 tales que A no contiene enteros negativos y $m \geq \max A$, entonces obtenemos dicho árbol. Los vértices que verifican $m = \max A$ tienen un único hijo, el elemento $(A, m + 1)$. Los vértices para los que $m > \max A$ tienen como hijos los elementos $(A, m + 1)$ y $(A\Delta\{m\}, m)$. Sabemos que

$$br(T') = gr(T') = \Phi,$$

luego

$$br(\mathcal{G}_1) = gr(\mathcal{G}_1) \geq \Phi.$$

No es difícil ver que la raíz n -ésima del número de elementos a distancia n del origen del grafo, $s(n)^{\frac{1}{n}}$, tiene como cota superior el producto de una constante por $(\sum_{k \leq n} \Phi^k)^{\frac{1}{n}}$, que converge asintóticamente al mismo producto por Φ . Luego,

$$br(\mathcal{G}_1) = gr(\mathcal{G}_1) = \Phi.$$

Tal y como anunciamos en 2.23, el logaritmo del número de ramificación de \mathcal{G}_1 no coincide con la dimensión de Hausdorff de su espacio de finales ∂G_1 . En efecto, basta observar que ∂G_1 se reduce a un único final. Para ello, recordemos que, según un resultado clásico de H. Hopf, un grupo infinito finitamente generado debe tener 1, 2 o un conjunto de Cantor de finales. Teniendo en cuenta su definición como producto semidirecto de $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ y \mathbb{Z} , resulta claro que G_1 es un grupo promediable. Luego, el grupo del sereno G_1 no puede tener un conjunto de Cantor de finales como vimos en 1.47. Tampoco puede tener 2 finales, ya que tales grupos son extensiones finitas de \mathbb{Z} o de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ como consecuencia del teorema de J. Stallings (véase 1.17). Por consiguiente, G_1 tiene exactamente 1 final.

Acción de G_1 sobre el conjunto de Cantor. Consideremos el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{Z}_2 ,

$$\mathbb{Z}_2[[t]] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

que identificaremos con el *conjunto de Cantor* $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, dotado de la topología generada por los cilindros

$$C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \{ (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid x_0 = \alpha_0, \dots, x_n = \alpha_n \}.$$

Este conjunto admite una medida de probabilidad μ que asigna a cada cilindro $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ la probabilidad

$$\mu(C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = 2^{-n}.$$

El objetivo de este apartado es describir una acción esencialmente libre del grupo del sereno G_1 sobre el conjunto de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Recordemos que una acción se dice *libre* si el único elemento del grupo que tiene puntos fijos es el elemento neutro, es decir, si $Fix(g) \neq \emptyset$ entonces $g = e$. En el caso topológico diremos que la acción es *esencialmente libre* si la unión de los puntos fijos de todos los elementos del grupo (excepto el neutro) es un conjunto magro, es decir, unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío. En el caso medible, diremos que la acción es

esencialmente libre respecto de una medida casi-invariante si la unión de los puntos fijos de todos los elementos del grupo (excepto el neutro) es un conjunto de medida nula.

Recordemos que el grupo del sereno admite la presentación

$$G_1 = \langle a, b : a^2 = 1, [b^i a b^{-i}, b^j a b^{-j}] = 1 \rangle$$

donde $a = (\{0\}, 0)$ y $b = (\emptyset, 1)$. Luego, si definimos de qué modo actúan los generadores, tendremos determinada la acción. En efecto, la acción

$$G_1 \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

está generada por:

$$\begin{aligned} (a, (x_0, x_1, \dots)) &\mapsto (x_0 + 1, x_1, \dots) \\ (b, (x_0, x_1, \dots)) &\mapsto (x_0, x_1 + x_0, x_2 + x_1, \dots) \end{aligned}$$

Para manejar la acción anterior, nos será más útil expresar el conjunto de Cantor como anillo de polinomios infinitos. De ese modo, tenemos la acción:

$$\varphi : G_1 \times \mathbb{Z}_2[[t]] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[[t]]$$

generada por:

$$\begin{aligned} (a, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i) &\mapsto 1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \\ (b, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i) &\mapsto (1 + t) \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbb{Z}_2[[t]]$ es un anillo local cuyo ideal maximal es el generado por t , el polinomio $1 + t$ pertenece al conjunto de las unidades y su inverso es de la forma $(1 + t)^{-1} = \sum_{i \in \mathbb{N}} t^i$. Luego, podemos expresar la acción del elemento b^{-1} sobre un polinomio arbitrario $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$ como $(1 + t)^{-1}p$. Mediante un sencillo cálculo, se prueba que dicha acción es compatible con las relaciones entre generadores, de manera que está bien definida. Además, si tenemos en cuenta que todo elemento $g = (\{n_1, \dots, n_k\}, m)$ de G_1 se puede escribir como $b^{n_1} a b^{-n_1} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m$, la acción de g sobre $\mathbb{Z}_2[[t]]$ está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (2.4.3) \quad g \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i &= b^{n_1} a b^{-n_1} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \\ &= (1 + t)^{n_1} + \dots + (1 + t)^{n_k} + (1 + t)^m \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \end{aligned}$$

Además, la medida μ sobre el conjunto de Cantor es invariante por la acción del grupo del sereno. En efecto, dado un cilindro $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, tenemos

$$\begin{aligned} a \cdot C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} &= C_{\alpha_0+1, \alpha_1, \dots, \alpha_n} \\ b \cdot C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} &= C_{\alpha_0, \alpha_1+\alpha_0, \dots, \alpha_n+\alpha_{n-1}} \end{aligned}$$

Proposición 2.48 *La acción de G_1 sobre $\mathbb{Z}_2[[t]]$ es esencialmente libre respecto de la medida μ .*

Demostración. En primer lugar, notemos que la acción no es libre porque el elemento $b \in G_1$ tiene al menos un punto fijo: la sucesión de ceros. Por tanto, veremos que dicha acción es esencialmente libre respecto de la medida μ . En realidad, probaremos que es siempre esencialmente libre independientemente de la medida que tomemos sobre el Cantor. Si vemos que cada uno de los conjuntos $Fix(g)$ es de medida nula, entonces la unión numerable $\bigcup_{g \in G_1} Fix(g)$ es de medida nula.

Sea $g = (A, m) \in G_1$, $g \neq 1$. Supongamos que existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$ tal que $p \in Fix(g)$. La primera restricción sobre el entero m para que g tenga puntos fijos es que sea distinto de 0. En efecto, se deduce fácilmente de la expresión (2.4.3). No es necesario estudiar los dos casos restantes, $m > 0$ y $m < 0$, ya que si p es un punto fijo de $g = (A, m)$, entonces también lo es del elemento $g^{-1} = (S^{-m}(A), -m)$ y viceversa. Por lo tanto, podemos suponer $m > 0$.

Si consideramos las restricciones m positivo y A un conjunto de enteros no negativos, desarrollando la expresión (2.4.3) se obtiene que

$$g \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i t^i$$

donde

$$y_i = \sum_{l=1}^k \binom{n_l}{i} + \sum_{j=0}^i \binom{m}{j} x_{i-j}.$$

De modo sencillo se deduce que $Fix(g) = \{p\}$. Lo mismo sucede si tomamos A un conjunto finito arbitrario de \mathbb{Z} . En efecto, si $p \in Fix(g)$, entonces $(1+t)^{-n_1} p \in Fix(g') = \{(1+t)^{-n_1} p\}$ para $g' = (S^{-n_1}(A), m)$, ya que $S^{-n_1}(A)$ está formado por positivos, luego p es también el único punto fijo posible. Por tanto, tenemos que cada elemento de G_1 tiene a lo sumo un punto fijo, y en consecuencia, el conjunto $\bigcup_{g \in G_1} Fix(g)$ es de medida nula por ser unión numerable de conjuntos de medida nula. \square

Observación 2.49 La acción también es esencialmente libre en el sentido topológico ya que los conjuntos $Fix(g)$ son cerrados de interior vacío, y en consecuencia $\bigcup_{g \in G_1} Fix(g)$ es magro.

En realidad, la acción es esencialmente libre no sólo para la medida μ , sino también para toda medida sobre el conjunto de Cantor que no tenga átomos. Si vemos que toda órbita de la acción es infinita, entonces todas las medidas de Borel invariantes sobre el conjunto de Cantor carecen de átomos y quedaría probado que la acción es esencialmente libre independientemente de la medida que tomemos. Recordemos que el *grupo de isotropía* de un polinomio $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$ es el subgrupo de G_1 formado por los elementos que dejan fijo el polinomio p , es decir,

$$I_p = \{g \in G_1 \mid g \cdot p = p\}.$$

Nótese que G_1/I_p es la órbita que pasa por p . Consideramos la segunda proyección $\pi : G_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\pi((A, m)) = m$. Obviamente π es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y en consecuencia, la imagen por π del subgrupo I_p ha de ser un subgrupo de \mathbb{Z} . Es decir, $\pi(I_p)$ o bien es $\{0\}$, o bien es $n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Nótese que no puede ser el subgrupo $\{0\}$ porque en ese caso todos los elementos de I_p tendrían $m = 0$, cosa que no es posible porque los elementos de G_1 con $m = 0$ no tienen puntos fijos. Por tanto, $\pi(I_p) = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, resulta trivial que el núcleo $ker(\pi) = \mathbb{Z}_2 \wr \{0\}$. Luego, usando de nuevo el argumento de que un elemento de G_1 con $m = 0$ no tiene puntos fijos, se tiene:

$$Ker(\pi|_{I_p}) = Ker(\pi) \cap I_p = \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} \cap I_p = \{1\}.$$

Por tanto, por el lema del Ker-Coker, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \{1\} & \xrightarrow{i} & I_p & \xrightarrow{\pi} & n\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} & \xrightarrow{i} & G_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} & \xrightarrow{\bar{i}} & G_1/I_p & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

Obsérvese que la órbita G_1/I_p siempre contiene al subgrupo infinito $\mathbb{Z}_2 \wr \{0\}$. Luego todas las órbitas son infinitas y no puede existir ninguna medida invariante con átomos.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.50 *El pseudogrupo de transformaciones de $\mathbb{Z}_2[[t]]$ generado por la acción de G_1 tiene número de ramificación igual a Φ respecto del sistema de generadores $\Sigma = \{a, b\}$ para cualquier medida invariante.*

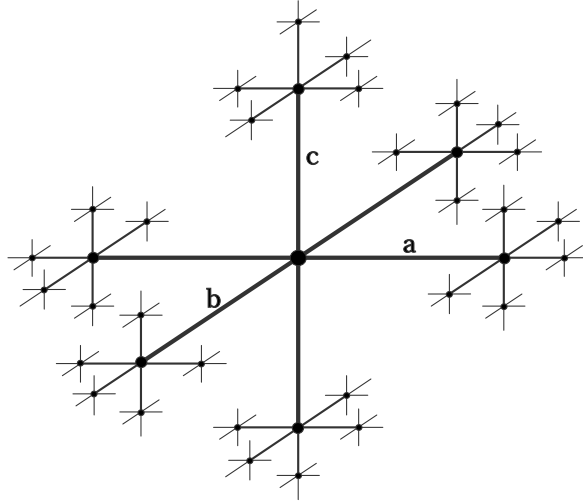
El resultado anterior muestra que el recíproco del teorema 2.40 no es cierto pues G_1 es promediable y su número de ramificación es $\Phi > 1$.

2.4.2. Una laminación liouviliana con crecimiento exponencial.

Construimos a continuación un ejemplo de laminación liouviliana con crecimiento exponencial. Se trata de una laminación transversalmente Cantor, minimal (i.e. todas las hojas son densas) y sin holonomía, dotada de una medida transversa invariante respecto de la cual las hojas genéricas son casi-isométricas a un árbol con un final y crecimiento exponencial. El ejemplo se construye a partir de un árbol aperiódico repetitivo del espacio de Gromov-Hausdorff del grupo libre con tres generadores \mathbb{F}^3 , siguiendo una idea de E. Blanc [12].

El interés de este ejemplo se debe a que muestra que el teorema 2.40 generaliza de manera efectiva los resultados de C. Series [63] y M. Samuélidès [62] sobre la promediabilidad de las hojas de foliaciones con crecimiento polinomial, y los resultados de V. Kaimanovich [46, 47] sobre la promediabilidad de foliaciones con crecimiento subexponencial. Nuestro ejemplo es promediable con crecimiento exponencial. Hay otros ejemplos construidos por R. Roussarie, W. Thurston [65] y E. Ghys y V. Sergiescu [32], pero están definidos por acciones localmente libres del grupo afín. En nuestro caso, la laminación es liouviliana debido a que el número de ramificación de su pseudogrupo de holonomía es igual a 1.

Espacio de Gromov-Hausdorff. Vamos a recordar cómo se define la topología de Gromov-Hausdorff sobre el espacio de los subárboles infinitos enraizados del grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores. La definición de dicha topología puede extenderse a cualquier conjunto de subgrafos infinitos enraizados del grafo de Cayley de cualquier grupo de tipo finito.

Grafo de Cayley de \mathbb{F}^3 con generadores $\{a, b, c\}$.

Sea $\mathcal{G}_3 = \mathcal{F}^3$ el grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores $\mathbb{F}^3 = \langle a, b, c \rangle$ descrito en la figura anterior. Sea \mathcal{T} el conjunto formado por todos los subárboles infinitos de \mathcal{G}_3 que contienen el elemento neutro 1. Dotamos a \mathcal{T} de la *métrica de Gromov-Hausdorff* definida de la siguiente manera: dados dos árboles $T, T' \in \mathcal{T}$,

$$d(T, T') = e^{-R(T, T')}$$

donde $R(T, T') = \sup\{N \geq 0 \mid B_T(1, N) = B_{T'}(1, N)\}$.

El espacio (\mathcal{T}, d) es llamado *espacio de Gromov-Hausdorff* y es relativamente sencillo probar que es homeomorfo a un conjunto de Cantor (espacio compacto, totalmente desconexo y perfecto).

Relación de equivalencia grafada sobre el espacio de Gromov-Hausdorff. Definimos sobre \mathcal{T} la relación de equivalencia \mathcal{R} tal que, dados dos árboles $T, T' \in \mathcal{T}$

$$T \mathcal{R} T' \iff \exists g \in \mathbb{F}^3 : T' = g^{-1}T.$$

Puesto que $g^{-1}T$ tiene que contener al elemento neutro, la clase de T es el conjunto

$$\mathcal{R}[T] = \{g^{-1}T \mid g \in \mathbb{F}^3\}.$$

Podemos pensar que los elementos de la clase de T se obtienen trasladando el punto base de T al resto de sus vértices.

El sistema de generadores $S = \{a, b, c\}$ permite definir una estructura de grafo sobre $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$. Cada clase $\mathcal{R}[T]$ es el conjunto de vértices de un grafo $\mathcal{R}_S[T]$

donde $T', T'' \in \mathcal{R}[T]$ están unidos por una arista si y sólo si $T'' = s^{-1}T'$ con $s \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}\}$. Nótese que el grafo $\mathcal{R}_S[T]$ es isomorfo al cociente del árbol T por el grupo de traslaciones que lo preservan. Decimos que un árbol $T \in \mathcal{T}$ es *aperiódico* si no existe traslación que lo deje invariante. En ese caso, $\mathcal{R}_S[T] \equiv T$.

Siguiendo el procedimiento descrito por E. Ghys en [30], se puede construir una laminación por superficies de Riemann sobre un espacio compacto M que denotaremos \mathcal{L} , de manera que \mathcal{T} es una transversal completa y \mathcal{R} es la relación de equivalencia inducida por \mathcal{L} . Además cada hoja L es casi-isométrica al grafo $\mathcal{R}_S[T]$ con $T \in L \cap \mathcal{T}$, por lo que tienen el mismo número de finales y el mismo tipo de crecimiento.

Construcción del ejemplo. La idea es obtener una sub-laminación de \mathcal{L} minimal (las hojas son densas) y sin holonomía (las hojas no se enrollan unas sobre otras), a partir de la construcción de un árbol A_∞ repetitivo y aperiódico usando un proceso de injerto descrito por E. Blanc en [12]. Además, dotaremos a la envoltura $\overline{\mathcal{R}[A_\infty]}$ de una medida invariante μ de manera que casi toda órbita sea un árbol con un final y crecimiento exponencial. Recordamos primero la noción de árbol repetitivo:

Definición 2.51 Decimos que un árbol $T \in \mathcal{T}$ es *repetitivo* si para todo número real $r > 0$, existe un entero $R > 0$ tal que la bola $B_T(g, R)$ contiene una copia fiel de $B_T(1, r)$ para todo $g \in \mathbb{F}^3$, es decir:

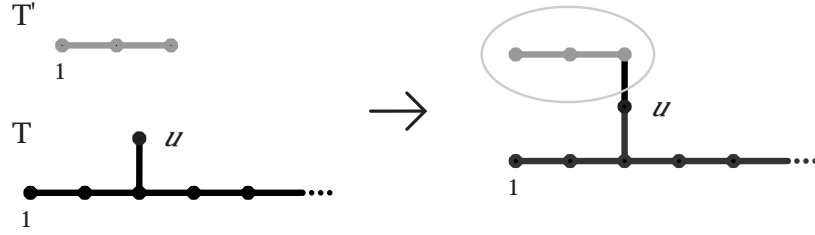
$$\exists g' \in \mathbb{F}^3 : g'.B_T(1, r) = B_T(g', r) \subset B_T(g, R).$$

Proposición 2.52 *La adherencia de la clase de un árbol repetitivo $\overline{\mathcal{R}[T]}$ es un conjunto saturado respecto de \mathcal{R} (i.e. unión de órbitas) y minimal (no contiene conjuntos saturados cerrados propios).*

La prueba puede verse en [2].

Corolario 2.53 *La adherencia de la clase de un árbol repetitivo y aperiódico $\overline{\mathcal{R}[T]}$ es transversal completa de una sub-laminación de la laminación de Gromov-Hausdorff, minimal y sin holonomía.*

Antes de comenzar con la construcción de A_∞ , describimos cómo se injerta un árbol finito sobre un vértice de un subárbol $T \in \mathcal{T}$. Sea $T' \subset \mathcal{G}_3$ un árbol finito que contiene un segmento horizontal uniendo 1 con a^q para algún $q \in \mathbb{Z}$. Podemos injertar T' sobre un vértice cualquiera $u \in T$. Basta añadir una arista vertical sobre u y pegar la traslación de T' por uca^{-q} .



Injerto de T' sobre $u \in T$.

Consideramos ahora el grafo de Cayley $\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{G}_3$ del grupo libre generado por los generadores a y b . Para cada $u \in T$, existe un único vértice $v \in T \cap \mathcal{G}_2$ y un camino \overline{uv} que minimiza la distancia de u a \mathcal{G}_2 . Llamamos *rama vertical sobre $v \in T \cap \mathcal{G}_2$* a la unión de los caminos \overline{uv} . El *saturado vertical* de un subárbol T'' de T es la unión de T'' con las ramas verticales de T que lo cortan. Veamos ahora cómo construimos el árbol repetitivo y aperiódico A_∞ por inducción.

Sea $A_0 = \mathcal{G}_2$ y $r_0 = 1$. Construimos el árbol $A_1 \supset A_0$ injertando la bola $T_0 = B_{A_0}(1, r_0)$ sobre los vértices $v \in A_0$ tales que $d_{A_0}(1, v) \equiv \frac{r_1}{2} \pmod{r_1}$ con $r_1 = 4r_0$. Por inducción, si suponemos que tenemos el árbol A_p , construimos el árbol $A_{p+1} \supset A_p$ de la siguiente manera: llamamos ahora T_p a la saturación vertical de la bola $B_{A_p}(1, r_p)$ y obtenemos A_{p+1} injertando T_p sobre los vértices $v \in A_p$ tales que $d_{A_p}(1, v) \equiv \frac{r_{p+1}}{2} \pmod{r_{p+1}}$ donde r_{p+1} es un múltiplo de $2r_p$ tal que

$$(2.4.4) \quad 2^{p+2} \#T_p \leq 3^{\frac{r_{p+1}}{2}}.$$

Para cada entero $p \in \mathbb{N}$, la condición (2.4.4) impuesta a r_p nos asegura que

$$\#(T_p \cap \mathcal{G}_2) \geq \#(T_p - (T_p \cap \mathcal{G}_2)).$$

En efecto, para cada $q = 0, \dots, p-1$, el número de copias de T_q injertadas en T_p es igual a la suma de los cardinales de las esferas de radios $\frac{r_{q+1}}{2}, \frac{r_{q+1}}{2} + r_{q+1}, \dots, r_p - \frac{r_{q+1}}{2}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \#(T_p - (T_p \cap \mathcal{G}_2)) &\leq 4 \sum_{q=0}^{p-1} 3^{\frac{r_{q+1}}{2}-1} \frac{3^{r_p} - 1}{3^{r_{q+1}} - 1} \#T_q \\ &\leq 4 \sum_{q=0}^{p-1} 3^{\frac{r_{q+1}}{2}-1} \frac{2 \cdot 3^{r_p}}{3^{r_{q+1}}} \#T_q \\ &= 4 \cdot 3^{r_p-1} \sum_{q=0}^{p-1} 2 \frac{\#T_q}{3^{\frac{r_{q+1}}{2}}} \\ &\leq 4 \cdot 3^{r_p-1} \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2^{q+1}} \leq 4 \cdot 3^{r_p-1} \leq \#(T_p \cap \mathcal{G}_2). \end{aligned}$$

Definimos finalmente el árbol anunciado

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 0} A_p.$$

Proposición 2.54 *El árbol A_∞ de \mathcal{T} es repetitivo y aperiódico.*

Demostración. Veamos primero que se trata de un árbol repetitivo. En efecto, para cada $r > 0$ existe un entero $R = \min_{p \in \mathbb{N}} \{r_{p+1} : r < r_p\}$ de manera que toda bola $B_{A_\infty}(g, R)$ contiene una copia fiel de T_p y por tanto contiene a la bola $B_{A_\infty}(1, r)$ para cualquier $g \in A_\infty$. Por otra parte, es obvio que A_∞ es aperiódico puesto que no hay ningún vértice en A_∞ que tenga la misma estructura que su origen. \square

Como ya vimos anteriormente, por ser A_∞ repetitivo y aperiódico, la adherencia de su clase de equivalencia $X = \overline{\mathcal{R}(A_\infty)}$ es un subconjunto minimal de \mathcal{T} realizable como transversal completa de una laminación por superficies de Riemann, minimal y sin holonomía que denotaremos por \mathcal{L}_∞ .

Crecimiento y número de ramificación. En este apartado construimos una medida invariante transversa sobre X respecto de la cual casi toda órbita tiene crecimiento exponencial y un único final.

Para cada $p \geq 0$, llamamos D_p a alguno de los injertos isomorfo a T_p . Nótese que $\#\partial D_p = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Luego $\{D_p\}$ es una sucesión de Følner ya que

$$\#\partial D_p / \#D_p \leq 1/4 \cdot 3^{p-1}.$$

Por tanto, existe una sucesión de medidas de probabilidad $\{\nu_p\}$ definidas sobre X como

$$\nu_p = \frac{1}{\#D_p} \sum_{v \in D_p} \delta_v$$

donde δ_v es la medida de Dirac. Substituyendo $\{\nu_p\}$ por una subsucesión podemos suponer que las medidas ν_p convergen a una medida de probabilidad ν invariante respecto de \mathcal{R} , (véase [61]).

Lema 2.55 ([12]) *Existe una medida \mathcal{R} -invariante μ sobre X tal que μ -casi toda órbita $\mathcal{R}_S[T]$ tiene crecimiento exponencial.*

Demostración. Para la prueba usamos una idea de E. Blanc descrita en [12]. Probaremos que los conjuntos

$$E_k = \{T \in X \mid \#B_T(1, 2m) \geq 3^m, \forall m \leq k\}$$

y su intersección

$$E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{ T \in X \mid \#B_T(1, 2m) \geq 3^m, \forall m \in \mathbb{N} \}$$

verifican $\nu(E_k) \geq \nu(E) \geq \frac{1}{2}$, de manera que el conjunto de órbitas con crecimiento exponencial será de medida positiva respecto de ν . Para concluir, bastará con definir la medida

$$d\mu(T) = \frac{\chi_E(T)}{\nu(E)} d\nu(T)$$

donde χ_E es la función característica de E . Respecto de la medida μ , casi toda órbita tendrá crecimiento exponencial y quedará probado el resultado.

Veamos por tanto que $\nu(E_k) \geq \nu(E) \geq \frac{1}{2}$. Puesto que $\{E_k\}$ es una sucesión contractiva de conjuntos abierto-cerrados de X , si probamos que se verifica:

$$\nu_p(E_k) = \frac{\#(D_p \cap E_k)}{\#D_p} \geq \frac{1}{2}$$

para $p \geq 0$ suficientemente grande, entonces tenemos que

$$\nu(E_k) = \lim_{p \rightarrow \infty} \nu_p(E_k) \geq \frac{1}{2}$$

y en consecuencia $\nu(E) \geq \frac{1}{2}$. Fijado un entero k , consideramos dos enteros p y m tales que $r_p > 2k > 2m$. Sea v un vértice de $T_p \cap \mathcal{G}_2 = B_{\mathcal{G}_2}(1, r_p)$. Si $d_{\mathcal{G}_2}(1, v) \leq m$, entonces

$$B_{\mathcal{G}_2}(v, m) = B_{T_p \cap \mathcal{G}_2}(v, m) \subset B_{T_p}(v, 2m).$$

Si $d_{\mathcal{G}_2}(1, v) > m$, el segmento geodésico que une 1 y v contiene un vértice v' tal que $d_{\mathcal{G}_2}(v', v) = m$ y que por tanto verifica:

$$B_{\mathcal{G}_2}(v', m) = B_{T_p \cap \mathcal{G}_2}(v', m) \subset B_{T_p}(v, 2m).$$

En ambos casos, se tiene que $\#B_{T_p}(v, 2m) \geq 3^m$. Luego todos los vértices de la traza $T_p \cap \mathcal{G}_2$ (vistos como elementos de \mathcal{T}) pertenecen a E_k y por tanto

$$\nu(E_k) = \frac{\#(D_p \cap E_k)}{\#D_p} \geq \frac{\#(T_p \cap \mathcal{G}_2)}{\#T_p} \geq \frac{1}{2}$$

con lo que queda probado el resultado. \square

Lema 2.56 ([12]) *Para μ -casi todo $T \in X$, la órbita $\mathcal{R}_S[T]$ tiene exactamente un final.*

Demostración. Recordemos que la característica de Euler χ de un grafo se define como la diferencia entre el número de vértices y el de aristas. Luego $\chi(D_p) = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Por tanto, la característica de Euler media (definida en [17]) verifica

$$\chi(\mu) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\chi(D_p)}{\#D_p} = 0.$$

Esto implica que μ -casi toda órbita posee 1 o 2 finales ([17]). Por la proposición 3 de [50], sabemos que μ -casi toda órbita con 2 finales tiene crecimiento lineal. Luego concluimos por el lema anterior que μ -casi toda órbita tiene exactamente 1 final. \square

Finalmente, puesto que las órbitas son árboles con un final, el número de ramificación de μ -casi toda órbita es 1, y en consecuencia $br(\mathcal{R}, S, \mu) = 1$. Deducimos que (X, \mathcal{R}, μ) es promediable y posee la propiedad de Liouville por los teoremas 2.40 y 2.46. Concluimos así la construcción del ejemplo.

Teorema 2.57 *Existe un árbol aperiódico y repetitivo $A_\infty \in \mathcal{T}$ y una medida invariante μ sobre la envoltura $X = \overline{\mathcal{R}[A_\infty]}$, tales que*

1. μ -casi toda órbita tiene número de ramificación 1,
2. μ -casi toda órbita tiene crecimiento exponencial.

Además (X, \mathcal{R}) es promediable y posee la propiedad de Liouville respecto de μ .

Recordemos que X es la transversal completa de una laminación por superficies de Riemann que denotamos \mathcal{L}_∞ . Luego podemos expresar el teorema anterior en lenguaje de laminaciones de la siguiente manera:

Teorema 2.58 *Existe una laminación por superficies de Riemann \mathcal{L}_∞ minimal y sin holonomía, y una medida transversa invariante μ tales que:*

1. μ -casi toda hoja tiene un final,
2. μ -casi toda hoja tiene crecimiento exponencial.

Además su pseudogrupo de holonomía Γ_∞ tiene número de ramificación igual a 1 y la laminación \mathcal{L}_∞ es promediable respecto de μ .

2.4.3. Proceso de Galton-Watson

El *proceso de Galton-Watson* es un proceso estocástico que modela el desarrollo de una población de individuos que se replican de manera que la probabilidad de tener k descendientes es p_k con $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Decimos que el proceso de Galton-Watson es *supercrítico* si el número medio de descendientes $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k > 1$.

Consideramos entonces un proceso de Galton-Watson supercrítico. Podemos suponer que $p_0 = 0$, o bien restringirnos al suceso de *no extinción*. Si partimos de un progenitor, el proceso de Galton-Watson construye un árbol genealógico infinito aleatorio llamado *árbol de Galton-Watson*. Una vez más podemos reescribir dicho proceso en términos de relaciones de equivalencia medibles discretas grafadas, cuyas clases son isomorfos a los árboles de Galton-Watson. Veamos a continuación cómo traducimos el proceso de Galton-Watson al lenguaje de las relaciones.

Consideramos el espacio \mathcal{T} formado por todos los árboles localmente finitos enraizados. Dotamos a \mathcal{T} de la topología límite inverso de los espacios de árboles de diámetro finito. Llamamos \mathcal{R} a la relación de equivalencia sobre \mathcal{T} que identifica dos árboles $T, T' \in \mathcal{T}$ si son isomorfos como árboles no enraizados. Nótese que para todo $T \in \mathcal{T}$, la clase $\mathcal{R}[T]$ está formada por los árboles isomorfos a T con origen en los distintos vértices de T . Luego $\mathcal{R}[T]$ es isomorfa al cociente de los vértices de T por su grupo de automorfismos. En el caso de un árbol *rígido* T (es decir, tal que su espacio de automorfismos es trivial), la clase $\mathcal{R}[T]$ es isomorfa al conjunto de vértices de T .

Nos interesa restringirnos al subespacio $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ de los árboles rígidos infinitos. Ahora las clases $\mathcal{R}[T]$ son infinitas y podemos definir sobre ellas una estructura de grafo donde dos árboles rígidos están unidos por una arista si son isomorfos y sus respectivos orígenes son vértices vecinos. Nótese que con esta estructura cada clase $\mathcal{R}[T]$ es isomorfa al árbol T . Llamamos *valencia* del árbol T $val(T)$ a la valencia del origen de T .

Dotamos a \mathcal{T}_0 de una medida de probabilidad natural P , llamada *medida de Galton-Watson*, construida a partir de la distribución $\{p_k\}$. Sea X la variable aleatoria tal que $P[X = k] = p_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si Z_n es la población en el instante n entonces $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$ donde X_i^n son variables aleatorias independientes con la misma distribución que X . Por lo tanto,

$$P[X_{i_1}^{n_1} = k_1, \dots, X_{i_m}^{n_m} = k_m] = p_{k_1} \cdots p_{k_m}.$$

para $n_1 < \dots < n_m$. Tenemos pues un núcleo de transición simple sobre \mathcal{T}_0 definido por $\pi(T, T') = 1/val(T)$ si T y T' son vecinos y $\pi(T, T') = 0$ en otro caso. Podemos modificar la medida P para obtener la *medida de Galton-Watson aumentada* \tilde{P} , que

se define como P excepto para el primer progenitor donde $\tilde{P}(Z_0 = k + 1) = p_k$. Por el teorema 3.1 de [53], la medida \tilde{P} es reversible y estacionaria respecto de π y por consiguiente la medida $d\mu(T) = \frac{1}{\text{val}(T)} d\tilde{P}(T)$ es invariante para \mathcal{R} . Por la proposición 6.4 de [52], el número de ramificación $br(\mathcal{R}, \mu) = m > 1$.

Capítulo 3

Percolación de Bernoulli

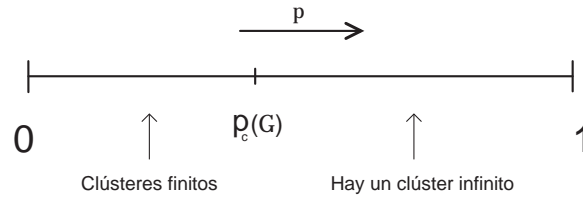
En este capítulo, empezamos recordando la definición de percolación de Bernoulli sobre un grafo, prestando especial atención al caso de los grafos de Cayley. Recordamos además cómo se puede reformular la teoría clásica de la percolación en el lenguaje de las relaciones de equivalencia medibles según D. Gaboriau. De nuevo, nuestro objetivo principal en este capítulo es extender el proceso de percolación de Bernoulli al contexto de los pseudogrupos grafados, interesándonos especialmente en aquellos cuyas órbitas poseen más de un final.

Completamos el capítulo con la descripción de un nuevo proceso de percolación, que denominamos *percolación relativa*, restringido a acciones de grupos. El tema se encuentra aún en vías de desarrollo. Presentamos algunos resultados obtenidos en este contexto y planteamos algunas preguntas que de momento permanecen abiertas.

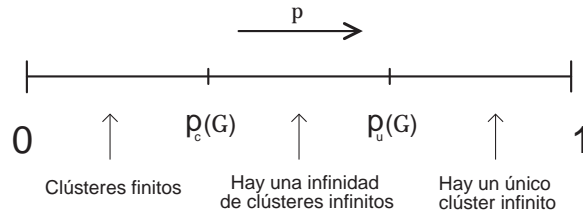
3.1. Percolación de Bernoulli clásica

La teoría de la percolación surge en los años 50 con objeto de modelar procesos físicos aleatorios como el contagio de una enfermedad en una población, la propagación de un incendio en un bosque o la filtración de un fluido en un medio poroso. Para recordar de manera intuitiva el propósito de esta teoría, nos situamos en este último contexto, es decir, suponemos que vertemos un líquido sobre una gran roca porosa. La pregunta natural es si el líquido fluirá a través de los poros hasta el centro de la roca, o si por el contrario, ésta permanecerá humedecida de manera superficial. Curiosamente, la teoría de la percolación prueba que la probabilidad de que el agua llegue hasta el centro no aumenta gradualmente a medida que variamos la porosidad, si no que pasa de ser nula a ser total a partir de un nivel crítico de porosidad.

En términos matemáticos, la percolación se basa en el estudio de la estructura y naturaleza de las componentes conexas (*clústeres*) de subgrafos aleatorios de un grafo infinito ([34],[54, 52]). En particular, la percolación de Bernoulli de un grafo infinito es un proceso aleatorio que asigna a cada arista una probabilidad de permanencia p y una probabilidad de desaparición $1 - p$. El objetivo principal es estudiar la existencia de caminos de aristas infinitos, es decir, la probabilidad de que el subgrafo aleatorio resultante contenga un clúster infinito. Como es de esperar, dicha probabilidad es monótona creciente respecto del parámetro $p \in [0, 1]$. Además, por la ley 0-1 de Kolmogorov, para cada valor de p , dicha probabilidad sólo puede tomar los valores 0 ó 1. Por tanto, hay un valor crítico p_c que actúa como transición de fase: para todo $p < p_c$ los clústeres obtenidos son finitos (con probabilidad 1), mientras que para todo $p > p_c$ hay al menos un clúster infinito (con probabilidad 1).



Veremos que en algunos casos, como los grafos transitivos, se puede definir otro valor crítico p_u que delimita la fase de unicidad, es decir, para todo $p > p_u$ existe un único cluster infinito (con probabilidad 1).



3.1.1. Definición de percolación de Bernoulli y propiedades

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito, numerable y localmente finito. El proceso de *percolación de Bernoulli* con parámetro de permanencia $p \in [0, 1]$ consiste en mantener cada arista de E con probabilidad p o eliminarla con probabilidad $1 - p$, de manera independiente una de otra.

Definición 3.1 ([34],[54]) El *proceso de percolación de Bernoulli* (de aristas) de parámetro $p \in [0, 1]$ en un grafo infinito $\mathcal{G} = (V, E)$ está dado por el *espacio de coloreados* $\Omega = \{0, 1\}^E$ sobre el conjunto de aristas E , dotado de la σ -álgebra generada por los cilindros

$$C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \{ \omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i, i \in \{0, \dots, n\} \}$$

con $e_i \in E, \alpha_i \in \{0, 1\}$ y de la medida P_p obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre las aristas con pesos p y $1 - p$ sobre 1 y 0, dada por

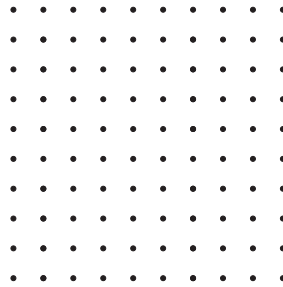
$$P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m (1 - p)^{1-m}$$

donde $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$.

Dado un coloreado $\omega \in \Omega$, diremos que una arista $e \in E$ está *abierta* si $\omega(e) = 1$ y *cerrada* si $\omega(e) = 0$. Cada coloreado $\omega \in \Omega$ define un subgrafo \mathcal{G}_ω de \mathcal{G} cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de ω , es decir, las aristas $e \in E$ tales que $\omega(e) = 1$. En general el grafo \mathcal{G}_ω es no conexo y llamamos *clúster* a cada una de sus componentes conexas. Para cada $v \in V$, denotamos $C_\omega(v)$ al clúster de \mathcal{G}_ω que contiene al vértice v .

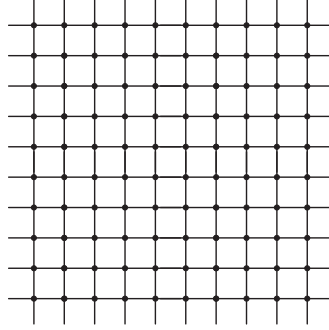
Observación 3.2 Se define de modo análogo el *proceso de percolación de Bernoulli de vértices* con parámetro $p \in [0, 1]$. Basta considerar el espacio de coloreados sobre los vértices $\Omega = \{0, 1\}^V$.

Ejemplo 3.3 Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito conexo. Si hacemos percolación de Bernoulli de parámetro $p = 0$, la medida de probabilidad P_0 se concentra en un único coloreado ω tal que $\omega(e) = 0$ para todo $e \in E$. Es decir, \mathcal{G}_ω es (con probabilidad 1) el subgrafo de \mathcal{G} formado únicamente por los vértices. Los clústeres se reducen a los vértices, esto es, $C_\omega(v) = \{v\}$ para todo $v \in V$.



Percolación de Bernoulli del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 con parámetro $p = 0$.

Cuando tomamos el parámetro $p = 1$, hay un único coloreado con probabilidad total dado por $\omega(e) = 1$ para todo $e \in E$. En este caso, \mathcal{G}_ω coincide con \mathcal{G} (con probabilidad 1) y el único clúster es \mathcal{G} .



Percolación de Bernoulli del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 con parámetro $p = 1$.

La teoría de la percolación estudia básicamente la naturaleza y propiedades del subgrafo aleatorio \mathcal{G}_ω y de sus componentes conexas, prestando especial interés a la existencia de clústeres infinitos. Una cuestión interesante para comenzar el estudio de los clústeres es conocer de qué modo varía el proceso de percolación de Bernoulli cuando hacemos variar el parámetro p a lo largo del intervalo $[0, 1]$. Para ello, hacemos uso del proceso de "standard coupling", cuyo interés reside en la capacidad de englobar todos los procesos de percolación de Bernoulli en un único proceso.

Proceso de Standard Coupling y variación del parámetro p . Sustituyamos el espacio de coloreados $\Omega = \{0, 1\}^E$ por el espacio $X = [0, 1]^E$ dotado de la medida producto μ de la medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$. Cada elemento de X determina un grafo coloreado donde los colores blanco y negro se sustituyen por toda la gama de grises.

Para cada $p \in [0, 1]$, definimos la aplicación $\eta_p : [0, 1]^E \rightarrow \{0, 1\}^E$ como

$$\eta_p(x)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(e) \leq p \\ 0 & \text{si } x(e) > p \end{cases}$$

que verifica $(\eta_p)_* \mu = P_p$. Obviamente, si $p_1 \leq p_2$, entonces

$$\eta_{p_1}(x) \leq \eta_{p_2}(x).$$

Este proceso es conocido como *standard coupling* y nos permite comparar procesos de percolación de Bernoulli de parámetros diferentes. En efecto, cuando $p_1 \leq p_2$ el conjunto de aristas abiertas del primer proceso está contenido en el conjunto de aristas abiertas del segundo.

Tolerancia a la inserción y al borrado. La percolación de Bernoulli es un ejemplo de percolación tolerante a la inserción y al borrado de aristas. Es decir, si abrimos (o

cerramos) una arista en un conjunto de coloreados con medida positiva, el conjunto que resulta sigue siendo de medida positiva.

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito y sea (Ω, P_p) el proceso de percolación de Bernoulli sobre \mathcal{G} de parámetro $p \in [0, 1]$.

Definición 3.4 Se define la *aplicación de inserción* de una arista $e' \in E$ como la aplicación $i_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$ definida como

$$i_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e' \end{cases}$$

De modo análogo se define la *aplicación de borrado* de una arista $e' \in E$ como la aplicación $d_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$ definida como

$$d_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e'. \end{cases}$$

Definición 3.5 Se dice que la medida P_p es *tolerante a la inserción* si para cada arista $e \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ tal que $P_p(B) > 0$ se tiene

$$P_p(i_e(B)) > 0.$$

De igual manera, se dice que P_p es *tolerante al borrado* si para cada arista $e \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ tal que $P_p(B) > 0$ se tiene

$$P_p(d_e(B)) > 0.$$

Nótese que la medida de probabilidad P_0 no es tolerante a la inserción para $p = 0$. Del mismo modo, la medida P_1 no es tolerante al borrado para $p = 1$. No obstante, para el resto de valores sí se dan ambas propiedades:

Proposición 3.6 Para cada $p \in (0, 1)$, la medida de probabilidad P_p es tolerante a la inserción y al borrado.

Demostración. Sea $e \in E$ la arista que queremos insertar. Nótese que para los distintos tipos de cilindros se tiene:

$$P_p(i_e(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})) = \begin{cases} P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 1 \text{ para algún } i \in \{0, \dots, n\} \\ pP_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i \neq e \text{ para todo } i \in \{0, \dots, n\} \\ \frac{p}{1-p}P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 0 \text{ para algún } i \in \{0, \dots, n\}. \end{cases}$$

Luego, para cualquier boreliano $B \subset \Omega$ se tiene

$$P_p(i_e(B)) > mP_p(B) > 0$$

donde $m = \min\{1, p, \frac{p}{1-p}\}$. La demostración de la tolerancia al borrado es análoga. \square

Del mismo modo se puede probar que P_p es tolerante a la inserción y borrado de un conjunto finito de aristas suponiendo que $p \in (0, 1)$.

3.1.2. Percolación crítica.

En este apartado nos interesa estudiar la probabilidad de que exista al menos una componente infinita en el subgrafo aleatorio obtenido tras la percolación. Con ese fin, estudiamos primero la probabilidad de que el clúster de un vértice fijado sea infinito.

Definición 3.7 Dado un vértice $v \in \mathcal{G}$, consideramos la función $\theta_v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que v pertenezca a un clúster infinito, es decir,

$$\theta_v(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito}].$$

En algunas ocasiones escribiremos $\theta_v(p)$ como $P_p[v \leftrightarrow \infty]$. Usando el proceso de standard coupling, se comprueba que la función θ_v es monótona creciente con respecto a p . Por otra parte, obsérvese que, para todo par de vértices $v, v' \in V$, se verifica

$$\theta_v(p) = 0 \iff \theta_{v'}(p) = 0.$$

En efecto, si $\theta_v(p) > 0$, insertamos un camino de aristas finito $\{e_0, \dots, e_n\}$ que una v con v' de manera que

$$\theta_{v'}(p) \geq P_p[i_{\{e_0, \dots, e_n\}}(\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito})] > 0.$$

Estudiamos ahora la probabilidad de exista al menos un clúster infinito:

Definición 3.8 Sea $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que exista un clúster infinito, es decir:

$$\theta(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ infinito}].$$

Nótese que, para cada vértice $v \in V$, se verifica

$$\theta_v(p) \leq \theta(p) \leq \sum_{v \in V} \theta_v(p).$$

Luego la monotonía de la función θ con respecto al parámetro p se deduce de la monotonía de θ_v . Por otra parte, puesto que el evento considerado es independiente de cualquier conjunto finito de aristas que prefijemos, aplicando la ley 0-1 de Kolmogorov se tiene que $\theta(p)$ es igual a 0 ó 1. Por tanto, para cualquier $v \in V$,

$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_v(p) = 0 \\ 1 & \text{si } \theta_v(p) > 0 \end{cases}$$

De las propiedades anteriores se deduce la existencia de un valor crítico, que denotamos $p_c(\mathcal{G})$, a partir del cual la probabilidad de que exista un clúster infinito pasa de ser nula a ser total:

Definición 3.9 Se define la *percolación crítica* del grafo \mathcal{G} como

$$p_c(\mathcal{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 1\}$$

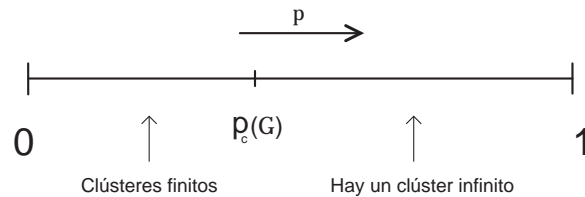
En algunos casos, nos resultará cómodo escribir $p_c(\mathcal{G})$ en función de un vértice v usando alguna de las siguientes expresiones equivalentes

$$p_c(\mathcal{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta_v(p) = 0\} = \sup\{p \in [0, 1] \mid P_p[v \leftrightarrow \infty] = 0\}$$

ó

$$p_c(\mathcal{G}) = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta_v(p) > 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[v \leftrightarrow \infty] > 0\}.$$

En resumen, la percolación crítica divide el intervalo $[0, 1]$ en dos fases. En la *fase subcrítica* con $p < p_c(\mathcal{G})$ todos los clústeres son finitos (con probabilidad 1), mientras que en la *fase supercrítica* con $p > p_c(\mathcal{G})$ existe al menos un clúster infinito (con probabilidad 1). No obstante, en la transición de fase $p = p_c(\mathcal{G})$ puede darse cualquiera de los dos casos anteriores. El tema 9 del libro de G. Grimmett [34] estudia la transición de fase de los grafos de Cayley de \mathbb{Z}^d con $d \in \mathbb{N}$.



Proposición 3.10 Sea \mathcal{G}' un subgrafo de \mathcal{G} , entonces $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$.

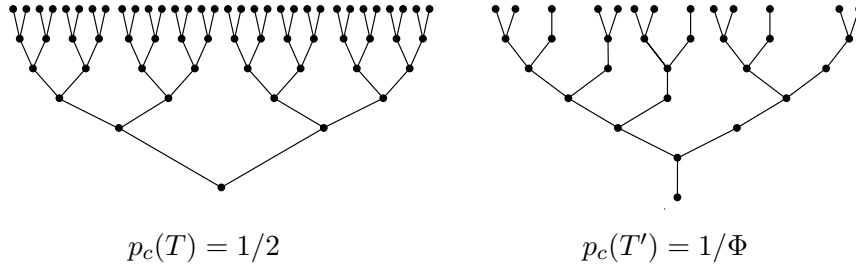
Demostración. Para cada $p > p_c(\mathcal{G}')$, hay al menos un clúster infinito en \mathcal{G}' con P_p -probabilidad 1 y en consecuencia, \mathcal{G} también posee al menos un clúster infinito. De manera que $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$. \square

Ejemplos 3.11 En general el cálculo del valor crítico p_c no es sencillo y en la mayoría de los grafos se desconoce su valor exacto. Presentamos a continuación algunos ejemplos ilustrativos:

1. La percolación crítica del grafo de Cayley de \mathbb{Z} es $p_c(\mathcal{Z}) = 1$. En efecto, para todo $p < 1$, existe una infinidad de aristas cerradas a la izquierda y a la derecha del origen con casi total seguridad, luego todos los clústeres son finitos.
2. La percolación crítica del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 es $p_c(\mathcal{Z}^2) = \frac{1}{2}$ (véase [34]). Además, en la fase subcrítica ($p < \frac{1}{2}$) todos los clústeres son finitos con total seguridad, mientras que en la fase supercrítica ($p > \frac{1}{2}$) existe un único clúster infinito con total seguridad.
3. No se conoce el valor exacto de la percolación crítica del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^d para $d > 2$. No obstante, por la proposición 3.10, sabemos que $0 < p_c(\mathcal{Z}^d) < 1$ y $p_c(\mathcal{Z}^{d+1}) \leq p_c(\mathcal{Z}^d)$.
4. Si el grafo considerado es un árbol T , entonces $p_c(T) = \frac{1}{br(T)}$ donde $br(T)$ es el número de ramificación del árbol (véase la definición 2.2). Además, en la fase supercrítica $p > p_c(T)$, hay una cantidad infinita de clústeres infinitos. La demostración puede verse en [60]. En la sección §3.3.3, se dará una demostración similar en un contexto más general.

Percolación crítica y casi-isometría. En general, la percolación crítica no es invariante por casi-isometría, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.12 El árbol binario T y el árbol de Fibonacci T' (descritos en el ejemplo 1.7) son casi-isométricos, pero sus respectivas percolaciones críticas son los inversos de sus números de ramificación y por tanto diferentes entre sí:



No obstante, en el caso de dos árboles casi-isométricos T_1 y T_2 , sabemos que

$$p_c(T_1) < 1 \iff p_c(T_2) < 1.$$

Basta utilizar el corolario 2.18 que garantiza que $br(T_1) > 1$ si y sólo si $br(T_2) > 1$. En el caso de grafos de Cayley, se obtiene un resultado análogo, cuya prueba puede verse en [54]. La misma demostración resulta válida para grafos casi-isométricos de geometría acotada:

Teorema 3.13 Sean \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 dos grafos de geometría acotada. Si \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son casi-isométricos entonces:

$$p_c(\mathcal{G}_1) = 1 \iff p_c(\mathcal{G}_2) = 1.$$

□

3.1.3. Percolación de Bernoulli en grafos de Cayley

En esta sección recordamos algunos resultados clásicos de la percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley. Todos ellos son extensibles al caso de grafos transitivos añadiendo alguna condición, como puede verse en [54]. La homogeneidad que caracteriza a los grafos de Cayley permite obtener mayor información acerca de los clústeres del proceso de percolación. Una de las propiedades que juega un papel importante para su estudio es la invarianza y la ergodicidad de la medida P_p respecto de la acción natural por traslaciones del grupo sobre el espacio de coloreados.

Sea G un grupo finitamente generado, S un sistema finito de generadores y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ el grafo de Cayley correspondiente. Consideramos el proceso de percolación de Bernoulli (Ω, P_p) sobre las aristas de \mathcal{G} . La acción del grupo G por traslaciones sobre el grafo \mathcal{G} se extiende de manera natural a una acción de G sobre el espacio de coloreados Ω dada por

$$g\omega(e) = \omega(g^{-1}(e)).$$

Proposición 3.14 *Para todo $p \in [0, 1]$, la medida de probabilidad P_p sobre Ω es invariante respecto de la acción de G , es decir,*

$$P_p(gA) = P_p(A)$$

para todo $g \in G$ y para todo boreliano $A \subset \Omega$.

Demostración. Basta probar que P_p es invariante sobre los cilindros de Ω . Sea $g \in G$, se tiene

$$P_p(gC_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = P_p(C_{g^{-1}e_0, \dots, g^{-1}e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m(1-p)^{1-m} = P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$$

para $e_0, \dots, e_n \in E$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ y $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. \square

Proposición 3.15 *Para todo $p \in [0, 1]$, la medida de probabilidad P_p sobre Ω es ergódica respecto de la acción del grupo G .*

Demostración. Para probar la ergodicidad, veremos que todo boreliano saturado $A \subset \Omega$ verifica $P_p(A) = P_p(A)^2$ y en consecuencia $P_p(A) \in \{0, 1\}$.

En primer lugar, si consideramos subconjuntos borelianos arbitrarios B_1, B_2 y D de Ω , entonces

$$|P_p(B_1 \cap D) - P_p(B_2 \cap D)| \leq P_p[(B_1 \cap D) \Delta (B_2 \cap D)] \leq P_p(B_1 \Delta B_2).$$

donde $B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) - (B_1 \cap B_2)$. Por otra parte, si A es un boreliano saturado en Ω , para cada $\varepsilon > 0$ existe un cilindro C verificando que

$$P_p(A \Delta C) < \varepsilon$$

y un elemento $g \in G$ tal que C y gC son sucesos independientes. Luego

$$\begin{aligned} |P_p(A) - P_p(A)^2| &= |P_p(A \cap gA) - P_p(A)^2| \\ &\leq |P_p(A \cap gA) - P_p(C \cap gA)| + |P_p(C \cap gA) - P_p(C \cap gC)| \\ &\quad + |P_p(C \cap gC) - P_p(C)^2| + |P_p(C)^2 - P_p(A)^2| \\ &\leq P_p(A \Delta C) + P_p(gA \Delta gC) + |P_p(C)P_p(gC) - P_p(C)^2| \\ &\quad + |P_p(C) - P_p(A)|(P_p(C) + P_p(A)) \\ &< 4\varepsilon \end{aligned}$$

\square

3.1.4. Clústeres infinitos y fase de unicidad.

Cuando hacemos percolación de Bernoulli sobre un grafo de Cayley sólo puede darse una de las siguientes posibilidades: o bien todas las componentes conexas son finitas, o bien existe una única componente infinita, o bien existe una infinidad de componentes infinitas. Esta propiedad se debe a la ergodicidad de la medida de probabilidad P_p respecto de la acción del grupo sobre el espacio de coloreados.

Sea G un grupo finitamente generado, S un sistema finito de generadores y \mathcal{G} el correspondiente grafo de Cayley. Para cada $p \in [0, 1]$ consideramos el proceso de percolación de Bernoulli (Ω, P_p) . Definimos la aplicación $N_p : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ que asigna a cada coloreado ω el número de clústeres infinitos $N_p(\omega)$. El siguiente teorema prueba que para cada $p \in [0, 1]$, el número de clústeres infinitos es constante e igual a 0, 1 ó ∞ , con casi total seguridad.

Teorema 3.16 ([56]) *Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ un grafo de Cayley. Para cada $p \in [0, 1]$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que:*

$$P_p[\omega \in \Omega \mid N_p(\omega) = k] = 1.$$

Además, $k \in \{0, 1, \infty\}$.

Demostración. Es sabido que la aplicación N_p es medible y constante sobre las órbitas de la acción del grupo G sobre el espacio de coloreados (véase [56]). De la ergodicidad de la medida P_p se deduce que N_p es constante en P_p -casi todo coloreado $\omega \in \Omega$. Ahora, basta ver que $N_p \notin [2, \infty)$ por reducción al absurdo. Supongamos entonces que casi todo coloreado tiene exactamente k clústeres infinitos con $k > 2$ y $k \neq \infty$. Puesto que el conjunto de bolas centradas en el origen 1 es numerable, existe una bola suficientemente grande B y un conjunto de coloreados $\Omega_B \subset \Omega$ de medida positiva, tales que B interseca a cada coloreado $\omega \in \Omega_B$ en al menos dos clústeres infinitos. Usando tolerancia a la inserción, el boreliano $i_B(\Omega_B)$ tiene medida positiva. Llegamos entonces a la contradicción deseada. En efecto, el boreliano $i_B(\Omega_B)$ está formado por coloreados con a lo sumo $k - 1$ clústeres infinitos, de manera que N_p no es constante en casi todo coloreado. \square

Fase de unicidad. En este apartado recordamos las tres posibles fases en las que se divide un proceso de percolación de Bernoulli sobre un grafo de Cayley cuando hacemos variar el parámetro p a lo largo del intervalo $[0, 1]$. En la primera fase, que llamamos *fase de finitud*, todos los clústeres son finitos casi seguro. La siguiente fase se llama *fase de no unicidad* en la que existe una cantidad infinita de clústeres

infinitos. Finalmente, la última fase se denomina *fase de unicidad* y se obtiene un único clúster infinito con probabilidad uno.

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ el grafo de Cayley asociado a un grupo de tipo finito G dotado de un sistema finito de generadores S . La primera fase de finitud se corresponde con la fase subcrítica $p < p_c(\mathcal{G})$. Veamos que existe un nuevo valor crítico que divide la fase supercrítica en dos nuevas subfases. El siguiente teorema prueba que si existe un único clúster infinito con casi total seguridad para un parámetro p_1 , entonces sucede lo mismo para todo $p_2 > p_1$:

Teorema 3.17 ([42]) *Sea \mathcal{G} un grafo de Cayley y sea $p_c(\mathcal{G}) < p_1 < 1$ tal que*

$$P_{p_1}[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1.$$

Entonces, para cada $p_2 > p_1$:

$$P_{p_2}[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1.$$

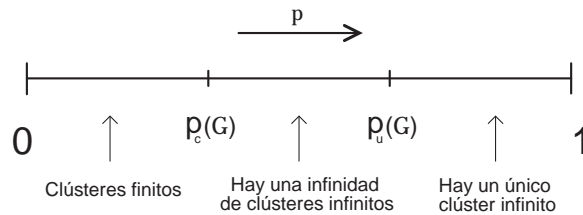
Para probar el teorema, se usa el proceso de standard coupling descrito en la subsección §3.1.1. En particular, se utiliza que si $p_c(\mathcal{G}) < p_1 < p_2$, entonces cada p_2 -clúster infinito contiene un p_1 -clúster infinito casi seguro.

Como consecuencia del teorema anterior, existe un valor crítico $p_u(\mathcal{G}) \in [p_c(\mathcal{G}), 1]$ que limita inferiormente una nueva fase con $p_u(\mathcal{G}) < p$, llamada *fase de unicidad*, en la que existe un único clúster infinito casi seguro:

Definición 3.18 Sea \mathcal{G} un grafo de Cayley y sea Ω el espacio de coloreados sobre las aristas de \mathcal{G} . Se define el valor crítico

$$p_u(\mathcal{G}) = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1\}.$$

Si además $p_c(\mathcal{G}) \neq p_u(\mathcal{G})$, se deduce del teorema 3.16 que hay una fase intermedia con $p_c(\mathcal{G}) < p < p_u(\mathcal{G})$, llamada *fase de no unicidad*, en la que aparece una infinidad de clústeres infinitos casi seguro. En resumen, el proceso de percolación sobre un grafo de Cayley \mathcal{G} se puede dividir en tres fases separadas por los valores críticos $p_c(\mathcal{G})$ y $p_u(\mathcal{G})$ como mostramos en la figura:



La fase de no unicidad puede no existir: los grafos de Cayley de grupos promediables son un ejemplo de ello, como veremos en la subsección §3.1.5. También puede suceder que la fase de unicidad se reduzca a un único punto, es decir, $p_u(\mathcal{G}) = 1$. Es el caso de los grafos de Cayley de grupos libres. En efecto, puesto que se trata de árboles con número de ramificación mayor que 1, la fase de no unicidad abarca todo el intervalo $(p_c(\mathcal{G}), 1)$, como hemos visto en el ejemplo 3.11 (4).

Percolación de Bernoulli en grafos arbitrarios. En general, los resultados mencionados para grafos de Cayley no son extensibles a grafos arbitrarios. Cuando hacemos percolación de Bernoulli en un grafo cualquiera no podemos asegurar la existencia de la fase de unicidad. De hecho, ni siquiera podemos afirmar que para cada parámetro p el número de clústeres sea constante. Presentamos a continuación dos ejemplos:

Ejemplo 3.19 Sea T el árbol de Fibonacci y \mathcal{Z}^2 el grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 . Recordemos que $p_c(T) = 1/\Phi$, $p_u(T) = 1$ y $p_c(\mathcal{Z}^2) = p_u(\mathcal{Z}^2) = 1/2$. Sea \mathcal{G} el grafo que resulta al unir T y \mathcal{Z}^2 con una arista. Nótese que para $1/2 < p < 1/\Phi$, el número de clústeres infinitos es 1, mientras que para $p > 1/\Phi$ hay una cantidad no numerable de clústeres infinitos.

Ejemplo 3.20 Sean \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 dos copias de \mathcal{Z}^2 . Consideramos el grafo \mathcal{G} que resulta de unir \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 por una arista e . Entonces, para todo $p > 1/2$ el número de clústeres infinitos no es constante. En efecto, con probabilidad positiva puede haber un único clúster o 2 clústeres, dependiendo de que la arista e permanezca o desaparezca.

No obstante, hay grafos que poseen cierta homogeneidad lo que permite obtener algunos de los resultados conocidos para grafos de Cayley. Es el caso de los grafos transitivos y casi-transitivos. De hecho, todos los resultados vistos hasta ahora pueden enunciarse en el contexto más general de los grafos transitivos, tal y como puede verse en el libro [54] de R. Lyons y Y. Peres.

3.1.5. Resultados clásicos para grafos de Cayley.

En este apartado presentamos una recopilación de resultados clásicos de la teoría de la percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley. Nos interesaremos principalmente en los relacionados con el crecimiento, el número de finales, la casi-isometría y la promediabilidad.

Proposición 3.21 *Sea \mathcal{G} un grafo de Cayley. Si \mathcal{G} tiene crecimiento exponencial entonces $p_c(\mathcal{G}) < 1$.*

Demostración. Vimos en la prueba de la proposición 2.14 que \mathcal{G} posee un subárbol maximal subperiódico T tal que $br(T) = gr(T) = gr(\mathcal{G})$. Además, puesto que \mathcal{G} tiene crecimiento exponencial, $br(T) > 1$ y $p_c(T) = \frac{1}{br(T)} < 1$ (véanse los ejemplos 3.11). Para finalizar, usando la proposición 3.10, se tiene que $p_c(\mathcal{G}) < p_c(T) < 1$. \square

También podemos recordar de qué modo influye el número de finales de un grafo de Cayley en el proceso de percolación de Bernoulli:

Proposición 3.22 *Sea (G, S) un grupo finitamente generado y \mathcal{G} el grafo de Cayley asociado. Entonces:*

1. Si \mathcal{G} tiene 2 finales, $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G}) = 1$.
2. Si \mathcal{G} tiene un número infinito de finales, $p_u(\mathcal{G}) = 1$.
3. Si G es de presentación finita y \mathcal{G} tiene 1 final, $p_c(\mathcal{G}) < 1$.

La prueba puede verse en [54].

Según el teorema 3.13, la propiedad 'tener percolación crítica menor que 1' es invariante por casi-isometría. Podemos decir algo más acerca de la percolación crítica de grafos de Cayley casi-isométricos:

Proposición 3.23 *Si \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son dos grafos de Cayley casi-isométricos, entonces:*

$$p_c(\mathcal{G}_1) < p_u(\mathcal{G}_1) \iff p_c(\mathcal{G}_2) < p_u(\mathcal{G}_2).$$

El siguiente teorema de R.M. Burton y M. Keane nos dice que el proceso de percolación de Bernoulli sobre el grafo de Cayley de un grupo promediable no posee fase de no unicidad, es decir, o los clústeres son finitos o existe un único clúster infinito:

Teorema 3.24 ([15]) *Sea (G, S) un grupo finitamente generado y sea \mathcal{G} su grafo de Cayley asociado. Si G es promediable, entonces $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G})$.*

El teorema original de [15] es enunciado para \mathbb{Z}^d . La prueba del caso general puede verse en [54].

Por último recordamos algunas propiedades de los clústeres infinitos en un grafo de Cayley.

Proposición 3.25 ([55]) *Los clústeres que poseen más de 3 finales no poseen finales aislados casi seguro.*

Proposición 3.26 ([55]) *En la fase de no unicidad, los clústeres infinitos tienen una infinidad de finales casi seguro.*

Proposición 3.27 ([55]) *En la fase de no unicidad, los clústeres infinitos son transitorios casi seguro.*

Los resultados anteriores forman parte de la prueba del *teorema de indistinguibilidad* de [55], que adaptaremos más adelante al contexto de pseudogrupos (véase el teorema 3.35).

3.2. Construcciones a la Gaboriau

En esta sección, recordamos la reformulación del proceso de percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley propuesta por D. Gaboriau en [27] usando el lenguaje de las relaciones de equivalencia medibles. Esto nos permitirá recuperar algunos de los resultados clásicos presentados en la sección anterior usando técnicas propias de foliaciones y relaciones de equivalencia.

3.2.1. Relación de equivalencia total

Consideremos un grupo finitamente generado G dotado de un sistema finito de generadores S . Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S) = (V, E)$ su grafo de Cayley y Ω el espacio de coloreados sobre el conjunto de aristas de \mathcal{G} .

Recordemos que la acción natural del grupo G sobre su grafo de Cayley \mathcal{G} induce una acción de G sobre Ω dada por

$$G \times \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(g, \omega) \mapsto g\omega$$

donde $g\omega(e) = \omega(g^{-1}e)$. Dicha acción es esencialmente libre, invariante y ergódica respecto de la medida de probabilidad P_p con $p \in (0, 1)$ según las proposiciones 3.15 y 3.14.

Definición 3.28 ([27]) Llamamos *relación total* sobre Ω a la relación de equivalencia medible \mathcal{R}^t inducida por la acción de G sobre Ω , es decir, si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, entonces

$$\omega_1 \mathcal{R}^t \omega_2 \iff \omega_2 = g\omega_1$$

para algún $g \in G$. Observemos que la relación \mathcal{R}^t está definida por la acción del *pseudogrupo total* Γ^t generado por las traslaciones $\tau_g : \Omega \rightarrow \Omega$ dadas por

$$\tau_g(\omega)(e) = g\omega(e) = \omega(g^{-1}e)$$

con $g \in G$.

Llamaremos $\Omega^\natural = G \backslash (V \times \Omega)$ al cociente del espacio $V \times \Omega$ por la acción diagonal de G . La relación de equivalencia sobre $V \times \Omega$ cuyas clases son las horizontales $V \times \{\omega\}$ formadas por coloreados con punto base (g, ω) pasa al cociente en una relación de equivalencia \mathcal{R}^t sobre Ω^\natural isomorfa a \mathcal{R}^t sobre Ω . En efecto, la aplicación

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \Omega^\natural \\ \omega &\longmapsto [1, \omega] \end{aligned}$$

es un isomorfismo boreliano compatible con las relaciones de equivalencia \mathcal{R}^t sobre Ω y Ω^\natural :

$$[1, \omega_1] \mathcal{R}^t [1, \omega_2] \iff \exists g \in G : g\omega_1 = \omega_2 \iff \omega_1 \mathcal{R}^t \omega_2.$$

Sustituyendo V por \mathcal{G} , podemos realizar el espacio de coloreados Ω como transversal completa de una *laminación boreliana* en el sentido de [9] y [10] y la relación \mathcal{R}^t como la relación inducida por la laminación. Si dotamos a \mathcal{G} de la estructura natural de espacio métrico (definida mediante la longitud de las palabras) y a Ω de la estructura natural de espacio boreliano estándar, el producto $\mathcal{G} \times \Omega$ está dotado de una estructura natural de espacio MT en el sentido de [9] y [10] y la laminación horizontal \mathcal{H} sobre $\mathcal{G} \times \Omega$ definida por la aplicación boreliana $(g, \omega) \in \mathcal{G} \times \Omega \mapsto \omega \in \Omega$ es una laminación boreliana. Esta laminación pasa al cociente $X = G \backslash \mathcal{G} \times \Omega$ en una laminación boreliana \mathcal{L}^t , llamada *laminación total*, definida por la fibración equivariante

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & & \downarrow & & \\ & & X & & \end{array}$$

cuyas hojas son isomorfas a \mathcal{G} . El isomorfismo boreliano entre Ω y Ω^\natural descrito antes e inducido por la inclusión natural $\omega \in \Omega \mapsto (1, \omega) \in \mathcal{G} \times \Omega$ permite realizar Ω como transversal completa $\Omega^\natural \subset X$. Por construcción, \mathcal{R}^t es la relación de equivalencia natural inducida por \mathcal{L}^t y Γ^t es el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{L}^t .

Las proposiciones 3.15 y 3.14 pueden reformularse de la siguiente manera:

Proposición 3.29 *Para cada $p \in (0, 1)$, la medida de probabilidad P_p es una medida transversa invariante y ergódica de la laminación (X, \mathcal{L}^t) . \square*

3.2.2. Relación de equivalencia clúster.

Siguiendo a D. Gaboriau, puede verse con claridad que los clústeres conforman una relación de equivalencia medible sobre Ω :

Definición 3.30 ([27]) Se define la *relación de equivalencia clúster* \mathcal{R}^{cl} sobre Ω de la siguiente manera: dos coloreados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ son \mathcal{R}^{cl} -equivalentes si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g\omega_1 = \omega_2$ y $g^{-1} \in C_{\omega_1}(1)$. Esta relación está definida por la acción del *pseudogrupo clúster* Γ^{cl} generado por los isomorfismos

$$\tau_g : \omega \in \text{dom}(\tau_g) \mapsto g\omega \in \text{im}(\tau_g)$$

donde

$$\text{dom}(\tau_g) = \{\omega \in \Omega \mid g^{-1} \in C_\omega(1)\},$$

$$\text{im}(\tau_g) = \{g\omega \in \Omega \mid \omega \in \text{dom}(\tau_g)\}$$

para cada $g \in G$.

Consideramos ahora el subespacio

$$\mathcal{T} = \{(x, \omega) \in \mathcal{G} \times \Omega \mid x \in C_\omega(1)\}$$

de $\mathcal{G} \times \Omega$ dotado de la laminación boreliana inducida por la laminación horizontal de $\mathcal{G} \times \Omega$. Esta laminación es invariante por la acción diagonal de G sobre $\mathcal{T} \subset \mathcal{G} \times \Omega$ e induce por paso al cociente una laminación boreliana \mathcal{L}^{cl} de $X = G \backslash \mathcal{T} = G \backslash \mathcal{G} \times \Omega$.

Definición 3.31 Llamamos *laminación clúster* a la laminación boreliana \mathcal{L}^{cl} de X inducida por la laminación horizontal de \mathcal{T} .

Nótese que dos puntos $[x_1, \omega]$ y $[x_2, \omega]$ pertenecen a la misma hoja de \mathcal{L}^{cl} si y sólo si $C_\omega(x_1) = C_\omega(x_2)$. Igual que antes, Ω es realizable como transversal completa de \mathcal{L}^{cl} con imagen $\Omega^{\text{th}} \subset X$. La *relación clúster* \mathcal{R}^{cl} sobre Ω es la relación inducida por la laminación \mathcal{L}^{cl} :

$$\omega_1 \mathcal{R}^{cl} \omega_2 \iff \exists g \in G : \omega_2 = g\omega_1, g^{-1} \in C_{\omega_1}(1)$$

y el pseudogrupo Γ^{cl} es el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{L}^{cl} .

3.2.3. Invarianza y ergodicidad de la medida

Sabemos que P_p es invariante y ergódica respecto del pseudogrupo total Γ^t . Es natural preguntarse si P_p es también invariante y ergódica respecto del pseudogrupo clúster Γ^{cl} .

Proposición 3.32 *Para todo $p \in (0, 1)$, la medida de P_p sobre Ω es Γ^{cl} invariante.*

Demostración. La demostración es trivial ya que Γ^{cl} es un subpseudogrupo de Γ^t . \square

En general, la medida P_p sobre Ω no es ergódica respecto del pseudogrupo clúster Γ^{cl} , ya que los clústeres finitos forman un conjunto saturado por la acción de Γ^{cl} cuya medida puede ser positiva distinta de 1. No obstante, puesto que nuestro objetivo es obtener información acerca de los clústeres infinitos, nos interesaremos sólo en las órbitas infinitas del pseudogrupo clúster. Para ello, modificamos la medida de probabilidad P_p de manera que el peso total recaiga sobre el conjunto boreliano formado por las órbitas infinitas.

Definición 3.33 Sea $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_\omega(1) \text{ es infinito}\}$ el boreliano formado por las Γ^{cl} -órbitas infinitas. Para cada $p \in [0, 1]$, se define la medida de probabilidad \tilde{P}_p sobre Ω como

$$\tilde{P}_p(B) = \frac{P_p(B \cap \Omega_\infty)}{P_p(\Omega_\infty)}$$

para cualquier boreliano $B \subset \Omega$.

La demostración de la proposición siguiente es obvia:

Proposición 3.34 *Para todo $p \in (0, 1)$, la medida \tilde{P}_p sobre Ω es invariante respecto del pseudogrupo clúster Γ^{cl} . \square*

Nótese que en la fase subcrítica, el conjunto Ω_∞ es de medida nula puesto que los clústeres son finitos para P_p -casi todo coloreado $\omega \in \Omega$. Por lo tanto, a la hora de estudiar la ergodicidad de \tilde{P}_p respecto de Γ^{cl} , podemos situarnos en la fase supercrítica:

Teorema 3.35 ([55]) *Para todo $p_c(\mathcal{G}) < p < 1$, la medida \tilde{P}_p es ergódica respecto del pseudogrupo clúster Γ^{cl} .*

En el lenguaje de [55], el teorema anterior se enuncia diciendo que los clústeres infinitos son indistinguibles. Para explicar este resultado, conviene distinguir los dos casos posibles:

i) Fase de unicidad: Si $p > p_u(\mathcal{G})$, la ergodicidad de \tilde{P}_p se deduce de la ergodicidad de P_p usando que los conjuntos Γ^{cl} -saturados son también conjuntos Γ^t -saturados. En efecto, si suponemos que \tilde{P}_p no es ergódica, existen dos borelianos Γ^{cl} -saturados A y B de medida \tilde{P}_p positiva tales que $A \cap B = \emptyset$. Podemos suponer que no contienen órbitas finitas. En ese caso, se tiene que

$$\Gamma^t(A) \cap \Gamma^t(B) = \emptyset$$

ya que P_p -casi toda órbita de Γ^t contiene a lo sumo una única órbita infinita de Γ^{cl} (pues $p > p_u(\mathcal{G})$).

Por otra parte, se tiene que $P_p(A), P_p(B) > 0$ ya que $\tilde{P}_p(A), \tilde{P}_p(B) > 0$. Ahora, utilizando la ergodicidad de la medida P_p respecto de Γ^t , se deduce que

$$P_p(\Gamma^t(A)) = P_p(\Gamma^t(B)) = 1$$

obteniendo así la contradicción que buscamos.

ii) Fase de no unicidad: Si $p_c(\mathcal{G}) < p < p_u(\mathcal{G})$, entonces hay una cantidad infinita de clústeres infinitos en P_p -casi todo coloreado $\omega \in \Omega$. El argumento anterior falla puesto que los conjuntos Γ^{cl} -saturados no son Γ^t -saturados. En [55], R. Lyons y O. Schramm prueban que los clústeres infinitos en la fase de no unicidad son indistinguibles, lo que en nuestro lenguaje significa que la medida \tilde{P}_p es ergódica respecto de Γ^{cl} . De hecho, en la siguiente sección, reformularemos parte de la prueba del teorema de indistinguibilidad en nuestro lenguaje.

3.2.4. Propiedades de los clústeres

En este apartado, nos proponemos recuperar algunas propiedades de los clústeres (véase el apartado §3.1.5) como consecuencia de resultados propios de la teoría de foliaciones.

Sea G un grupo finitamente generado y S un sistema finito de generadores. Sea (Ω, P_p) el proceso de percolación de Bernoulli sobre el grafo de Cayley $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$. Recordemos que las órbitas del pseudogrupo clúster Γ^{cl} restringido a Ω_∞ se identifican con los clústeres infinitos de la percolación de Bernoulli sobre \mathcal{G} . Aplicando el teorema de E. Ghys sobre el número de finales de un pseudogrupo grafado (véase el teorema 1.37) al pseudogrupo Γ^{cl} actuando sobre $(\Omega_\infty, \tilde{P}_p)$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.36 *Los clústeres infinitos del proceso de percolación sobre \mathcal{G} tienen 1, 2 o un conjunto de Cantor de finales.* \square

Además, usando la tolerancia a la inserción, resulta que si hay una infinidad de clústeres infinitos, éstos poseen exactamente un Cantor de finales:

Corolario 3.37 *En la fase de no unicidad, los clústeres infinitos del proceso de percolación sobre \mathcal{G} tienen un Cantor de finales.*

Demostración. Si existe un conjunto de medida positiva formado por órbitas con 1 o 2 finales, usando la tolerancia a la inserción se obtiene un conjunto de medida no nula formado por órbitas con al menos tres finales, siendo uno de ellos aislado. Esto contradice el teorema 3.36. \square

De hecho, debido a la ergodicidad de la medida \tilde{P} , el número de finales es constante para casi todo clúster infinito. Como consecuencia del corolario 3.37, se concluye el siguiente resultado:

Corolario 3.38 *En la fase de no unicidad, los clústeres tienen crecimiento exponencial, poseen funciones armónicas acotadas no constantes y son transitorios respecto del recorrido aleatorio simple.*

Demostración. Según demuestra D. Gaboriau en [26] (véase el corolario IV.24), los pseudogrupos cuyas órbitas tienen un Cantor de finales no son promediabiles. Esto implica que las órbitas tienen crecimiento exponencial, ya que en caso contrario la acción del pseudogrupo sería promediable según se prueba en [45]. Teniendo en cuenta el corolario 3.37, podemos aplicar estos resultados al pseudogrupo clúster de manera que los clústeres infinitos tienen crecimiento exponencial.

Por otra parte, según la proposición 20 de [18] (véase también [1]), las órbitas del pseudogrupo clúster no tienen la propiedad de Liouville. Luego, la entropía de las órbitas genéricas respecto del recorrido aleatorio simple es positiva. Eso implica que los clústeres tampoco pueden ser recurrentes (véase [1]). \square

3.2.5. Promediabilidad

Nos proponemos ahora dar una prueba basada en el resultado ya citado de D. Gaboriau del siguiente teorema de R.M.Burton y M. Keane:

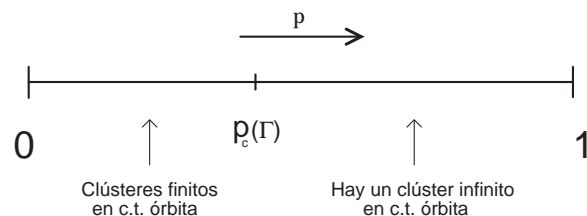
Teorema 3.39 ([15]) *Sean G un grupo finitamente generado, S un sistema finito de generadores y \mathcal{G} el correspondiente grafo de Cayley. Si el grupo G es promediable, entonces $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G})$.*

Demostración. Supongamos que hay fase de no unicidad, es decir, existe p tal que $p_c(\mathcal{G}) < p < p_u(\mathcal{G})$. Entonces, por el corolario 3.37, las órbitas genéricas de Γ^{cl} tienen un Cantor de finales y el pseudogrupo es no promediable según el corolario IV.24 de [26]. Puesto que Γ^{cl} es un sub-pseudogrupo de Γ^t y la promediabilidad es una propiedad hereditaria, se deduce que el pseudogrupo total Γ^t tampoco es promediable. Pero la relación total está definida por la acción del grupo G sobre Ω y deja invariante una medida de probabilidad. Esto significa que G no es promediable (véase la proposición 1.50). \square

3.3. Percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados

En esta sección, extendemos la noción de percolación de Bernoulli al contexto de los pseudogrupos grafados finitamente generados. Para ello, hacemos percolación de Bernoulli de aristas sobre cada órbita con un mismo parámetro y de manera independiente. El objetivo principal es estudiar el número de clústeres infinitos de las órbitas genéricas.

En primer lugar, probaremos que la percolación crítica de las órbitas varía de manera medible. Además, si la medida considerada es ergódica, entonces existe un valor crítico global, que llamamos *percolación crítica del pseudogrupo* que actúa como transición de fase. En la primera fase los clústeres de casi toda órbita son finitos con total seguridad, mientras que en la segunda fase existe un clúster infinito en casi toda órbita.



Prestaremos especial interés a la influencia del espacio de finales de las órbitas sobre el número de clústeres infinitos.

3.3.1. Percolación crítica

Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida casi-invariante μ . Sea E el conjunto de aristas definidas a partir del sistema de generadores Σ que convierten al espacio X en un grafo disconexo, cuyas componentes conexas son las órbitas de Γ .

La *percolación de Bernoulli sobre el pseudogrupo* (Γ, Σ) de parámetro $p \in [0, 1]$ consiste en hacer percolación de Bernoulli sobre el grafo disconexo (X, E) . Es decir, cada arista de E se mantiene o se borra con probabilidad p o $1 - p$ de manera independiente. En otras palabras, nuestro objetivo es estudiar la existencia de clústeres infinitos en las órbitas genéricas. Para ello, estudiamos primero la probabilidad de que un punto pertenezca a un clúster infinito.

Para cada $x \in X$, denotamos (Ω^x, P_p^x) al proceso de percolación de Bernoulli de parámetro $p \in [0, 1]$ sobre la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$.

Definición 3.40 Dado $p \in [0, 1]$ definimos la aplicación $\theta(p) : X \rightarrow [0, 1]$ como

$$\theta_x(p) = P_p^x[x \leftrightarrow \infty]$$

donde $[x \leftrightarrow \infty]$ se identifica con el subconjunto boreliano $\{\omega \in \Omega^x \mid C_\omega(x) \text{ infinito}\}$ de Ω^x .

Proposición 3.41 *La aplicación $\theta(p)$ es medible.*

Demostración. Basta probar que $\theta(p)^{-1}([0, a])$ con $a < 1$ es un conjunto boreliano:

$$\theta(p)^{-1}([0, a]) = \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \leq a\} = \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \geq 1 - a\}.$$

Recordemos que denotamos \mathfrak{B} al conjunto numerable de subgrafos finitos cuyas aristas están etiquetadas con elementos de Σ y, para cada $B \in \mathfrak{B}$, llamamos X_B al conjunto boreliano formado por los puntos de X tales que B es realizable en su órbita. Denotamos por $B.x$ la realización del grafo B sobre la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ con punto base en x . Cada grafo finito $B \in \mathfrak{B}$ tiene una cantidad finita de posibles bordes de aristas. Denotamos $\mathfrak{B}_\mathfrak{F}$ al conjunto de los pares (B, F) donde $B \in \mathfrak{B}$ es un grafo finito con borde F y llamamos $X_{(B,F)}$ al boreliano de puntos de X tales que (B, F) es realizable en sus órbitas. En estos términos, para cada $x \in X$, podemos identificar el suceso $[x \leftrightarrow \infty]$ con el boreliano

$$\bigsqcup_{(B,F) \in \mathfrak{B}_\mathfrak{F}} \{\omega \in \Omega^x \mid C_\omega(x) = B.x\} = \bigsqcup_{(B,F) \in \mathfrak{B}_\mathfrak{F}} \{\omega \in \Omega^x \mid \omega(B) = 1, \omega(F) = 0\}$$

Puesto que se trata de una unión disjunta, para cada $(B, F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$ la aplicación $f_{(B,F)} : X \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$f_{(B,F)}(x) = P_p^x[\omega \in \Omega^x \mid \omega(B) = 1, \omega(F) = 0]$$

solo toma dos valores:

$$f_{(B,F)}(x) = \begin{cases} p^n(1-p)^m & \text{si } x \in X_{(B,F)} \\ 0 & \text{si } x \notin X_{(B,F)} \end{cases}$$

donde n y m son el número de aristas de B y F respectivamente. Puesto que $X_{(B,F)}$ es un conjunto boreliano, la aplicación $f_{(B,F)}$ es también boreliana. Si reescribimos

$$\theta(p)^{-1}([0, a]) = \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \geq 1-a\} = \{x \in X \mid \sum_{(B,F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}} f_{(B,F)}(x) \geq 1-a\}$$

podemos concluir que la aplicación θ es boreliana ya que $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$ es numerable. \square

Definimos ahora la aplicación de percolación que asigna a cada punto de X la percolación crítica de su órbita:

Definición 3.42 Llamamos *aplicación de percolación* $p_c : X \rightarrow [0, 1]$ a la aplicación definida como $p_c(x) = p_c(\Gamma_{\Sigma}(x))$.

Proposición 3.43 *La aplicación de percolación p_c es boreliana y constante sobre las órbitas.*

Demostración. Por definición, la aplicación p_c es constante sobre las órbitas. Para ver que se trata de una aplicación boreliana, basta probar que los conjuntos $p_c^{-1}([0, a])$ son borelianos para cualquier $a \in [0, 1]$. En efecto,

$$\begin{aligned} p_c^{-1}([0, a]) &= \{x \in X \mid p_c(x) \leq a\} \\ &= \{x \in X \mid \sup\{p \in [0, 1] \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] = 0\} \leq a\} \\ &= \bigcap_{q \in (a, 1]} \{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\} \end{aligned}$$

Puesto que la familia de los conjuntos $\{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\}$ es contractiva cuando $q \rightarrow a$, podemos expresar la intersección usando una subfamilia numerable:

$$\begin{aligned} p_c^{-1}([0, a]) &= \bigcap_{q \in (a, 1] \cap \mathbb{N}} \{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\} \\ &= \bigcap_{q \in (a, 1] \cap \mathbb{N}} \{x \in X \mid \theta_x(q) > 0\} \end{aligned}$$

Deducimos de la proposición 3.41 que se trata de un conjunto boreliano. \square

La proposición anterior implica de manera inmediata el siguiente resultado. La prueba es análoga a la demostración de la proposición 2.28.

Proposición 3.44 *Si la medida μ es ergódica, entonces la aplicación p_c es constante en μ -casi todo punto.* \square

Definimos a continuación dos valores críticos que diferenciarán tres fases en el proceso de percolación sobre el pseudogrupo, dependiendo del parámetro p .

Definición 3.45 Se define la *percolación crítica inferior* y la *percolación crítica superior* del pseudogrupo (Γ, Σ) como

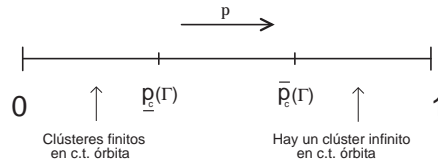
$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \inf \text{ess } \{p_c\} \quad \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \sup \text{ess } \{p_c\}$$

donde

$$\inf \text{ess } \{p_c\} = \sup \{a \in [0, 1] \mid \mu\{x \in X \mid p_c(x) < a\} = 0\},$$

$$\sup \text{ess } \{p_c\} = \inf \{b \in [0, 1] \mid \mu\{x \in X \mid p_c(x) > b\} = 0\}.$$

Notese que para $p < \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$, los clústeres son finitos en μ -casi toda órbita, mientras que en el caso $p > \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$, se tiene que existe al menos un clúster infinito en μ -casi toda órbita. En el caso intermedio $\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$, obtenemos una fase mixta.



Proposición 3.46 *Cuando la medida es ergódica, se verifica que*

$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = p_c(\Gamma_\Sigma(x))$$

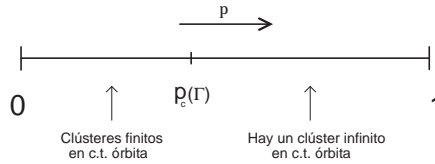
para μ -casi todo punto $x \in X$.

Demostración. El resultado es consecuencia directa de la proposición 3.44. \square

Definición 3.47 Cuando la medida μ es ergódica, definimos la *percolación crítica del pseudogrupo* (Γ, Σ) como

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu).$$

Tal y como cabía esperar, en el caso ergódico, el proceso de percolación es similar al de grafos, es decir, se divide en dos fases, la fase subcrítica y la supercrítica:



3.3.2. Proceso de percolación global

En este apartado reinterpretamos el anterior proceso de percolación de las órbitas de un pseudogrupo grafado como un proceso global. Se usa un espacio de coloreados medibles sobre las aristas del grafo correspondiente, dotado de una sigma-álgebra y una medida de probabilidad naturales.

Proceso global. Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado actuando sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida casi-invariante μ . Llamamos E al conjunto medible formado por las aristas del grafo X . Recordemos que E es la unión de los conjuntos de aristas E^x de las órbitas $\Gamma_\Sigma(x)$ ya que éstas son las componentes conexas de X . El proceso de percolación de Bernoulli sobre (Γ, Σ) consiste en mantener en cada órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ con $x \in X$ cada arista con probabilidad p o borrarla con probabilidad $1 - p$ de manera independiente unas de otras.

Para cada $x \in X$, denotamos (Ω^x, P_p^x) al correspondiente proceso de Bernoulli sobre la órbita grafada $\Gamma_\Sigma(x)$ definido en 3.1.

Definición 3.48 Definimos el *proceso de percolación de Bernoulli* de parámetro $p \in [0, 1]$ sobre el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) actuando sobre el espacio de probabilidad (X, μ) , como el espacio de coloreados medibles definidos sobre el conjunto de aristas de (Γ, Σ)

$$\Omega = \{\omega : E \rightarrow \{0, 1\} \mid \omega \text{ medible}\}$$

dotado de la σ -álgebra generada por los cilindros

$$C_{B_0, B_1} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(B_0) = 0, \omega(B_1) = 1\}$$

con la medida de probabilidad

$$P_p(C_{B_0, B_1}) = \int_X P_p^x(\pi^x(C_{B_0, B_1})) d\mu(x)$$

donde B_0 y B_1 son borelianos de E y la aplicación $\pi^x : \Omega \rightarrow \Omega^x$ está dada por $\pi^x(\omega)(e) = \omega(e)$ para cada $x \in X$ y cada $e \in E^x$.

Para cada $x \in X$, denotamos por ω_x la proyección $\pi_x(\omega)$. Ahora podemos identificar cada elemento ω de Ω con una familia $\{\omega_x\}_{x \in X}$ de coloreados ω_x de Ω_x tales que $\omega_x = \omega_y$ cuando x e y están en la misma órbita. Cada coloreado $\omega \in \Omega$ define un subgrafo aleatorio de (X, E) cuyos vértices son los elementos de X y cuyas aristas corresponden a las aristas abiertas, es decir, coloreadas con un 1. Llamamos *clúster* a cada una de las componentes conexas. Para cada $x \in X$, denotamos $C_\omega(x)$ al clúster de la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ que contiene al punto x .

Obsérvese que el proceso global es más restrictivo que el proceso introducido en el apartado §3.3.1, ya que se impone por definición que los clústeres varíen de manera medible.

Tolerancia a la inserción y al borrado. El proceso de percolación de Bernoulli sobre pseudogrupos grafados es tolerante a la inserción (o borrado) de un conjunto finito de aristas. No obstante, no es tolerante a la inserción (o borrado) de un boreliano de aristas arbitrario, que es la propiedad que resultaría más interesante.

Consideramos el proceso de percolación de Bernoulli (Ω, P_p) sobre el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) que actúa sobre el espacio de probabilidad (X, μ) .

Definición 3.49 Se define la *aplicación de inserción* $i_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$ y la *aplicación de borrado* $d_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$ de una arista $e' \in E$ como:

$$i_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e' \end{cases} \quad d_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e' \end{cases}$$

Definición 3.50 Se dice que la medida P_p es *tolerante a la inserción* (resp. borrado) si para todo boreliano de medida positiva $C \subset \Omega$ y para toda arista $e \in E$, se verifica que $i_e(C) \subset \Omega$ (resp. $d_e(C)$) es de medida positiva. Esto es,

$$P_p(C) > 0 \implies P_p(i_e(C)) > 0 \quad (\text{resp. } P_p(d_e(C)) > 0)$$

En el caso de percolación de pseudogrupos se da la tolerancia a la inserción y al borrado para todos los parámetros sin excepción.

Proposición 3.51 *La medida de probabilidad P_p de parámetro $p \in [0, 1]$ es tolerante a la inserción y al borrado.*

Demostración. Sea $C \subset \Omega$ un boreliano tal que $P_p(C) > 0$ y sea $e \in E$ una arista. Insertar e en C significa insertar una arista en una única órbita. Puesto que lo que suceda en un conjunto finito de órbitas no afecta en el cálculo de la medida de $i_e(C)$ se obtiene

$$P_p(i_e(C)) = \int_X P_p^x(\pi_x(i_e(C))) d\mu(x) = P_p(C) > 0.$$

La demostración para el proceso de borrado será análoga. \square

Nótese que con el mismo razonamiento probamos la tolerancia a la inserción o borrado de un conjunto finito de aristas $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$, debido a que sólo afecta a un conjunto finito de órbitas.

La inserción de una cantidad finita de aristas no resulta de gran interés en este caso, ya que nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de los coloreados en casi toda órbita. Una pregunta interesante es si podemos insertar una cantidad finita de aristas en casi toda órbita. La respuesta es negativa en el caso armónico. En efecto, aplicando la proposición fundamental de Ghys (véase la proposición 1.38 o la referencia original [29]) sabemos que no existe un conjunto boreliano de aristas de E de medida no nula cuya intersección con las órbitas sea un conjunto finito de aristas.

Por otra parte, el ejemplo siguiente nos muestra que no existe tolerancia a la inserción de conjuntos de aristas arbitrarios.

Ejemplo 3.52 Sea B_1 un boreliano de aristas de E tal que la medida del cilindro C_{B_1} es positiva y sea $B = E - B_1$. El cilindro $i_B(C_{B_1}) = C_{B \cup B_1}$ es el coloreado de Ω cuyas aristas están coloreadas por 1. Luego $P_p(i_B(C_{B_1})) = 0$ para $p \neq 1$.

3.3.3. Espacio de finales y percolación crítica

En general, las órbitas de los pseudogrupos grafados carecen de la homogeneidad propia de los grafos de Cayley que facilita la prueba de la existencia de una fase de unicidad. No obstante, cuando la medida considerada es armónica y ergódica, podemos obtener información sobre el número de clústeres infinitos de las órbitas genéricas en función de su número de finales.

Antes de abordar este estudio conviene reseñar cómo se comporta la percolación cuando se sustituye un pseudogrupo grafado por otro Kakutani equivalente. Aunque la percolación crítica no es invariante, ya que no lo es para grafos, seguimos teniendo que la propiedad 'tener percolación crítica menor que 1' sí lo es:

Proposición 3.53 Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos de transformaciones no singulares de dos espacios de probabilidad (X, μ) y (X', μ') con μ y μ' ergódicas, dotados de dos sistemas finitos de generadores Σ y Σ' . Supongamos que son equivalentes en el sentido de Kakutani. Entonces

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < 1 \iff p_c(\Gamma', \Sigma', \mu') < 1.$$

Demostración. Basta probarlo para el caso en que (Γ', Σ') es un factor de Kakutani de (Γ, Σ) . Puesto que existe una aplicación $P : X \rightarrow X'$ que define una casi-isometría entre los grafos $\Gamma_\Sigma(x)$ y $\Gamma'_{\Sigma'}(P(x))$ para μ -casi todo $x \in X$, se tiene que

$$p_c(\Gamma_\Sigma(x)) < 1 \iff p_c(\Gamma'_{\Sigma'}(P(x))) < 1$$

por el teorema 3.13. Obtenemos así el resultado buscado. \square

A continuación, nos proponemos demostrar que los pseudogrupos con más de un final tienen propiedades análogas a las demostradas en los puntos 1 y 2 de la proposición 3.22 para grafos de Cayley con más de un final. Es decir, si casi toda órbita del pseudogrupo tiene 2 finales entonces todos los clústeres son finitos para cualquier valor $p < 1$. Si por el contrario, casi toda órbita tiene un Cantor de finales, entonces no hay fase de unicidad y además, existe casi seguro una infinidad de clústeres infinitos en las órbitas genéricas para todo $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < 1$. La demostración de ambos resultados se basa en un mismo lema que llamamos lema fundamental.

Lema fundamental 3.54 Sea \mathfrak{G} un grafo conexo infinito y \mathcal{G} un grafo finito. Supongamos que \mathfrak{G} contiene una cantidad infinita numerable de copias de \mathcal{G} disjuntas dos a dos que denotamos $\{\mathcal{G}_n\}$. Entonces para cada $p \in (0, 1)$, al realizar p -percolación de Bernoulli sobre \mathfrak{G} desaparecerá casi seguro una cantidad infinita de grafos \mathcal{G}_n .

Demostración. Fijamos un parámetro $p \in (0, 1)$. Sea (Ω, P_p) el espacio de coloreados sobre las aristas de \mathfrak{G} y (Ω_n, P_p^n) el espacio de coloreados sobre las aristas del grafo finito \mathcal{G}_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la proyección natural

$$\pi : (\Omega, P_p) \longrightarrow \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \prod_{n \in \mathbb{N}} P_p^n \right)$$

que asigna a cada coloreado $\omega \in \Omega$ la sucesión de coloreados (ω_n) donde $\omega_n = \omega|_{\mathcal{G}_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $\pi_* P_p = \prod_{n \in \mathbb{N}} P_p^n$.

Dado un coloreado $\omega \in \Omega$, llamemos N_ω al número de grafos \mathcal{G}_n para los que el coloreado inducido ω_n es nulo. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos E_k al conjunto de coloreados en los que desaparecen exactamente k copias de \mathcal{G} , es decir,

$$E_k = \{\omega \in \Omega \mid N_\omega = k\}.$$

Nuestro objetivo es probar que, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la probabilidad $P_p(E_k) = 0$. Con ese fin, para cada $m \in \mathbb{N}$, consideramos la siguiente aplicación

$$\sigma_m : \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \prod_{n \in \mathbb{N}} P_p^n \right) \longrightarrow \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n, \prod_{n \in \mathbb{N}} P_p^n \right)$$

dada por

$$\sigma_m(\omega_n) = (\omega'_n) = \begin{cases} \omega_n & \text{si } n < m \\ 0 & \text{si } n = m \\ \omega_{n+1} & \text{si } n > m \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\pi(E_{k+1}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \sigma_m(\pi(E_k))$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego

$$\pi_* P_p(\pi(E_{k+1})) = \pi_* P_p\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \sigma_m(\pi(E_k))\right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \pi_* P_p(\sigma_m(\pi(E_k))).$$

Ahora bien, puesto que

$$\pi_* P_p(\sigma_m(\pi(E_k))) = (1-p)^s \pi_* P_p(\pi(E_k))$$

donde $s = \#\{e \in \mathcal{G}\}$ y

$$\pi_* P_p(\pi(E_k)) = P_p(E_k)$$

tendríamos que $P_p(E_k) = 0$, ya que en caso contrario $P_p(E_{k+1})$ sería infinito, lo que obviamente no es posible. \square

Antes de estudiar el caso de pseudogrupos con más de un final, necesitamos fijar algunas notaciones comunes. Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida de probabilidad μ armónica y ergódica. Supongamos que casi toda órbita tiene más de 2 finales. La versión discreta de F. Paulin del lema de la hipersuperficie de E. Ghys (demostrada en [58] y recordada en la proposición 1.39) nos dice que existe un boreliano $A \subset X$ de medida positiva y un grafo finito enraizado \mathcal{G} de manera que,

para todo $x \in A$, el grafo \mathcal{G} se realiza sobre la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ en un grafo $\mathcal{G}.x$ que desconecta a la órbita en al menos 2 componentes no acotadas.

Utilizando la notación empleada en la proposición 1.39, denotamos

$$\mathcal{G}.A = \varphi(\mathcal{G} \times A) = \bigsqcup_{x \in A} \mathcal{G}.x.$$

Puesto que la medida μ es armónica, podemos aplicar la proposición fundamental de E. Ghys ([29]) recordada en la proposición 1.38. Así se tiene que, para casi todo $x \in X$, la intersección de $\mathcal{G}.A$ con la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ es de la siguiente manera

$$\mathcal{G}.A \cap \Gamma_\Sigma(x) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n^x$$

donde $\{\mathcal{G}_n^x\}$ es una sucesión infinita de copias de \mathcal{G} disjuntas dos a dos que aproxima a los finales y que podemos ordenar en función de la distancia al punto x .

Recordemos además que, para cada $m \in \mathbb{N}$, el grafo \mathcal{G}_m^x desconecta a la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ en al menos 2 componentes conexas no acotadas. Si C_m^x es la componente conexa (acotada o no) de $\Gamma_\Sigma(x) - \mathcal{G}_m^x$ que contiene al punto x , denotamos por U_m^x su complementario en la órbita, es decir

$$U_m^x = \Gamma_\Sigma(x) - C_m^x.$$

3.3.4. Pseudogrupos con 2 finales

Sabemos que los grafos de Cayley cuyas órbitas genéricas tienen dos finales no poseen clústeres infinitos para $p < 1$. De manera análoga, la percolación crítica de todo pseudogrupo con órbitas genéricas con 2 finales es igual a 1.

Teorema 3.55 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida de probabilidad μ armónica y ergódica. Si μ -casi toda órbita tiene 2 finales, entonces*

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1.$$

Demostración. Hemos visto que existe un boreliano $A \subset X$ de medida positiva y un grafo finito \mathcal{G} de manera que, para casi todo $x \in X$, se tiene que

$$\mathcal{G}.A \cap \Gamma_\Sigma(x) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n^x$$

donde \mathcal{G}_n^x son copias de \mathcal{G} que desconectan a la órbita en dos componentes infinitas y aproximan los dos finales. Puesto que hay dos subsucesiones que convergen a cada uno de los finales, podemos reordenarlas y denotarlas $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$, de manera que $U_{n+1}^x \subset U_n^x$ si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $U_{n-1}^x \subset U_n^x$ si $n \in \mathbb{Z}^-$.

Ahora, fijado el parámetro $p \in (0, 1)$, percolamos simultáneamente las órbitas del pseudogrupo. Por el lema fundamental 3.54, sabemos que en casi toda órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ desaparece una infinidad de grafos de las sucesiones $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ con toda seguridad. De este modo, tenemos que los clústeres son finitos en casi toda órbita, o equivalentemente

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1.$$

□

Haciendo uso de la estructura geométrica de este tipo de pseudogrupos (descrita por F. Paulin en [58]; véase también el corolario 1.43) podemos obtener una prueba alternativa del teorema 3.55 (que sigue usando no obstante el lema fundamental 3.54). Recordemos que (Γ, Σ) es Kakutani equivalente a una HNN-extensión trivial de un pseudogrupo grafado cuyas órbitas son finitas. Es decir, casi toda órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ es casi-isométrica a un grafo \mathcal{G}^x con dos finales formado por una sucesión numerable de grafos finitos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ unidos consecutivamente por una sucesión numerable de aristas $\{e_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Recordemos que dados dos grafos casi-isométricos, o bien ambos tienen percolación crítica igual a 1, o bien menor que 1 (véase el teorema 3.13). Luego basta probar que $p_c(\mathcal{G}^x) = 1$ para casi todo $x \in X$ para obtener nuestro resultado. En efecto, si hacemos percolación de Bernoulli sobre \mathcal{G}^x con $p < 1$, por el lema fundamental 3.54, una infinidad de aristas e_n^x con $n \in \mathbb{Z}^+$ van a desaparecer. Lo mismo sucede con una infinidad de aristas e_m^x con $m \in \mathbb{Z}^-$. Por lo tanto, todos los clústeres que se obtienen son casi seguro finitos y se tiene $p_c(\mathcal{G}^x) = 1$.

3.3.5. Pseudogrupos con un Cantor de finales

Cuando consideramos un árbol localmente finito T , sabemos que existen infinitos clústeres infinitos en la fase supercrítica $p_c(T) < p < 1$. Lo mismo sucede para grafos de Cayley con un Cantor de finales. Basándonos en la idea de la demostración para árboles (véase [60]) y utilizando la estructura geométrica de las órbitas descrita en [58], probamos un resultado análogo para pseudogrupos grafados finitamente generados cuyas órbitas genéricas tienen un Cantor de finales respecto de una medida de probabilidad armónica ergódica. Antes de probar dicho resultado, será conveniente fijar notaciones que serán útiles a lo largo de la demostración.

Consideremos un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) finitamente generado actuando sobre un espacio boreliano estándar X dotado de una medida armónica y ergódica μ . Supongamos que μ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales. Luego existe un boreliano de medida positiva $A \subset X$ y un grafo finito \mathcal{G} tales que

$$\mathcal{G}.A \cap \Gamma_\Sigma(x) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n^x$$

para cada $x \in X$, donde los grafos \mathcal{G}_n^x son copias de \mathcal{G} que desconectan a la órbita en al menos tres componentes infinitas y aproximan los finales.

Consideremos ahora el boreliano de medida positiva $Y = X - \mathcal{G}.A \subset X$ y el subpseudogrupo grafado inducido (Γ_Y, Σ_Y) donde

$$\Sigma_Y = \{\sigma|_Y : \text{dom}(\sigma) \cap Y \rightarrow \text{im}(\sigma) \cap Y \mid \sigma \in \Sigma\}.$$

Obsérvese también que la estructura métrica de las órbitas de Γ_Y es la inducida por la de las órbitas de Γ sobre el boreliano Y . Para simplificar las notaciones, llamaremos $\Gamma_Y(y)$ a la órbita grafada de Γ_Y en un punto $y \in Y$. Denotamos μ_Y a la medida de probabilidad inducida. Nótese que cada órbita del pseudogrupo de partida Γ contiene una infinidad numerable de órbitas del pseudogrupo Γ_Y .

Consideramos la aplicación de percolación sobre Y

$$p_c^Y : Y \rightarrow [0, 1]$$

que asigna a cada punto $y \in Y$ el valor

$$p_c^Y(y) := p_c(\Gamma_Y(y)).$$

Sabemos que es una aplicación boreliana, como probamos en la proposición 3.43. A partir de ahora y para simplificar, denotamos a la percolación crítica inferior del pseudogrupo Γ_Y (véase la definición 3.45) como

$$\mathfrak{p} = \underline{p}_c(\Gamma_Y, \Sigma_Y, \mu_Y),$$

es decir, \mathfrak{p} es el ínfimo esencial de la aplicación p_c sobre Y . Además, la percolación crítica $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ del pseudogrupo de partida verifica

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \mathfrak{p}.$$

En efecto, puesto que la órbita $\Gamma_Y(y)$ es un subgrafo de $\Gamma_\Sigma(y)$, se tiene que

$$p_c(\Gamma_Y(y)) \geq p_c(\Gamma_\Sigma(y))$$

para μ_Y -casi todo $y \in Y$, y por consiguiente $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ es una cota inferior esencial de la aplicación p_c sobre Y .

Teorema 3.56 *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida de probabilidad μ armónica y ergódica. Supongamos que μ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales. Entonces, en la fase supercrítica $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < 1$, existe una infinidad de clústeres infinitos en μ -casi toda órbita.*

La prueba del teorema se divide en el estudio de los dos siguientes casos:

1. $p > \mathfrak{p}$,
2. $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p \leq \mathfrak{p}$.

En ambos casos sabemos que hay al menos un clúster infinito en las órbitas genéricas del pseudogrupo Γ ya que $p > p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$. La diferencia esencial es que en el primer caso hay un conjunto de medida positiva de órbitas de Γ_Y que poseen un clúster infinito, mientras que en el segundo caso los clústeres de las órbitas genéricas del pseudogrupo inducido en Y son finitos. En la demostración del teorema estudiamos por separado cada caso y probamos que en ambos las órbitas genéricas de Γ poseen una infinidad de clústeres infinitos.

Demostración. Veamos en primer lugar la prueba para el primer caso:

- *Caso 1.* Supongamos que $p > \mathfrak{p}$. Entonces, puesto que \mathfrak{p} es el ínfimo esencial de la aplicación p_c^Y , el boreliano saturado por la acción de Γ

$$C = p_c^{Y^{-1}}((\mathfrak{p}, p)) = \{y \in Y \mid \mathfrak{p} < p_c(\Gamma_Y(y)) < p\}$$

de $Y = X - \mathcal{G}.A$ verifica $\mu_Y(C) > 0$. Luego C también es un boreliano de X de medida μ positiva. Por la proposición fundamental de E. Ghys ([29]), sabemos que C aproxima los finales de casi toda órbita de Γ debido a la armonicidad de μ . Luego, para μ -casi todo $x \in X$, la intersección de la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$ con C será de la forma

$$\Gamma_\Sigma(x) \cap C = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} C_m^x$$

donde $\{C_m^x\}$ es la sucesión infinita formada por las componentes conexas. Nótese que cada C_m^x es un subgrafo conexo infinito contenido en $\Gamma_\Sigma(x) - \mathcal{G}.A$. Por lo tanto, al borrar cualquier grafo \mathcal{G}_n^x de la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$, separamos al menos dos subgrafos de la sucesión $\{C_m^x\}$.

Finalmente, si hacemos percolación de Bernoulli de parámetro p sobre las órbitas de Γ , obtenemos en cada componente C_m^x un clúster infinito abierto ya que su percolación crítica es menor que p . Por otra parte, con total seguridad desaparece

una cantidad infinita de los subgrafos $\{\mathcal{G}_n^x\}$. De manera que hay una infinidad de grafos C_m^x que permanecen disjuntos con total seguridad y en consecuencia, existe una infinidad de clústeres infinitos. Obtenemos de este modo el resultado deseado.

- *Caso 2.* Supongamos ahora que $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p \leq \mathfrak{p}$. De la primera desigualdad deducimos que las órbitas genéricas de Γ poseen un clúster infinito. La segunda desigualdad nos indica que dichos clústeres infinitos no están contenidos en las componentes conexas de Y e intersecan infinitas veces el conjunto $\mathcal{G}.A$, puesto que los clústeres en las componentes de Y son finitos por hipótesis ($p \leq \mathfrak{p}$). Veamos ahora que hay una infinidad de clústeres infinitos en las órbitas genéricas de Γ .

Consideremos $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < q < p$. Para μ -casi todo punto $x \in X$, tenemos entonces las siguientes propiedades:

i) Existe al menos un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_c(U_n^x) \leq q$.

Razonamos por reducción al absurdo. Si suponemos que $p_c(U_n^x) > q$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces los clústeres de U_n^x son finitos casi seguro. Luego cualquier clúster infinito de la órbita de x debe estar contenido en el complementario de $\mathcal{G}.A$, pero por hipótesis esto no es posible.

ii) Existen dos enteros $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$U_{n_0}^x \cap U_{m_0}^x = \emptyset$$

verificando

$$p_c(U_{n_0}^x), p_c(U_{m_0}^x) \leq q.$$

De nuevo razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo par $n, m \in \mathbb{N}$ con $p_c(U_n^x), p_c(U_m^x) \leq q$ se tiene

$$U_n^x \cap U_m^x \neq \emptyset.$$

Luego tomamos $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p_c(U_n^x) \leq q\}$. Por el punto (i), aplicando el mismo razonamiento al subgrafo $U_{n_0}^x$, podemos considerar el menor natural n_1 tal que $U_{n_1}^x \subset U_{n_0}^x$ y $p_c(U_{n_1}^x) \leq q$. Reiterando el mismo argumento, obtenemos una subsucesión $\{n_k\}$ tal que

$$U_{n_{k+1}}^x \subset U_{n_k}^x$$

y

$$p_c(U_{n_k}^x) \leq q$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, para todo $n \notin \{n_k\}$, $p_c(U_n^x) > q$. Llegamos entonces a la contradicción deseada: como hay al menos un clúster infinito en la órbita $\Gamma_\Sigma(x)$, éste ha de tener un único final contenido en $\bigcap_{n_k \in \mathbb{N}} U_{n_k}^x$. Además todo camino de aristas

infinito del clúster interseca a los grafos $\mathcal{G}_{n_k}^x$. Esto no es posible ya que, de acuerdo con el lema fundamental 3.54, al hacer percolación de parámetro p desaparece una cantidad infinita de los grafos $\mathcal{G}_{n_k}^x$, lo que contradice la existencia de un clúster infinito.

Una vez probadas las propiedades (i) y (ii), continuamos con la demostración del teorema manteniendo la notación de (ii). Aplicamos ahora al subgrafo $U_{m_0}^x$ los mismos argumentos. Es decir, existen dos enteros $n_1, m_1 > m_0$ tales que

$$U_{n_1}^x \cap U_{m_1}^x = \emptyset$$

verificando

$$p_c(U_{n_1}^x), p_c(U_{m_1}^x) \leq q.$$

Procediendo de manera recurrente, obtenemos una sucesión de subgrafos $\{U_{n_k}^x\}$ disjuntos dos a dos, separados entre sí por los grafos finitos $\mathcal{G}_{n_k}^x$ y verificando $p_c(U_{n_k}^x) \leq q$. Para finalizar la prueba, hacemos percolación de Bernoulli de parámetro $p > q$ sobre las órbitas. Cada subgrafo $U_{n_k}^x$ posee al menos un clúster infinito puesto que $p_c(U_{n_k}^x) \leq q < p$. Además, por el lema fundamental 3.54, una infinidad de los grafos $\mathcal{G}_{n_k}^x$ desaparecen. Luego existe una cantidad infinita de clústeres infinitos disjuntos como buscábamos. \square

3.3.6. Ejemplos

En este apartado presentamos algunos ejemplos significativos de percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados:

Laminación liouvilliana. Sea \mathcal{L}_∞ la laminación definida en el ejemplo 2.4.2 y \mathcal{R} la relación de equivalencia definida por el pseudogrupo de holonomía Γ_∞ en restricción a una transversal X . Según se prueba en el lema 2.55, posee una medida transversa invariante μ . Recordemos que se trata de una relación cuyas órbitas genéricas son árboles con 1 final, número de ramificación igual a 1 y crecimiento exponencial. Luego, casi toda órbita tiene percolación crítica igual a 1, es decir, para cualquier $p < 1$ los clústeres de casi toda órbita son finitos.

Proposición 3.57 *El pseudogrupo de holonomía Γ_∞ verifica $p_c(\Gamma_\infty, \mu) = 1$.* \square

Este resultado muestra que la proposición 3.21 no se extiende al contexto de pseudogrupos, es decir, el crecimiento exponencial en las órbitas no implica la existencia de fase supercrítica

Acción del grupo del sereno. Consideremos la acción del grupo del sereno G_1 sobre el conjunto de Cantor $\mathbb{Z}_2[[t]]$ y el sistema de generadores S descritos en §2.4.1. Puesto que G_1 es promediable, $p_c(\mathcal{G}_1) = p_u(\mathcal{G}_1)$ según el teorema 3.24. Además, según vimos en el ejemplo 2.4.1, el grafo \mathcal{G}_1 contiene un subgrafo isomorfo al árbol de Fibonacci T y por lo tanto $p_c(\mathcal{G}_1) \leq p_c(T) = 1/br(T) = 1/\Phi$, de donde deducimos que

$$p_u(\mathcal{G}_1) < 1.$$

Este resultado ha sido probado por R. Lyons y O. Schramm en [55] para los grupos $F \wr \Lambda$ donde F es un grupo finito y Λ un grupo finitamente generado.

Puesto que para cualquier medida invariante, las órbitas genéricas de la acción considerada son isomorfas al grafo de Cayley \mathcal{G}_1 , se deduce que tienen percolación crítica menor que $\frac{1}{\Phi}$. De hecho, en la fase supercrítica, contienen un único clúster infinito.

Proposición 3.58 *La acción φ de G_1 sobre $\mathbb{Z}_2[[t]]$ verifica $p_c(\varphi) < \frac{1}{\Phi}$ (respecto de cualquier medida de probabilidad invariante μ). Además, en μ -casi toda órbita existe un único clúster infinito para $p > p_c(\varphi)$. \square*

En este ejemplo tenemos una acción promediable y sólo hay un clúster infinito en la fase supercrítica. Luego es natural preguntarse si este hecho sigue siendo cierto para pseudogrupos grafados finitamente generados.

Clústeres infinitos de pseudogrupos promediables y Følner. El ejemplo siguiente muestra que la respuesta a la pregunta anterior es negativa cuando la medida considerada no es invariante:

Ejemplo 3.59 Consideremos la acción del grupo libre \mathbb{F}^2 sobre su espacio de finales $\partial\mathbb{F}^2$, dotado de la medida de probabilidad μ descrita en el ejemplo 1.51. Fijemos el conjunto de generadores $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$. Casi toda órbita es isomorfa al grafo de Cayley \mathcal{F}^2 de $\partial\mathbb{F}^2$. Luego casi toda órbita tiene percolación crítica igual a $\frac{1}{3}$, ya que \mathcal{F}^2 es un árbol con número de ramificación $br(\mathcal{F}^2) = 3$. Además sabemos que para $p > \frac{1}{3}$, hay una infinidad de clústeres infinitos en casi toda órbita. No obstante, la acción es promediable como vimos en 1.51. Luego el teorema 3.24 (demostrado originalmente en [15]) no se puede extender al contexto general de acciones no singulares de pseudogrupos sobre espacios de probabilidad. Es decir, en estas condiciones, la promediabilidad no implica la unicidad de los clústeres infinitos de las órbitas genéricas.

Cuestión 3.60 *¿Se extiende el teorema 3.24 a los pseudogrupos que dejan invariante una medida de probabilidad?*

Resulta interesante resaltar que los pseudogrupos Følner pueden tener más de un clúster infinito incluso cuando la medida es invariante:

Ejemplo 3.61 Consideremos la relación de equivalencia $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ definida por un proceso de Galton-Watson (restringido al suceso de no extinción) cuyo número medio de descendientes es $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k > 1$ (véase §2.4.3). El número de ramificación de casi toda órbita respecto de la medida invariante μ es igual a m . Puesto que se trata de árboles, la percolación crítica de las órbitas genéricas es $1/m$ y contienen una infinidad de clústeres infinitos para cada $1/m < p < 1$. La relación \mathcal{R} no es promediable puesto que las órbitas tienen un Cantor de finales (véase el corolario IV.24 de [26]). No obstante, contiene sucesiones de Følner en casi toda órbita (véase el ejemplo 3 de [45]).

En este caso, se trata de un pseudogrupo no promediable, por lo que la cuestión planteada continúa abierta.

3.4. Percolación relativa en acciones de grupos

En esta sección, introducimos un nuevo tipo de percolación que consiste en intersecar las órbitas de la acción de un grupo de tipo finito sobre un espacio de probabilidad con un boreliano de medida fijada. Así se mantienen aquellas aristas que unen puntos del boreliano y se borran las demás. Si llamamos *clústeres* a las componentes conexas resultantes, nuestro objetivo principal será su estudio en función de la medida del boreliano considerado.

3.4.1. Definición de percolación relativa

En este apartado definimos el concepto de percolación relativa y estudiamos sus propiedades básicas.

Sean G un grupo finitamente generado, S un sistema finito de generadores y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ su grafo de Cayley. Consideramos X un espacio boreliano estándar dotado de una medida de probabilidad μ y suponemos que G actúa sobre (X, μ) de manera esencialmente libre, invariante y ergódica. En caso necesario, denotaremos $\varphi : G \times X \rightarrow X$ la acción de G sobre X . Dotamos cada órbita $G.x$ de la estructura de grafo $\mathcal{G}.x$ definida con la ayuda de S que hace casi toda órbita isomorfa a \mathcal{G} .

Definición 3.62 Sea \mathcal{A} un subconjunto boreliano de X con medida $\mu(\mathcal{A}) = p$. Llamaremos *percolación relativa* a \mathcal{A} al proceso obtenido de la siguiente manera: para cada $x \in X$, mantenemos las aristas pertenecientes a $\mathcal{G}.x \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ y borramos las demás. Si $\mathcal{G}_x^{\mathcal{A}}$ es el subgrafo de $\mathcal{G}.x$ que resulta, denotaremos por $C_{\mathcal{A}}(x)$ a la componente conexa de x a la que llamaremos *clúster* de x .

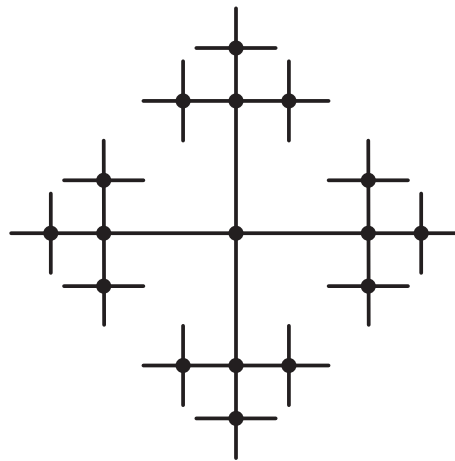
Nuestro objetivo consiste en el estudio de la naturaleza y propiedades de los clústeres, especialmente de los infinitos, en función de la medida de \mathcal{A} . El siguiente ejemplo muestra qué sucede en los casos particulares en que la medida de \mathcal{A} es 0 ó 1:

Ejemplo 3.63 i) Si $\mu(\mathcal{A}) = p = 0$, entonces la intersección de μ -casi toda órbita con \mathcal{A} es vacía y los clústeres coinciden con los propios puntos.

ii) Si $\mu(\mathcal{A}) = p = 1$, entonces \mathcal{A} interseca a μ -casi toda órbita donde obtiene un único clúster infinito que coincide con la propia órbita.

Nos interesaremos a partir de ahora en la percolación relativa a borelianos con medida $0 < \mu(\mathcal{A}) = p < 1$. Es natural preguntarse si los clústeres de las órbitas genéricas son finitos para un valor de p suficientemente pequeño. El siguiente ejemplo nos muestra que la respuesta es negativa:

Ejemplo 3.64 Consideremos el grupo de rotaciones $SO(3)$ sobre la esfera \mathbb{S}^2 . Sabemos que con probabilidad 1 relativa a la medida de Haar, cualquier par de rotaciones π_1 y π_2 genera un subgrupo libre denso en $SO(3)$, véase la proposición 8.2 de [13]. Luego la acción del grupo de rotaciones $G = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ sobre la esfera \mathbb{S}^2 verifica que todas las órbitas son densas y admiten una estructura de grafo isomorfo al grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}^2 .



Observemos que los generadores π_1 y π_2 de G son rotaciones de ángulo irracional ya que G es un grupo libre.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos una bola B_ε centrada en un punto fijo x_1 de π_1 de volumen $vol(B_\varepsilon) < \varepsilon$. Por una parte, como la acción de G es minimal, B_ε corta a cualquier órbita. Por otra parte, para cualquier punto $x \neq x_1$ de B_ε , los puntos $\pi_1^n(x)$ son distintos dos a dos y el clúster $C_{B_\varepsilon}(x)$ contiene a la recta obtenida uniendo cada punto $\pi_1^n(x)$ con $\pi_1^{n+1}(x)$. Luego, todas las órbitas que intersecan a B_ε (en algún punto distinto de x_1) contienen un clúster infinito.

3.4.2. Número de clústeres infinitos

La primera cuestión que surge de modo natural es saber si las órbitas genéricas tienen el mismo número de clústeres infinitos. Veremos a continuación que la respuesta es afirmativa debido a la ergodicidad de la medida. Es la razón por la que hemos impuesto esta condición desde un principio.

Sea $\mathcal{A} \subset X$ un boreliano de medida $0 < \mu(\mathcal{A}) = p < 1$ y sea $N(\mathcal{A}) : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la aplicación que asocia a cada $x \in X$ el número de clústeres infinitos que hay en la órbita $\mathcal{G}.x$. Nótese que la aplicación $N(\mathcal{A})$ es constante sobre las órbitas.

Proposición 3.65 *La aplicación $N(\mathcal{A})$ es boreliana.*

Demostración. Para cada par de enteros $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$, consideramos la aplicación

$$N_n^m : X \rightarrow \mathbb{N}$$

que asigna a cada $x \in X$ el número de componentes conexas de $\mathcal{G}_x^{\mathcal{A}} \cap B(x, m)$ que cortan simultáneamente los bordes $\partial B(x, n)$ y $\partial B(x, m)$, donde $B(x, n)$ y $B(x, m)$ son las bolas en $\mathcal{G}.x$ centradas en x de radios n y m respectivamente. La aplicación N_n^m es boreliana, ya que sólo existe una cantidad finita de configuraciones posibles de $\mathcal{G}_x^{\mathcal{A}} \cap B(x, m)$ verificando esas propiedades.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{N_n^m\}_m$ es decreciente y acotada inferiormente por 0, luego existe el límite puntual

$$N_n = \lim_{m \rightarrow \infty} N_n^m$$

y es una aplicación boreliana. Nótese que, para cada $x \in X$, $N_n(x)$ representa el número de clústeres infinitos de la órbita que intersecan al borde $\partial B(x, n)$. Por tanto

$$N(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n,$$

de donde se deduce el carácter boreliano de la aplicación $N(\mathcal{A})$. \square

Como consecuencia de la proposición anterior y de la ergodicidad de la medida μ , se tiene el corolario (cuya prueba es análoga a la demostración de la proposición 2.28):

Proposición 3.66 *La aplicación $N(\mathcal{A})$ es constante en μ -casi todo punto.* \square

Luego existe una aplicación N que asocia a cada elemento \mathcal{A} del álgebra de Borel de X una cantidad $N(\mathcal{A}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

3.4.3. Relación clúster relativa a un boreliano

Como en el caso de la percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley, la percolación relativa puede formularse en términos de relaciones de equivalencia y pseudogrupos. Podemos así interpretar los clústeres como órbitas de un pseudogrupo, al que llamaremos *pseudogrupo clúster relativo a \mathcal{A}* , y usar los métodos habituales en el estudio de las órbitas infinitas.

Definición 3.67 Se llama *relación de equivalencia total \mathcal{R}^t* sobre X a la relación de equivalencia definida de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}^t y \iff \exists g \in G : gx = y$$

La relación total \mathcal{R}^t está definida por la acción de G o si se prefiere por la acción del *pseudogrupo total Γ^t* generado por G (i.e. por las traslaciones $\tau_g : x \in X \mapsto gx \in X$ de los elementos g de G).

Obviamente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.68 *La medida de probabilidad μ es invariante y ergódica respecto del pseudogrupo total Γ^t .* \square

Definimos a continuación un pseudogrupo medible grafado $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$ sobre X , cuyas órbitas en los puntos de \mathcal{A} coinciden con las del pseudogrupo $\Gamma^t|_{\mathcal{A}}$ y en los puntos de $X - \mathcal{A}$ con los propios puntos. En otras palabras, las órbitas de $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$ se corresponden con los clústeres resultantes de la percolación relativa al boreliano \mathcal{A} .

Definición 3.69 Se define sobre X la *relación de equivalencia clúster $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$* relativa al boreliano \mathcal{A} de la siguiente manera:

1. si $x, y \in \mathcal{A}$, entonces $x\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}y$ si y sólo si x e y están unidos por un camino de aristas con extremos en \mathcal{A} :

$$\exists g = s_{i_n} \dots s_{i_0} : gx = y, s_{i_j} \dots s_{i_0} x \in \mathcal{A}, \forall j \in \{0, \dots, n\},$$

2. si $x, y \notin \mathcal{A}$ entonces $x\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}y$ si y sólo si $x = y$.

La relación clúster $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ está definida por la acción del *pseudogrupo clúster relativo a \mathcal{A}* , que denotaremos $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$, generado por las restricciones

$$\tau_s : \text{dom}(s) \cap \mathcal{A} \rightarrow \text{im}(s) \cap \mathcal{A}$$

de las traslaciones de los elementos s de S al boreliano \mathcal{A} .

Como antes, tenemos de manera inmediata la siguiente proposición.

Proposición 3.70 *La medida μ es invariante respecto del pseudogrupo clúster relativo al boreliano \mathcal{A} .* \square

Sin embargo, debido a que $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ es trivial en $X - \mathcal{A}$, la medida μ no es ergódica. Ahora bien, como nuestro interés reside en los clústeres infinitos, podemos restringir la medida al boreliano formado por las órbitas infinitas de $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$:

Definición 3.71 Sea $\mathcal{A}_{\infty} = \{x \in X \mid C_{\mathcal{A}}(x) \text{ infinito}\}$ el boreliano formado por las $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$ -órbitas infinitas. Si $\mu(\mathcal{A}_{\infty}) > 0$, se define la medida de probabilidad $\tilde{\mu}_{\mathcal{A}}$ sobre X como

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{A}}(B) = \frac{\mu(B \cap \mathcal{A}_{\infty})}{\mu(\mathcal{A}_{\infty})}$$

para cualquier boreliano $B \subset X$.

Proposición 3.72 *Si $\mu(\mathcal{A}_{\infty}) > 0$, entonces la medida $\tilde{\mu}_{\mathcal{A}}$ sobre X es invariante respecto del pseudogrupo clúster $\Gamma_{\mathcal{A}}^{cl}$.* \square

Con esta reformulación de la percolación relativa podemos recuperar fácilmente la percolación de Bernoulli clásica para vértices:

Ejemplo 3.73 Sea G un grupo finitamente generado, S un sistema finito de generadores y $\mathcal{G} = (V, E)$ su grafo de Cayley. Si llamamos X al espacio de coloreados $\Omega = \{0, 1\}^V$ sobre el conjunto de vértices y μ a la medida de percolación de Bernoulli P_p con $p \in [0, 1]$, el proceso de percolación relativa se reduce a la percolación de Bernoulli clásica de vértices con parámetro p . En efecto, basta considerar el boreliano

$$\mathcal{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(1) = 1\}$$

de medida $\mu(\mathcal{A}) = P_p(\mathcal{A}) = p$ y hacer percolación relativa a \mathcal{A} . Las relaciones \mathcal{R}^t y $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ se corresponden con la relación total y la relación clúster descritas en los apartados 3.2.1 y 3.2.2.

3.4.4. Espacio de finales y percolación relativa

En la percolación de Bernoulli clásica sobre grafos de Cayley, los clústeres son finitos, hay un único clúster infinito o existe una infinidad de clústeres infinitos. Es natural preguntarse si sucede lo mismo en la percolación relativa. La respuesta es afirmativa cuando el grafo de Cayley \mathcal{G} del grupo G es un árbol o cuando G tiene más de un final y el boreliano considerado tiene medida pequeña.

Sea G un grupo finitamente generado, S un sistema de generadores finito y \mathcal{G} su grafo de Cayley. Consideremos una acción $\varphi : G \times X \rightarrow X$ de G sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida de probabilidad μ invariante y ergódica, que supondremos esencialmente libre. Supongamos que G tiene más de un final. Aplicando la demostración de la versión discreta del lema de la hipersuperficie de E. Ghys descrita por F. Paulin en [58] (véase el lema 1.39), se deduce que existe un grafo finito B (cuyas aristas están etiquetadas con generadores de S) tal que, para casi todo $x \in X$, la órbita $\mathcal{G}.x$ admite una realización de B como subgrafo finito $B.x$ que desconecta a $\mathcal{G}.x$ en al menos dos componentes conexas infinitas. Esta vez no imponemos la condición de que $B.x$ y $B.y$ sean disjuntos para dos puntos x e y de la misma órbita. Por ello, B es realizable en cualquier punto de X debido a la homogeneidad de las órbitas propia de los grafos de Cayley.

Para probar los resultados anunciados al comienzo del apartado, será fundamental usar el lema que presentamos a continuación, que nos dice que si cada órbita contiene un número finito de clústeres infinitos, entonces éstos aproximan los finales de la órbita.

Lema fundamental 3.74 *En las condiciones anteriores, sea $\mathcal{A} \subset X$ un conjunto boreliano de medida $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$. Supongamos que G tiene más de un final. Si el número de clústeres infinitos $N(\mathcal{A})$ es finito, entonces, para μ -casi todo $x \in X$, cada clúster infinito aproxima todos los finales de la órbita $\mathcal{G}.x$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset X$ un boreliano con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$ tal que el número de clústeres infinitos $N(\mathcal{A})$ es constante y finito igual a k . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación

$$N_n : X \rightarrow \mathbb{N}$$

que asigna a cada $x \in X$ el número de componentes conexas de $\mathcal{G}.x \cap \mathcal{A}$ que intersecan simultáneamente el grafo $B.x$ y el borde de la bola $B(x, n)$ centrada en x de radio n . Puesto que el número de configuraciones posibles es finito, la aplicación N_n es boreliana para cada $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, la aplicación $N_B : X \rightarrow \mathbb{N}$ que asigna a cada $x \in X$ el número de clústeres infinitos que intersecan $B.x$ es también boreliana ya que

$$N_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(x).$$

Con esta notación, se tiene que

$$X = \bigsqcup_{i=0}^k \{x \in X \mid N_B(x) = i\} = \bigsqcup_{i=0}^k X_i$$

y

$$\mu(X) = \sum_{i=0}^k \mu(X_i) = 1.$$

De hecho, existe un único $0 \leq i \leq k$ tal que $\mu(X_i) > 0$ y por tanto $\mu(X_i) = 1$. En efecto, si suponemos que existen dos enteros $i, j \in \{0, \dots, k\}$ con $i < j$ tales que $\mu(X_i) > 0$ y $\mu(X_j) > 0$, por la proposición fundamental de E. Ghys de [29], los borelianos X_i y X_j aproximan todos los finales de casi toda órbita. Fijado $x_0 \in X_i$, cada una de las componentes no acotadas $C_0^0, \dots, C_0^{n_0}$ de $\mathcal{G}.x_0 - B.x_0$ contiene un clúster infinito puesto que interseca a X_j y $j > i$. Aplicando el mismo razonamiento en cada componente C_0^k , existe otro punto $x_k \in X_i \cap C_0^k$ tal que cada una de las componentes no acotadas $C_k^0, \dots, C_k^{n_k}$ de $C_0^k - B.x_k$ contiene un clúster infinito. Reiterando el proceso, deducimos que hay una cantidad infinita de clústeres infinitos por órbita, lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Además, puesto que hay un único $0 \leq i \leq k$ tal que $\mu(X_i) = 1$, entonces $i = k$ necesariamente. Por lo tanto, $N_B(x) = k$ para casi todo $x \in X$, de donde se deduce que cada uno de los k clústeres infinitos aproximan los finales de casi toda órbita. \square

El teorema siguiente es consecuencia directa del lema anterior. Probamos a continuación que si el número de clústeres infinitos resultantes de la percolación relativa a un boreliano es finito, entonces está acotado por una constante que no depende del boreliano considerado:

Teorema 3.75 *En las condiciones anteriores, supongamos que G tiene más de 1 final. Entonces la aplicación $N : \mathcal{A} \subset X \mapsto N(\mathcal{A}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ está uniformemente acotada en el complementario del conjunto de borelianos $N^{-1}(\infty)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset X$ un boreliano tal que $N(\mathcal{A}) = k < \infty$. Entonces, por el lema fundamental 3.74, cada uno de los k clústeres infinitos de cada órbita $\mathcal{G}.x$ aproxima todos los finales para casi todo $x \in X$. Vimos en la demostración del lema

fundamental que existe un grafo finito B realizable en la órbita de casi todo punto $x \in X$ como un subgrafo finito $B.x$ que desconecta $\mathcal{G}.x$ en al menos 2 componentes conexas no acotadas. Luego cada uno de los k clústeres infinitos de la órbita $\mathcal{G}.x$ interseca al grafo $B.x$. De manera que $N(\mathcal{A}) < K$ para $K = \#B$. \square

Ejemplo 3.76 Si G es un grupo finitamente generado con 2 finales, entonces podemos calcular explícitamente la cota K . Recordemos que existe un subgrupo finito normal N tal que G/N es isomorfo a \mathbb{Z} o $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Luego basta tomar como cota $K = \#N$.

Proposición 3.77 *Sea G un grupo con 2 finales. Entonces el número de clústeres infinitos $N(\mathcal{A})$ es finito para todo boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$.*

Demostración. Sea \mathcal{A} un boreliano de X tal que $N(\mathcal{A}) = \infty$. Entonces hay una infinidad de clústeres aproximando un final de cada órbita. Siguiendo el mismo argumento de la demostración del teorema anterior, una infinidad de clústeres infinitos intersecarán el grafo $B.x$ para todo $x \in X$. Luego $N(\mathcal{A}) < \#B < \infty$. \square

Arboledas. Cuando X es una arboleda, es decir, cuando μ -casi toda órbita es un árbol, obtenemos el resultado análogo a la percolación de Bernoulli clásica sobre árboles.

Proposición 3.78 *Supongamos que G es un grupo libre. Entonces todos los clústeres son finitos, o bien existe una infinidad de clústeres infinitos, para cualquier boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$.*

Demostración. Supongamos que el grafo de Cayley \mathcal{G} es un árbol. Entonces \mathcal{G} se trata del grafo de Cayley de \mathbb{Z} con $S = \{\pm 1\}$ o de un árbol regular con un Cantor de finales. En el primer caso, es evidente que $N(\mathcal{A}) = 0$. En efecto, si casi toda órbita es isomorfa a \mathbb{Z} , el número de clústeres infinitos es finito. Puesto que aproximan los dos finales, $N(\mathcal{A}) = 0$ ó 1 por el lema fundamental 3.74. Si hubiera un clúster infinito, coincidiría con la propia órbita y $\mu(\mathcal{A}) = 1$. Luego, $N(\mathcal{A}) = 0$ para cualquier boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$.

Veamos ahora el caso en que μ -casi toda órbita es un árbol con un Cantor de finales. Supongamos que existe un boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$ tal que $N(\mathcal{A}) = k < \infty$ con $k \neq 0$. Entonces, cada uno de los k clústeres infinitos de casi toda órbita aproxima todos los finales por el lema fundamental. Puesto que se trata de árboles, la única posibilidad es que $N(\mathcal{A}) = 1$ y que éste coincida con la propia órbita. En ese caso, $\mu(\mathcal{A}) = 1$, en contra de nuestra hipótesis. \square

Productos libres. Si el grupo G es un producto libre de dos grupos finitamente generados, entonces sucede lo mismo que en el caso de grupos libres estudiado en el apartado anterior:

Proposición 3.79 *Si G es un producto libre de grupos finitamente generados, entonces todos los clústeres son finitos, o bien existe una infinidad de clústeres infinitos, para cualquier boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$.* \square

Demostración. El argumento de la prueba es exactamente el mismo que el usado en la demostración de la proposición 3.78. En efecto, las órbitas genéricas de la acción son isomorfas al grafo de Cayley de G , luego todo punto $x \in X$ desconecta a su órbita en al menos dos componentes no acotadas. Si suponemos que el número de clústeres infinitos $N(\mathcal{A})$ es finito distinto de 0, cada clúster debe aproximar todos los finales de la órbita que lo contiene (por el lema fundamental) y por tanto intersectar todos los puntos de la órbita. Luego existe un único clúster por órbita que además coincide con la propia órbita, de manera que $\mu(\mathcal{A}) = 1$, lo que contradice nuestras hipótesis. \square

3.4.5. Borelianos de medida pequeña

Cuando el grupo considerado tiene más de un final y el boreliano percolado es de medida suficientemente pequeña, podemos probar que los clústeres son finitos, hay un único clúster infinito, o hay una infinidad de clústeres infinitos por órbita.

Sea G un grupo finitamente generado, S un sistema de generadores finito y \mathcal{G} su grafo de Cayley. Consideremos una acción $\varphi : G \times X \rightarrow X$ de G sobre un espacio boreliano estándar X , dotado de una medida de probabilidad μ invariante y ergódica, que supondremos esencialmente libre.

Teorema 3.80 *En las condiciones anteriores, supongamos que G es un grupo con más de un final. Entonces existe una constante $C \geq 0$ tal que todos los clústeres son finitos, o bien hay una infinidad de clústeres, para cualquier boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < C$. En particular, si G tiene 2 finales, entonces todos los clústeres son finitos.*

Demostración. Si aplicamos la versión discreta del lema de la hipersuperficie a la acción del grupo (G, S) sobre (X, μ) , sabemos que existe un grafo finito B y un boreliano $X_B \subset X$ de medida $\mu(X_B) = C > 0$ tal que B es realizable como subgrafo finito $B.x$ de $\mathcal{G}.x$ que desconecta a la órbita en al menos 2 componentes

conexas no acotadas para cada punto $x \in X_B$. Esta vez nos interesa tomar X_B de manera que $B.x$ y $B.y$ sean disjuntos para todo par de puntos $x, y \in X_B$. Puesto que $\mu(X_B) = C > 0$, por la proposición fundamental de E. Ghys, el boreliano X_B aproxima todos los finales de casi toda órbita debido a la invarianza y ergodicidad de la medida μ .

Sea \mathcal{A} un boreliano de X con $0 < \mu(\mathcal{A}) < C$. Supongamos que $N(\mathcal{A}) = k < \infty$ con $k \neq 0$. Entonces los k clústeres infinitos de casi toda órbita aproximan todos los finales por el lema 3.74. Luego atraviesan los grafos $B.x$ con $x \in X_B$. Puesto que μ es invariante, se deduce que $\mu(\mathcal{A}) \geq \mu(X_B) = C$. Obtenemos así el resultado deseado. En efecto, si $\mu(\mathcal{A}) < C$ entonces $N(\mathcal{A}) \in \{0, \infty\}$. En particular, cuando G tiene 2 finales, se tiene $N(\mathcal{A}) = 0$ por la proposición 3.77. \square

Ejemplo 3.81 Si G es un grupo finitamente generado con 2 finales, entonces podemos dar explícitamente la cota C . Si N es el subgrupo finito normal tal que G/N es isomorfo a un grupo cíclico infinito o a $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, entonces basta tomar $C = \frac{1}{\#N}$.

Hemos visto que en el caso de grupos con más de un final, el número de clústeres infinitos de la percolación relativa es 0, 1 ó ∞ para borelianos de medida pequeña. Lo mismo sucede con las arboledas. Planteamos por tanto la cuestión que surge de modo natural y que, de momento, permanece abierta:

Cuestión 3.82 ¿El número de clústeres infinitos $N(\mathcal{A})$ es 0, 1 ó ∞ para cualquier boreliano $A \subset X$?

3.4.6. Propiedades de los clústeres

Cuando la medida $\tilde{\mu}_{\mathcal{A}}$ es ergódica, los clústeres infinitos de la percolación relativa a \mathcal{A} son indistinguibles como en el caso de la percolación de Bernoulli. No obstante, el ejemplo 3.64 muestra que la medida $\tilde{\mu}_{\mathcal{A}}$ puede no ser ergódica:

Ejemplo 3.83 Si consideramos el ejemplo 3.64, la bola B_ε centrada en un punto fijo x_1 de la rotación π_1 puede dividirse en dos borelianos disjuntos de medida positiva B_1 y B_2 saturados respecto de $\mathcal{R}_{B_\varepsilon}^{cl}$. Basta tomar $B_1 = B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B_2 = B_\varepsilon - B_1$. Este ejemplo muestra además que, aunque el grupo tenga un Cantor de finales y crecimiento exponencial, los clústeres de la percolación relativa a un boreliano pueden tener crecimiento subexponencial y finales aislados. Basta tomar ε suficientemente pequeño de manera que $\pi_2^{\pm 1}(x) \notin B_\varepsilon$ para todo $x \in B_\varepsilon$. Bajo esta restricción, los clústeres que se obtienen son rectas infinitas formadas por las sucesiones $\{\pi_1^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Ahora bien, las propiedades genéricas de los pseudogrupos medibles nos permiten obtener información de los clústeres infinitos. En efecto, aplicando de nuevo la versión discreta del teorema de E. Ghys sobre los finales de un pseudogrupo descrita por F. Paulin en [58] (véase el teorema 1.37), tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.84 *Los clústeres infinitos resultantes de la percolación relativa a un boreliano $\mathcal{A} \subset X$ con $0 < \mu(\mathcal{A}) < 1$ tienen 1, 2 o un Cantor de finales.* \square

Corolario 3.85 *Si G es promediable, entonces los clústeres infinitos de μ -casi toda órbita tienen 1 o 2 finales.*

Demostración. Si suponemos que hay un conjunto de medida positiva de órbitas que contienen clústeres infinitos con un Cantor de finales, entonces la relación clúster $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ es no promediable, usando de nuevo el corolario IV.24 de [26]. Pero entonces la relación total $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^t$ tampoco es promediable, lo que implica que G no es promediable según la proposición 1.50. \square

Abstract

The concept of *pseudogroup* generalizes the concept of group. This notion appears naturally in the study of symmetries of physical and mathematical objects. Our interest in pseudogroups is motivated by the concept of *holonomy pseudogroup* introduced by A. Haefliger in [38], which is a discretization of the notion of *lamination*. A *measurable pseudogroup* acting on a probability space generalizes measurable actions of a group. Recall that the action of a countable group G on a probability space (X, μ) is *measurable* if each element g of G determines a measurable isomorphism $\tau_g : x \in X \mapsto g.x \in X$. The transformation τ_g is *nonsingular* if it preserves null sets. A pseudogroup of measurable transformations acting on (X, μ) is a family of measurable isomorphisms $\gamma : A \subset X \rightarrow B \subset X$ between measurable sets of X which is closed respect to composition, inversion, restriction and combination of its elements. As in the case of groups, we suppose that transformations are nonsingular, that is, the measure μ is quasi-invariant. If Γ is finitely generated, we can endow X with a graph structure in a similar way as the construction of the Cayley graph of a finitely generated group. Its connected components are the orbits of the pseudogroup endowed with the corresponding graph structure. The aim of the thesis is to extend the concept of *branching number* and *Bernoulli percolation process* on graphs to the context of graphed pseudogroups.

The *branching number* of a rooted tree was introduced by R. Lyons [52]. This notion represents the average number of branches per vertex. We extend this concept to any finitely generated measurable pseudogroup acting on a probability space. We prove that if the branching number is equal to 1 then the pseudogroup is amenable. In fact, when the measure is harmonic, the pseudogroup is Liouville. The branching number of a tree is strongly related with *Bernoulli percolation process*, which involves removing edges at random on the tree and whose goal is to study the nature of the resulting clusters. We define a Bernoulli percolation process on finitely generated measurable pseudogroups acting on a probability space. We remove edges at random on the orbits and we study the properties of the resulting connected components. We define the *lower* and the *upper critical percolation* that divide the process in three

different phases. When the measure is ergodic, there is a unique *critical percolation* and the phases obtained are analogous to the classical ones. We study the influence of the number of ends of the orbits on the critical percolation.

Generally, the orbits have not the homogeneity of the Cayley graphs. So calculations are more difficult and many classical tools are not valid. However, when the measure is harmonic, E. Ghys [29] has proved that the orbits are in a certain sense 'quasi-periodic', which makes it possible to obtain some interesting results depending on the number of ends of the orbits. We compare our results with the classical ones about branching number and percolation on graphs.

Finally, we define the *relative percolation process* on group actions on a probability space. The aim is to study the intersection of the graphed orbits of the action with a Borel set depending on its measure. This new process involves keeping the edges whose endpoints belong to a Borel set and removing the others. We use again the number of ends in order to achieve information about the resulting clusters.

Conclusions

Branching number. The notion of *branching number* was introduced by R. Lyons [52] in the 90's. Intuitively, the branching number $br(T)$ of a rooted tree T gives the average number of children per vertex. We call children the neighbouring vertices which are further from the root. The concept of branching number can be extended to arbitrary graphs. Let $\mathcal{G} = (V, E)$ be an infinite rooted graph on 0 with vertex-set V and edge-set E . A *cutset* is a subset of edges $\Pi \subset E$ which disconnects the root from infinite, that is, if we remove Π the connected component of the root is finite. The definition of the branching number of the graph \mathcal{G} is given by

$$br(\mathcal{G}) = \inf \{ \lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0 \}.$$

This number depends on the metric, so it is interesting to know if it is invariant by quasi-isometry (in the sense of M. Gromov [35]). The answer is negative. The binary tree and the Fibonacci tree are quasi-isometric, but their branching numbers are different. However, we control in a certain sense the branching numbers of two quasi-isometric graphs \mathcal{G} and \mathcal{G}' ; in fact, we prove in theorem 2.17 of the subsection §2.1.3 that there exists a constant C such that:

$$br(\mathcal{G})^{\frac{1}{C}} \leq br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})^C.$$

Note that, as well as the property *to have subexponential growth*, the property *to have branching number equal to 1* is invariant by quasi-isometry. On the other hand, the branching number $br(\mathcal{G})$ is related with the growth rate

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$$

as following:

$$br(\mathcal{G}) \leq gr(\mathcal{G})$$

where $s(n)$ is the number of elements at distance n from the root. In the case of Cayley graphs, there is the identity between both quantities. So the interest of the branching number is greater in the context of graphs that are not Cayley graphs.

The goal of the first part of this memory is to extend the notion of branching number to the context of finitely generated pseudogroups. We define it as the mean of the branching numbers on the generic orbits. The interest of this new invariant is motivated by the results of C. Series [63] and V. Kaimanovich [45] where they prove that equivalence relations with polynomial growth (respectively subexponential growth) are amenable. The original idea of this memory was to find an amenability criterion to pseudogroups in terms of branching number, since this invariant is not always equal to the growth rate. The obtained results have been published in collaboration with F. Alcalde in [3].

Let (Γ, Σ) be a finitely generated pseudogroup acting on a probability space (X, μ) . We define the *branching map* $br_\Sigma : X \rightarrow [1, +\infty]$ that assigns to each point of X the branching number of its orbit. On the proposition 2.27 we prove that it is a measurable map, then we can give the following definition:

Definition 1. The *branching number* of the pseudogroup (Γ, Σ) respect to μ is defined by:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int br_\Sigma(x) d\mu(x).$$

When the measure μ is ergodic, we deduce that the branching number of the pseudogroup coincides with the branching number of μ -almost every orbit. The definition of branching number depends on the finite generating system and it is natural to wonder what happens when we change Σ by another finite system Σ' . The pseudogroups (Γ, Σ) and (Γ, Σ') are equivalent in the sense of Kakutani, so we study in §2.2.4 how this equivalence affects to the branching number. We obtain that the property *to have branching number equal to 1* is invariant (see proposition 2.37).

As seen previously, the original goal was to relate amenability with branching number. Recall that a pseudogroup Γ acting on a probability space (X, μ) is *amenable* respect to the measure μ if there exists a measurable system of means $m = \{m_x\}_{x \in X}$ on the generic orbits that is invariant, that is to say, $m_x = m_y$ if x and y belong to the same orbit. Note that the pseudogroup is amenable if and only if the equivalence relation \mathcal{R} defined by the action of Γ on X is amenable. In other terms, we obtain the following amenability criterion (see theorem 2.40 proved in subsection §2.3.1):

Theorem 1. *If the branching number $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ then the pseudogroup is μ -amenable.*

We prove that any pseudogroup with branching number equal to 1 verifies the *weak Reiter's condition* (introduced by C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault in

[5]), which is equivalent to say that the pseudogroup is amenable. We construct explicitly a system of asymptotically invariant probability measures on the orbits verifying the previous condition.

When the measure is harmonic we obtain a stronger result relating the branching number and the Liouville property. In [58] F. Paulin introduces a discrete version of the notions of random walk, heat operator and Laplace operator of foliation theory to equivalence relation theory. Recall that a random walk in a graphed pseudogrup (Γ, Σ) acting on a probability space (X, μ) involves choosing at random a point of X and moving randomly through the edges of its orbit. When the probability to walk from a vertex to any of its neighbours is equal, we are talking about the *simple random walk*. Let E be the edge-set of the graph X and let $\pi : E \rightarrow [0, 1]$ be the measurable map which gives the transition probability from a vertex to every neighbour. The *heat diffusion operator* D_π on the orbits of the pseudogroup and the corresponding *Laplace operator* Δ_π are defined and we call *harmonic function* to any function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\Delta_\pi(f) = 0$ in almost every point. The measure μ on X is *harmonic* respect to π if it is preserved by heat diffusion.

Recall that a function in \mathbb{R}^n is harmonic if verifies Laplace equation, that is, the value in each point is the mean value of the function on the ball centered on such point. The classical Liouville theorem asserts that there do not exists non-constant bounded harmonic functions on \mathbb{R}^n . The discrete version of this property in the context of graphs is the following: a graph verifies the *Liouville property* with respect to a random walk if the bounded harmonic functions on the graph are constant. Similarly, a graphed pseudogroup (Γ, Σ) verifies the *Liouville property* respect to a random walk π if almost every orbit verifies this property, that is, the bounded harmonic functions on $\Gamma(x)$ are constant for almost every $x \in X$. When the measure is harmonic, the diffusion operator is regular, that is, there exist notions of *entropy* $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$ and *speed* $\mathfrak{l}(\Gamma(x))$ on the orbits, well defined and related as follows:

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)) \leq \log(\underline{Gr}_\Sigma(\Gamma(x))) \mathfrak{l}(\Gamma(x))$$

as V. Kaimanovich and W. Woes prove in [49], where $\underline{Gr}_\Sigma(\Gamma(x))$ is the growth rate on the balls of the orbit. The condition $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ implies that $\mathfrak{l}(\Gamma(x)) = 0$, then $\mathfrak{h}(\Gamma(x)) = 0$ for μ -almost every point $x \in X$. So, we obtain a new criterion depending on the branching number (see theorem 2.46 in §2.3.2):

Theorem 2. *If the measure μ is harmonic respect to the simple random walk, then $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ implies that the pseudogroup (Γ, Σ) verifies the Liouville property.*

We illustrate our definition with several examples. The first example is an essentially free action of the *lamplighter group* G_1 on the polynomial ring $\mathbb{Z}_2[[t]]$, which

shows that the reciprocal of Theorem 1 is not true. Indeed, lamplighter group is amenable respect to any invariant measure, but its branching number (respect to a concrete generating system) is the *gold number* $\Phi > 1$.

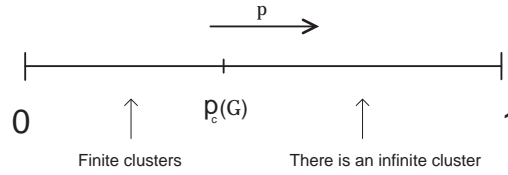
In the second example, we construct a Riemann surface lamination, minimal (i.e. leaves are dense) and without holonomy (i.e. the elements of holonomy pseudogroup have not fixed points). We consider Gromov-Hausdorff space of free group with three generators \mathbb{F}^3 , that is, the set of rooted subtrees of the Cayley graph \mathcal{F}^3 endowed with Gromov-Hausdorff topology where two trees are close if they coincide in a big ball. Using the grafting process of E. Blanc described in [12], we construct an aperiodic repetitive subtree of \mathcal{F}^3 whose closure in the Gromov-Hausdorff space is endowed with a natural equivalence relation whose classes are indistinguishable trees isomorphic to the original subtree. Using a process described by E. Ghys in [30] (see also [2]), the closure of the subtree can be realized as complete transversal of a minimal without-holonomy Riemann surface lamination \mathcal{L}_∞ . We construct an invariant transverse measure such that generic leaves of \mathcal{L}_∞ have one end and exponential growth. The first condition guarantees that the branching number of generic orbits of the holonomy pseudogroup is equal to 1. Consequently, the lamination is Liouville. This example shows that the amenability criterion given by Theorem 2 generalizes the results of C. Series and V. Kaimanovich.

Finally, if we consider a supercritical Galton-Watson process (i.e. with offspring $m > 1$), it is not difficult to prove that its branching number is equal to m . Note that the equivalence relation is defined by a pseudogroup that is not finitely generated.

Bernoulli percolation. Percolation theory was introduced in the 50's to model many random physical processes as filtration of a fluid on a porous material, expansion of an epidemic or propagation of a fire. Suppose we immerse a big porous stone in fluid. It is interesting to study if the fluid will flow up to the center of the stone or not. Percolation theory proves that the probability of that happening does not grow gradually when we variate the porosity degree. Indeed, the probability is null until a critical value and from this point, the probability is total.

Percolation theory studies the properties of the connected components (*clusters*) of random subtrees of an infinite graph. We are interested in *Bernoulli percolation process* on an infinite graph, where each edge remains with probability p and disappears with probability $1 - p$ (see [34],[52],[54]). Obviously, the probability that there is an infinite cluster in the random subgraph obtained by percolation is monotonically increasing with respect to the parameter $p \in [0, 1]$. In fact, for each parameter p this probability is equal to 0 or 1 by Kolmogorov's 0-1 law. So there exists a critical value $p_c \in [0, 1]$ which divides the process in two phases, the *subcritical phase* $p < p_c$

where clusters are finite (with probability 1), and the *supercritical phase* $p > p_c$ where there is at least an infinite cluster (with probability 1):



In mathematical terms, given a graph \mathcal{G} with edge-set E and a parameter $p \in [0, 1]$, the p -Bernoulli percolation process is given by the colouring space $\Omega = \{0, 1\}^E$ on E endowed with the σ -algebra generated by the cylinders and the Bernoulli measure P_p obtained as a product of Bernoulli measures on $\{0, 1\}$ that assigns weights p and $1 - p$ to 1 and 0 respectively. Each colouring $\omega \in \Omega$ defines a graph \mathcal{G}_ω of \mathcal{G} whose edges are the edges coloured by 1. The connected components of \mathcal{G}_ω are called *clusters* and for each vertex v of \mathcal{G} , the cluster which contains it is denoted by $C_\omega(v)$.

Definition 2. The *critical percolation* of \mathcal{G} is defined by

$$p_c(\mathcal{G}) = \inf\{ p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ infinite}] = 1 \}.$$

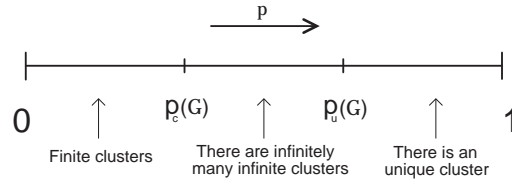
Generally, the calculation of p_c is difficult; in fact, its value for the Cayley graphs of \mathbb{Z}^n with $n > 2$ is unknown. In the case of trees, the critical probability p_c coincides with the inverse of the branching number (see [52]). Also, in this context the binary tree and the Fibonacci tree are an example of quasi-isometric graphs whose critical percolation do not coincide. However, once again, the property *to have critical percolation equal to 1* is invariant by quasi-isometry.

When the graph \mathcal{G} is the Cayley graph of a finitely generated group G , it can be said more about the Bernoulli percolation process. The action by translations of G on \mathcal{G} can be extended naturally to an action on the colouring space Ω given by $g\omega(e) = \omega(g^{-1}(e))$. This action is invariant and ergodic respect to the measure P_p . Using the ergodicity of P_p , C.M. Newman and L.S. Schulman prove in [56] that for each $p \in (0, 1)$ the number of infinite clusters is constant equal to 0, 1 or ∞ . Therefore, O. Häggström, Y. Peres, R.H. Schonmann prove in [42] that there exists a new critical value p_u such that in the phase $p_u < p$, called *uniqueness phase*, there exists an unique infinite cluster (with probability 1):

Definition 3. The critical value is defined by

$$p_u(\mathcal{G}) = \inf\{ p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinite}] = 1 \}.$$

When $p_c \neq p_u$, there exists an intermediate phase called *non-uniqueness phase* $p_c < p < p_u$ where there are infinitely many infinite clusters (with probability 1):



Sometimes the non-uniqueness phase is empty. It is the case of Cayley graphs of amenable groups, which verifies $p_c = p_u$, by an result of R.M. Burton and M. Keane [15]. In the memory, we compile some results which show the relation of the values p_c and p_u with geometric properties as the number of ends, the exponential growth or quasi-isometry. In section §3.2 we recall the formulation of the Bernoulli percolation process on Cayley graphs described by D. Gaboriau in [27] using measurable equivalence relation language. With this formulation we can recuperate some classical results presented in previous section using techniques from foliation theory. Gaboriau constructs an equivalence relation \mathcal{R}^{cl} on Ω whose generic orbits respect to the invariant measure P_p can be identified with the clusters of percolation process on a Cayley graph. Therefore, the restriction of the measure P_p to the set of infinite orbits is ergodic by the Indistinguishability Theorem of [55]. This guarantees that the clusters have the same measurable properties: growth, number of ends, branching number. Note that the main tools in the percolation study on Cayley graphs are the existence of the group action on the colouring space and the fact that the measure P_p is invariant and ergodic.

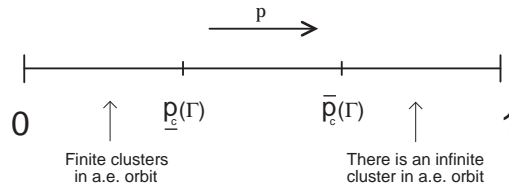
The goal of the second part of the memory is to extend Bernoulli percolation process to the context of graphed pseudogroups. For that, we make Bernoulli percolation of parameter $p \in [0, 1]$ on the edges of each orbit of the pseudogroup. Now, the aim is to study the properties of the clusters on the generic orbits. Once again, the classical tools are not valid because the orbits have not the homogeneity of the Cayley graphs. However, in section §3.3 we prove that the critical percolation varies on a measurable way on the orbits and we define critical values which divide Bernoulli percolation process in different phases.

If (Γ, Σ) is a finitely generated graphed pseudogroup acting on a probability space (X, μ) , we define the percolation map $p_c : X \rightarrow [0, 1]$ which assigns to each point of X the critical percolation of its orbit. We prove in proposition 3.43 that it is a measurable map and in the ergodic case it is constant.

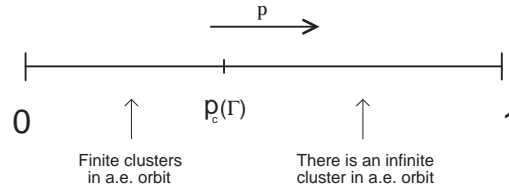
Definition 4. The *lower critical percolation* and the *upper critical percolation* of the pseudogroup (Γ, Σ) is defined by

$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \inf \text{ess } \{p_c\}, \quad \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \sup \text{ess } \{p_c\}.$$

There exists a finiteness phase $p < \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ where the clusters of the generic orbits are finite. In the phase $p > \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ there exists at least an infinite cluster in the generic orbits. In the intermediate case $\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$, we obtain a mixed phase.



If the measure μ is ergodic, then generic orbits have the same critical percolation. So there exists a critical value $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ called critical percolation of the graphed pseudogroup which divides the process in two phases: the subcritical phase $p < p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ where the clusters of almost every orbit are finite and the supercritical phase $p > p_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ where almost every orbit has an infinite cluster.



In section §3.3.3 we are interested by the influence of Kakutani equivalence on percolation. We obtain that the property *to have critical percolation equal to 1* is invariant (see proposition 3.53).

The study of the number of infinite clusters and their properties in pseudogroups percolation is more difficult than in the classical case. However, when the measure is harmonic and ergodic, we have some tools that are fundamental in the third chapter of the memory. This tools are the discrete version described by F.Paulin in [58] of the results of E. Ghys compiled in [29]:

- The *Ends Theorem* that says that the number of ends of the generic orbits is constant equal to 0, 1, 2 or a Cantor set.

- The *Fundamental Proposition* that says that any Borel set of positive measure intersects almost every orbit approaching every end of the orbit.
- The *Hypersurface lemma* that says that if the orbits of the pseudogroup have more than one end, then there exists a finite graph \mathcal{G} such that almost every orbit contains an infinite quantity of copies of \mathcal{G} approaching every end, and if we remove any of them, the orbit will be disconnected in at least two non-bounded connected components.

Recall that the first result can be proved from the other ones (see [11]). We can obtain information about the number of infinite clusters of the pseudogroup whose orbits have more than one end. For that, we combine the previous results with the following lemma (proved in §3.3.3):

Fundamental Lemma 1. *Let \mathfrak{G} be an infinite connected graph containing an infinite countable quantity of subgraphs $\{\mathcal{G}_n\}$ isomorphic to a finite graph \mathcal{G} disjoint from each other. Then, an infinite quantity of graphs \mathcal{G}_n will be removed when we make p -Bernoulli percolation on \mathfrak{G} (with probability 1).*

Then, we obtain two theorems that show the analogy with the classical results on Cayley graphs, that is, $p_c = 1$ if the graph has 2 ends and $p_u = 1$ if it has an infinite quantity of ends (the proof can be seen in [54]). Indeed, the first result (see theorem 3.55 in §3.3.4) says that if the orbits of the pseudogroup have 2 ends, then the clusters are finite for any $p < 1$:

Theorem 3. *If the measure μ is harmonic and ergodic and μ -almost every orbit has 2 ends, then*

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1.$$

The second result (see theorem 3.56 in §3.3.5) says that if the orbits of the pseudogroup have a Cantor set of ends, then there are infinitely many infinite clusters in the supercritical phase:

Theorem 4. *If the measure μ is harmonic and ergodic and μ -almost every orbit has a Cantor set of ends, then there are infinitely many infinite clusters in μ -almost every orbit for $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < 1$.*

Finally, we illustrate Bernoulli percolation process in graphed pseudogroups with several examples (see §3.3.6). In the first example we consider the Liouville lamination \mathcal{L}_∞ defined in the first part of the memory. Although the orbits have exponential growth, we can prove that their critical percolation is equal to 1. Then the clusters

are finite for $p < 1$. This example is interesting because it shows that exponential growth does not imply $p_c < 1$.

In the second example, we consider the action of the lamplighter group G_1 on the polynomial ring $\mathbb{Z}_2[[t]]$. Its critical percolation verifies $p_c < \frac{1}{\Phi}$ where Φ is the golden number. Therefore, for $p > p_c$ there exists an unique infinite cluster in the generic orbits of the action because they are isomorphic to the Cayley graph of G_1 , which verifies $p_c = p_u$ because of amenability. It is natural to wonder if the supercritical phase is an uniqueness phase when the pseudogroup is amenable, as in the previous example. The answer is negative when the measure is not invariant. Indeed, the action of the free group \mathbb{F}^2 with two generators on its end space $\partial\mathbb{F}^2$ (respect to a equidistributed probability measure μ described in example 1.51), is amenable. However, the generic orbits have critical percolation $p_c = \frac{1}{3}$ and they contain infinitely many infinite clusters in the supercritical phase $p > p_c$.

Could be expected that the result was true when generic orbits are Følner. Although the generic orbits of the supercritical Galton-Watson process (with critical percolation $p_c = \frac{1}{m}$) are Følner respect to an invariant measure, they have infinitely many infinite clusters for $p > p_c$. So the open question is if there is uniqueness of infinite clusters in the supercritical phase for an amenable pseudogroup respect to an invariant measure.

Relative Percolation. Finally, in §3.4, we introduce a new process of percolation which is natural in groups and pseudogroups dynamic. This percolation involves intersecting the orbits of the measurable action of a finitely generated group G on a probability space (X, μ) with a Borel set $\mathcal{A} \subset X$ of measure $\mu(\mathcal{A}) = p$. We suppose the action essentially free, invariant and ergodic respect to the measure μ . The *percolation relative to the Borel set \mathcal{A}* involves keeping the edges whose endpoints are in \mathcal{A} and removing the others in its orbit $G.x$. We call *clusters* to the resulting connected components. Our goal is to study the clusters depending on the measure p . If $p = 0$, the clusters are the points. If $p = 1$, then almost every orbit has an unique infinite cluster that coincides with the orbit. So we are interested in Borel sets of measure $0 < \mu(\mathcal{A}) = p < 1$.

Classical p -Bernoulli percolation (of vertices) for Cayley graphs is an example of relative percolation. Indeed, we can formulate the new process in terms of equivalence relations and identify the clusters with the orbits of an equivalence relation $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ called *cluster relation relative to \mathcal{A}* . In these terms, if X is the colouring space $\Omega = \{0, 1\}^V$, μ is the Bernoulli measure P_p and \mathcal{A} is the Borel set $\{\omega \in \Omega \mid \omega(1) = 1\}$, the relation $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{cl}$ coincides with the usual cluster relation \mathcal{R}^{cl} and the measure $\mu(\mathcal{A}) = p$.

By analogy with classical percolation, it could be expected that the clusters were finite for Borel sets of small measure. The example 3.64 shows that this is not true.

We consider two rotations π_1 and π_2 of irrational angle on the sphere \mathbb{S}^2 such that the orbits are dense and isomorphic to the Cayley graph of the free group \mathbb{F}^2 . For each $\varepsilon > 0$, the ball B_ε centered in a fix-point x_1 of π_1 of volume $\text{vol}(B_\varepsilon) < \varepsilon$ cuts any orbit because of minimality. If we make percolation relative to B_ε , the cluster of almost every point x in B_ε is infinite because it contains the points $\pi_1^n(x)$ disjoint from each-other. Then, almost every orbit has at least an infinite cluster.

Naturally, we are interested on the number of infinite clusters of the generic orbits of the action. We define the map $N(\mathcal{A}) : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ that assigns to each point the number of infinite clusters of its orbit. In proposition 3.65 we prove that it is measurable. Therefore, by ergodicity of the measure, $N(\mathcal{A})$ is constant in almost every point. So, generic orbits have the same number of infinite clusters (see proposition 3.66). The natural question is if we can extend the result of C.M. Newman y L.S. Schulman [56] to our context:

Conjecture 1. *If we make percolation relative to a Borel set \mathcal{A} of measure $0 < p < 1$ then every cluster is finite, there is an unique infinite cluster or there are infinitely many infinite clusters in each orbit.*

In the case of free groups, conjecture is true; in fact the following result (see proposition 3.79 in §3.4.4) shows that there does not exist uniqueness of infinite clusters, as in the case of classical percolation of trees:

Proposition 1. *Let G be a free product of groups. Then the clusters are finite or there are infinitely many infinite clusters.*

The conjecture is also true when the group has more than one end and the Borel set has small measure (see theorem 3.80 in §3.4.5):

Theorem 5. *Let G be a group with more than one end. Then there exists a constant $C \geq 0$ such that for any Borel set $\mathcal{A} \subset X$ with measure $p < C$, every cluster is finite or there are infinitely many infinite clusters in almost every orbit. Particularly, if G has 2 ends, then every cluster is finite.*

The fundamental tool used in the proof of these results is the following lemma (see fundamental lemma 3.74 in §3.4.4):

Fundamental Lemma 2. *Let G be a group with more than one end. If the number of infinite clusters is finite, then every infinite cluster approaches every end of the orbit which contains it.*

Bibliografía

- [1] F. Alcalde, Moyennes harmoniques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **XIX** (2010), 493-512.
- [2] F. Alcalde, A. Lozano, M. Macho, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. *Astérisque*, **323** (2009), 1-16.
- [3] F. Alcalde, M.P. Fernández de Córdoba, Nombre de branchement d'un pseudo-groupe. *Monats. Math.*, **163**, (2011), 389–414
- [4] F. Alcalde, A. Rechtman, Minimal Følner foliations are amenable. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **31** (2011), 685–707.
- [5] C. Anantharaman-Delaroche, J. Renault, Amenable groupoids. *Monographies de L'Enseignement Mathématique* **36**, L'Enseignement Mathématique, Genève, 2000.
- [6] A. Avez, Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **275** (1972), 1363–1366.
- [7] A. Avez, Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques, in *Théorie Ergodique (Rennes, 1973/1974)*. Lectures Notes in Math. 532, Springer, Berlin, 1976, 35-49.
- [8] I. Benjamini, G. Kozma, Non amenable liouville graphs. Preprint, 2010. ArXiv 1010.3365
- [9] M. Bermúdez. *Laminations boréliennes*, Thèse UCB-Lyon 1, 2004.
- [10] M. Bermúdez, G. Hector, Laminations hyperfinies et revêtements. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26** (2006), 305–339.
- [11] E. Blanc. *Propriétés génériques des laminations*. Thèse Université Claude Bernard de Lyon, 2001.

-
- [12] E. Blanc, Examples of mixed minimal foliated spaces. Artículo no publicado, 2002.
- [13] E. Breuillard, T. Gelander, J. Souto, P. Storm, Dense embeddings of surface groups. *Geometry And Topology*, **10** (2006), 1373–1389.
- [14] M. R. Bridson, A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [15] R. M. Burton, M. Keane, Density and uniqueness in percolation *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 501–505.
- [16] Y. Carrière, E. Ghys, Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **300** (1985), 677–680.
- [17] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration. *Algèbres d'opérateurs (Les Plans-sur-Bex, 1978)*, Lecture Notes in Math. 725, Springer, Berlin, 1979, 19–143.
- [18] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1** (1981), 431–450.
- [19] Y. Derriennic, Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. *Astérisque*, **74** (1980), 183–201.
- [20] Y. Derriennic. Entropie, théorèmes limites et marches aléatoires, in *Probability Measures on Groups VIII (Oberwolfach, 1985)*. Lectures Notes in Math. 1210, Springer, Berlin, 1986, 241–284.
- [21] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformations, I. *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 119–1159.
- [22] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.
- [23] J. Feldman, C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289–324.
- [24] H. Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, **1** (1967), 1–49.
- [25] D. Gaboriau, Dynamique des systèmes d'isométries : sur les bouts des orbites. *Invent. Math.*, **126** (1996), 297–318.

- [26] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, **139** (2000), 41–98.
- [27] D. Gaboriau, Invariant percolation and harmonic Dirichlet functions. *Geom. Funct. Anal.*, **15** (2005), 1004–1051.
- [28] E. Germain, Appendix B, Amenable groupoids. *Monographies de L'Enseignement Mathématique*, **36** L'Enseignement Mathématique, Genève, (2000).
- [29] E. Ghys, Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141** (1995), 387–422.
- [30] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Synth.*, **8** (1999), 49–95.
- [31] E. Ghys, De la Harpe. *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [32] E. Ghys, V. Sergiescu, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology*, **19** (1980), 179–197.
- [33] F. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups. Van Nostrand Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.
- [34] G. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [35] M. Gromov. *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*. Cedric/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [36] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math. IHES*, **53** (1981), 53–78.
- [37] M. Gromov, Asymptotic Invariants of Infinite Groups, in *Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [38] A. Haefliger, Variétés feuilletés, *Ann. Scuola Norm. Sub. Pisa*, **16** (1962), 367–397
- [39] A. Haefliger, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, in *Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982)*. *Astérisque*, **116** (1984), 70–97.
- [40] A. Haefliger. Pseudogroups of local isometries, in *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174–197.

-
- [41] A. Haefliger. Foliations and compactly generated pseudogroups, in *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*, World Sci. Publishing, River Edge, 2002, 275–295.
- [42] O. Häggström, Y. Peres, R.H. Schonmann, Percolation on transitive graphs as a coalescent process: Relentless merging followed by simultaneous uniqueness, in *Perplexing Problems in Probability (Papers in Honor of Harry Kesten)*. Birkhauser, Boston, 1999,69–90.
- [43] H. Hopf, Enden offener Raume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Comment. Math. Helv.*, **16** (1944), 81-100.
- [44] V. A. Kaimanovich, Amenability, Hyperfiniteness and isoperimetric inequalities. *C. R. Ac. Sci. París*, **325** (1997), 999–1004.
- [45] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable, in *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry. Amer. Math. Soc. Transl.*, **202** (2001), 151–166.
- [46] V. A. Kaimanovich, Brownian motion on foliations: entropy, invariant measures, mixing. *Funct. Anal. Appl.*, **22** (1988), 326–328.
- [47] V. A. Kaimanovich, Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18** (1998), 631-660.
- [48] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *Ann. Probab.*, **11** (1983), 457–490.
- [49] V. A. Kaimanovich, W. Woess, Boundary and entropy of space homogeneous Markov chains. *Ann. Probab.*, **30** (2002), 323-363.
- [50] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15** (1995), 1173-1181.
- [51] A. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Publ. de la RSME*, **10** (2006), 267–272.
- [52] R. Lyons, Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, **18** (1990), 931–958.
- [53] R. Lyons, R. Pemantle, Y. Peres, Ergodic theory on Galton-Watson trees : speed of random walk and dimension of harmonic measure. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15** (1995), 593–619.

-
- [54] R. Lyons, Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Draft Version 2012.
- [55] R. Lyons, O. Schramm, Indistinguishability of Percolation Clusters. *Ann. Probab.*, **27(4)** (1999), 1809–1836.
- [56] C.M. Newman, L.S. Schulman, Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, **26** (1981), 613–628.
- [57] A. L. Paterson, *Amenability*. American Mathematical Society, Providence, 1988.
- [58] F. Paulin, Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, **5** (1999), 163–200.
- [59] Y. Peres, Probability on trees: An introductory climb, in *Lectures on Probability Theory and Statistics* (Saint-Flour, 1997). *Lecture Notes in Math.* **1717**. Springer, Berlin. 1999, 193–280
- [60] Y. Peres, J.E. Steif, The number of infinite clusters in dynamical percolation. *Probab. Theory Related Fields*, **111** (1998), 141–165.
- [61] J. F. Plante, Foliations with measure preserving holonomy. *Ann of Math.*, **102** (1975), 327–361.
- [62] M. Samuélidès, Tout feuilletage à croissance polynomiale est hyperfini. *J. Funct. Anal.*, **34** (1979), 363–369.
- [63] C. Series, Foliations of polynomial growth are hyperfinite. *Israel J. Math.*, **34** (1979), 245–258.
- [64] J. R. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale Mathematical Monographs 4, Yale University Press, New Haven, 1971.
- [65] W. Thurston, Non cobordant foliations of S^3 . *Bull. Amer. Math. Soc.* , **78** (1972), 511–514.
- [66] B. Virág, On the speed of random walks on graphs. *Ann. Probab.*, **28** (2000), 379–394.
- [67] R. J. Zimmer, Hyperfinite factors and amenable ergodic actions. *Invent. Math.*, **41** (1977), 23–31.
- [68] R. J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Birkhuser, Boston, 1984.